

УДК 532.517.4

ОГРАНИЧЕНИЯ НА “БЫСТРУЮ” ЧАСТЬ КОРРЕЛЯЦИЙ ДАВЛЕНИЕ — СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ, ВЫВОДИМЫЕ ИЗ СПЕКТРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

С. Р. Богданов, Т. Й. Йонген*

Карельский государственный педагогический университет, 185680 Петрозаводск, Россия

* Научно-исследовательский институт корпорации “Юнилевер”, 3133 Влаардинген, Нидерланды

E-mail: sbogdanov@onego.ru

На основе точного спектрального представления “быстрой” части корреляций давление — скорости деформаций проведен анализ полуэмпирических аппроксимаций, используемых для этих корреляций, в рамках моделей турбулентности второго поколения. Получены простые неравенства, связывающие значения модельных констант, параметров средней скорости и инвариантов тензора Рейнольдса. В отличие от условий реализуемости для некоторых типов течений эти неравенства позволяют осуществить проверку указанных аппроксимаций до решения дифференциальных уравнений. При этом показано, что некоторые модели нельзя считать достаточно точными для описания течений с высокой степенью анизотропии. В частности, в значительной части физически допустимой области параметров нарушается условие неотрицательной определенности спектральной матрицы. Границы этой области рассчитаны для случаев безвихревого трехмерного и произвольного двумерного искажения турбулентности в каналах. Для значений модельных констант получены простые ограничения, использование которых позволяет избежать указанных нарушений.

Ключевые слова: развитая турбулентность, спектральные методы, модели второго поколения, условия реализуемости.

Введение. При изучении развитой анизотропной турбулентности используются различные идеи начиная с теории фракталов и метода ренормгруппы и заканчивая прямым численным моделированием и полуэмпирическими моделями. В настоящее время для расчетов в основном используются так называемые модели первого и второго поколений.

В рамках моделей первого поколения, основанных на понятии турбулентной вязкости, осуществляется непосредственная параметризация тензора Рейнольдса $\tau_{ij} \equiv \langle u_i u_j \rangle$ через тензор скоростей деформаций $U_{ij} \equiv \partial U_i / \partial x_j$ (\mathbf{U} , \mathbf{u} — средняя и пульсационная скорости соответственно; $i, j = 1, 2, 3$). Однако область использования подобных полуэмпирических аппроксимаций весьма ограничена: экспериментальные данные свидетельствуют об отсутствии локальной связи между тензорами τ_{ij} и U_{ij} .

Модели второго поколения основаны на использовании уравнений переноса для рейнольдсовых напряжений. При этом основная трудность заключается в моделировании тензора корреляций давление — скорости деформаций $\Phi_{ij} = P_{ij} + P_{ji}$ ($P_{ij} \equiv \langle p \partial u_i / \partial x_j \rangle$; p — пульсационная часть давления). Для этого тензора одним из наиболее распространенных является следующее полуэмпирическое модельное выражение [1–4]:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} = & -\varepsilon(C_1^0 + C_1^1 P/\varepsilon)b_{ij} + C_2 K S_{ij} + C_3 K (b_{ik} S_{kj} + S_{ik} b_{kj} - (2/3)b_{mn} S_{nm} \delta_{ij}) - \\ & - C_4 K (b_{ik} W_{kj} - W_{ik} b_{kj}) + C_5 \varepsilon (b_{ik} b_{kj} - (1/3)b_{mn} b_{nm} \delta_{ij}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $S_{ij} = (U_{ij} + U_{ji})/2$, $W_{ij} = (U_{ij} - U_{ji})/2$ — симметричная и антисимметричная части тензора скоростей деформации; ε — средняя скорость диссипации энергии; $P \equiv \tau_{ij}S_{ij} = -2Kb_{ij}S_{ij}$ — “порождение” турбулентности средним течением; $b_{ij} \equiv \tau_{ij}/(2K) - \delta_{ij}/3$ — тензор анизотропии; K — кинетическая энергия турбулентности; $\{C_i\}$ — модельные константы.

Несмотря на физическую содержательность идей, используемых при построении подобных выражений, они во многом сохраняют функциональную неопределенность. В частности, велика вероятность нарушения условий реализуемости, к которым относятся, например, неравенства [5]

$$\langle u_1^2 \rangle \geq 0, \quad \langle u_1 u_2 \rangle^2 \leq \langle u_1^2 \rangle \langle u_2^2 \rangle \quad (2)$$

и аналогичные им неравенства, вытекающие из положительной определенности тензора Рейнольдса. Нарушение указанных условий сложно предсказать, что затрудняет определение границ области применимости того или иного модельного выражения.

В то же время, используя спектральное представление для “быстрой” части $\Phi_{ij}^{(r)}$ тензора корреляций давление — скорости деформаций, можно получить простые жесткие ограничения на значения компонент этого тензора [6, 7], что в свою очередь позволяет оценить применимость различных модельных выражений до проведения громоздких расчетов.

При выводе указанных ограничений учитывается положительная определенность спектральной матрицы F_{ij} двухточечных корреляций $R_{ij} \equiv \langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$ пульсационной скорости:

$$F_{ij}\xi_i\bar{\xi}_j \geq 0 \quad (3)$$

(ξ_i — произвольный комплексный вектор; черта над символом означает комплексное сопряжение).

Заметим, что условия реализуемости (2) как следствие положительной определенности тензора Рейнольдса непосредственно вытекают из последнего неравенства после его интегрирования по всем возможным значениям волнового вектора \mathbf{k} при условии, что ξ не зависит от \mathbf{k} . Выбирая в качестве ξ_i $U_{li}\theta_l$ ($\theta_l \equiv k_l/k$), для оценки моделей можно получить более конструктивные неравенства (см. п. 1).

1. Вывод ограничений на свертку $\{\Phi^{(r)}U\}$. Для “быстрой” (индуцированной средними скоростями деформаций) части корреляций давление — скорости деформаций примем точное представление

$$\Phi_{ij}^{(r)} = 2U_{lm} \int (F_{mj}\theta_l\theta_i + F_{im}\theta_l\theta_j) d\mathbf{k}. \quad (1.1)$$

Будем полагать, что турбулентность локально-однородна. Для сокращения записи в формулах не указываются аргументы \mathbf{k} и \mathbf{x} компонент спектральной матрицы F_{ij} , ее собственных значений и собственных векторов, а также аргумент \mathbf{x} одноточечных средних.

Проводя в (1.1) свертку по индексам i, j с матрицей U_{ji} , с учетом соотношений $U_{ij} = S_{ij} + W_{ij}$ и $W_{ij} = -W_{ji}$ получаем

$$\begin{aligned} \{U\Phi^{(r)}\} = & 2 \int F_{mi}(U_{lm}\theta_l)(U_{ji}\theta_j) d\mathbf{k} + 2 \int F_{mj}(S_{lm}\theta_l)(S_{ji}\theta_i) d\mathbf{k} - \\ & - 2 \int F_{mj}(W_{lm}\theta_l)(W_{ij}\theta_i) d\mathbf{k} \quad (1.2) \end{aligned}$$

(фигурные скобки обозначают свертку соответствующих матриц).

Следует отметить, что в силу положительной определенности спектральной матрицы F_{mj} каждый из трех интегралов в (1.2) является неотрицательным. В этом легко убе-

даться, интегрируя неравенство (3) с использованием в качестве ξ_i вектора $S_{li}\theta_l$ и аналогичных векторов, образованных с помощью матриц U_{li} и W_{li} .

В отсутствие среднего вращения ($W_{ij} = 0$) в правой части соотношения (1.2) остаются лишь первые два (неотрицательные) слагаемые, что приводит к простому неравенству

$$\{U\Phi^{(r)}\} \geq 0. \quad (1.3)$$

В общем случае, когда матрица U_{ij} не является симметричной, для вывода ограничения на значения свертки $\{U\Phi^{(r)}\}$ необходимо оценить также верхние границы значений интегралов в соотношении (1.2). С этой целью используем следующие представления для матрицы F_{mj} [8]:

$$F_{mj} = \overline{a_m}(\mathbf{k})a_j(\mathbf{k})\lambda_1(\mathbf{k}) + \overline{b_m}(\mathbf{k})b_j(\mathbf{k})\lambda_2(\mathbf{k}), \quad (1.4)$$

где \mathbf{a} , \mathbf{b} и λ_1 , λ_2 — собственные векторы (нормированные на единицу) и соответствующие им собственные значения этой матрицы; $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = 1$; векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} ортогональны вектору $\boldsymbol{\theta}$.

Очевидно, что $F_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2$, и для кинетической энергии турбулентности K имеем

$$2K \equiv \overline{u^2} \equiv \int F_{ii} d\mathbf{k} \equiv \int (\lambda_1 + \lambda_2) d\mathbf{k}. \quad (1.5)$$

С учетом представления (1.4) свертку матрицы F_{mj} с произвольным вектором \mathbf{q} можно представить в виде

$$F_{mj}q_mq_j = |\mathbf{qb}|^2\lambda_1 + |\mathbf{qa}|^2\lambda_2. \quad (1.6)$$

Используя неравенство $|\mathbf{qa}|^2 \leq \mathbf{q}^2\mathbf{a}^2 \equiv \mathbf{q}^2$ и аналогичное неравенство для второго слагаемого в правой части соотношения (1.6), получаем

$$F_{mj}q_mq_j \leq (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{q}^2. \quad (1.7)$$

Последовательно выбирая в качестве q_m векторы $S_{lm}\theta_l$, $U_{lm}\theta_l$ и $W_{lm}\theta_l$, из последнего неравенства легко вывести ограничения сверху на значения интегралов, входящих в соотношение (1.2). Действительно, рассматривая для определенности $q_m = S_{lm}\theta_l$, величину \mathbf{q}^2 можно записать в виде

$$\mathbf{q}^2 = S_{lm}^2\theta_l\theta_m.$$

Это представление означает, что значение \mathbf{q}^2 ограничено сверху максимальным значением свертки матрицы S_{lm}^2 (или $U_{lp}U_{mp}$, $-W_{lm}^2$ для двух других случаев) с единичным вектором $\boldsymbol{\theta}$. В свою очередь эта квадратичная форма ограничена максимальным собственным значением $\|S^2\|$ матрицы S_{lm}^2 [9]. В результате из (1.7) имеем

$$F_{mj}(S_{lm}\theta_l)(S_{ji}\theta_i) d\mathbf{k} \leq (\lambda_1 + \lambda_2)\|S^2\|.$$

Интегрируя последнее соотношение по \mathbf{k} и учитывая (1.5), получаем

$$0 \leq \int F_{mj}(S_{lm}\theta_l)(S_{ji}\theta_i) d\mathbf{k} \leq 2K\|S^2\|. \quad (1.8)$$

В результате аналогичных вычислений для случаев, когда в соотношении (1.7) в качестве \mathbf{q} выбираются $U_{lm}\theta_l$ и $W_{lm}\theta_l$, для \mathbf{q}^2 получаем верхние оценки $\|S^2\| + \|-W^2\| - 2\|SW\|$ и $\|-W^2\|$. Тогда для двух остальных интегралов в правой части (1.2) имеем неравенства

$$0 \leq \int F_{mj}(W_{lm}\theta_l)(W_{ij}\theta_i) d\mathbf{k} \leq 2K\|-W^2\|, \quad (1.9)$$

$$0 \leq \int F_{mi}(U_{lm}\theta_l)(U_{ji}\theta_j) d\mathbf{k} \leq 2K(\|S^2\| + \|-W^2\| - 2\|SW\|).$$

Наконец, подставляя в соотношение (1.2) оценки (1.8), (1.9), получаем искомые ограничения

$$-4K\|-W^2\| \leq \{U\Phi^{(r)}\} \leq 4K(2\|S^2\| + \|-W^2\| - 2\|SW\|). \quad (1.10)$$

В отличие от обычных условий реализуемости (2) двойное неравенство (1.10), выведенное из условия положительной определенности спектральной матрицы F_{ij} , включает модельное выражение для тензора $\Phi_{ij}^{(r)}$, что позволяет осуществить непосредственную проверку адекватности этих выражений. В п. 2 показано, что для некоторых типов течений определенные выводы можно получить еще до решения дифференциальных уравнений.

2. Прямая проверка моделей для $\Phi_{ij}^{(r)}$. Соотношение (1.10) может быть использовано для предварительного анализа применимости любых моделей к расчету того или иного класса течений. Однако для определенности рассмотрим лишь простейшие (линейные по b и U) соотношения (1) для $\Phi_{ij}^{(r)}$. Подставляя в основное неравенство (1.10) часть выражения (1), соответствующую “быстрой” части $\Phi_{ij}^{(r)}$ тензора корреляций давление — скорости деформаций, и проводя несложные преобразования, получаем

$$2(2\|S^2\| + \|-W^2\| - 2\|SW\|) \geq C_2\{S^2\}/2 + C_3\{bS^2\} - C_4\{bWS\} \geq -2\|-W^2\|. \quad (2.1)$$

Для упрощения вычислений также ограничимся рассмотрением двух классов течений. Первый класс течений представляет собой безвихревую трехмерную деформацию включая такие важные частные случаи, как течения в конфузорах и диффузорах. При этом основное неравенство имеет простой вид (1.3) или, что эквивалентно, сводится ко второму неравенству (2.1) с $W = 0$. Второй, относительно простой класс течений характеризуется двумерной матрицей средних скоростей деформации [10, 11]:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = (D + \omega)\delta_{i1}\delta_{j2} + (D - \omega)\delta_{i2}\delta_{j1}, \quad (2.2)$$

где D, ω — параметры, характеризующие плоскую деформацию и вращение. Однако этот класс включает такие важные для практики случаи, как течение в плоском канале, плоское искажение решеточной турбулентности, эллиптические течения. Кроме того, представляют интерес однородные течения такого типа: как правило, на их основе проводится “калибровка” моделей, выбор значений констант.

Для течений данного типа расчет максимальных собственных значений $\|S^2\|, \|SW\|, \|-W^2\|$ осуществляется непосредственно и приводит к оценкам

$$\|S^2\| \leq \{S^2\}/2, \quad \|-W^2\| \leq \{-W^2\}/2, \quad \|SW\| \leq (\{S^2\}\{-W^2\})^{1/2}/2. \quad (2.3)$$

С учетом неравенств (2.3) ограничение (2.1) принимает вид

$$2 + 2|R| + R^2 \geq C_2/2 + C_3\{bS^2\}/\{S^2\} - C_4\{bWS\}/\{S^2\} \geq -R^2 \quad (2.4)$$

($R^2 \equiv -\{W^2\}/\{S^2\}$).

Следуя работе [10], рассмотрим свертку тензора анизотропии b с матрицами средних скоростей деформации

$$B_3 \equiv \{bS^2\}/\{S^2\}, \quad B_2 \equiv \{bWS\}/\{S^2\}, \quad B_1 \equiv \{bS\}/\{S^2\}^{1/2}. \quad (2.5)$$

С учетом (2.5) неравенство (2.4) можно записать в простом виде

$$2 + 2|R| + R^2 \geq C_2/2 + C_3B_3 - C_4B_2 \geq -R^2. \quad (2.6)$$

Поскольку для рассматриваемых типов течений параметры $\{B_i\}$, характеризующие тензор анизотропии, могут принимать любые значения (например, на входе на участок искажения), модель можно считать адекватной, если во всей области физически возможных значений $\{B_i\}$ выполняется неравенство (2.6).

Рассмотрим границы данной области более подробно. С учетом (2.5), (2.2) для инвариантов $\{B_i\}$ имеем

$$B_3 = (b_{11} + b_{22})/2 \equiv -b_{33}/2, \quad B_2 = R(b_{11} - b_{22})/2, \quad B_1 = b_{12}\sqrt{2}. \quad (2.7)$$

Принимая во внимание условия реализуемости (2) и записывая их в виде ограничений на компоненты тензора анизотропии: $-1/3 \leq b_{ii} \leq 2/3$ (суммирование по i не проводится), $b_{12}^2 \leq (b_{11} + 1/3)^2(b_{22} + 1/3)^2$, из соотношений (2.7) можно определить диапазоны значений инвариантов $\{B_i\}$.

Действительно, из первого соотношения (2.7) следует

$$B_3 \in [-1/3, 1/6]. \quad (2.8)$$

При заданном B_3 область допустимых значений B_2 легко определяется из второго соотношения (2.7):

$$B_2 \in R[-1/3 - B_3; 1/3 + B_3]. \quad (2.9)$$

Наконец, при заданных значениях B_2 , B_3 диапазон значений B_1 определяется неравенством

$$B_1^2 \leq 2((B_3 + 1/3)^2 - B_2^2/R^2). \quad (2.10)$$

Следует отметить, что для набора скаляров $\{B_i\}$ неравенства (2.8)–(2.10) представляют собой лишь иную форму записи обычных условий реализуемости (2). Допустимые значения параметров $\{B_i\}$, определяемые этими неравенствами, представлены на рис. 1 на плоскости $(B_2/R, B_3)$. При этом ограничениям (2.8), (2.9) соответствует область, ограниченная контуром треугольника ABC . Границам этого треугольника соответствует двумерная турбулентность, вершинам A, B, C — одномерная (с пульсациями вдоль осей 3, 2, 1 соответственно), отрезкам BE, CF, AD — осесимметричная турбулентность (случаи $u_1^2 = u_3^2$, $u_2^2 = u_3^2$ и $u_1^2 = u_2^2$), точке O — изотропная турбулентность. На рис. 1 показано также семейство гипербол, представляющих собой изолинии B_1 (2.10). При заданном B_1 область возможных значений параметров B_3 и B_2/R ограничена соответствующей гиперболой и отрезком BC .

Ограничение (2.6) можно проанализировать двумя способами: 1) подставить в (2.6) значения констант $\{C_i\}$ и рассчитать “области адекватности” на плоскости $(B_2/R, B_3)$, т. е. найти диапазон допустимых значений компонент тензора b , в котором при использовании соответствующих моделей не нарушается ограничение (2.6); 2) подставляя в (2.6)

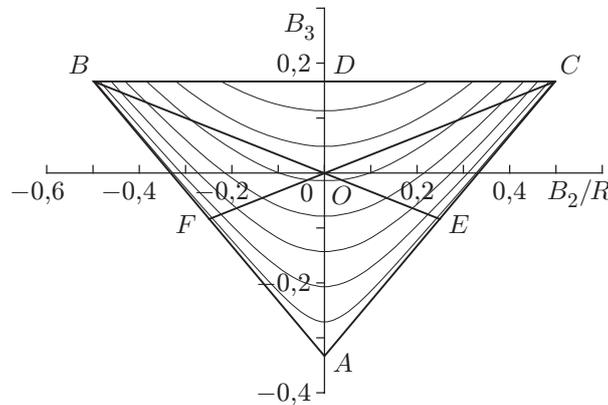


Рис. 1. Допустимые значения параметров B_3 и B_2/R : семейство гипербол внутри треугольника ABC — изолинии B_1

допустимые значения инвариантов B_3 , B_2 , получить ограничения на значения модельных констант $\{C_i\}$.

Проиллюстрируем второй способ простым примером. В частном случае $R = 0$ соотношение (2.6) имеет вид

$$-C_2/(2C_3) \leq B_3 \leq (4 - C_2)/(2C_3). \quad (2.11)$$

Сравнивая неравенства (2.8), (2.11), получаем следующие ограничения на значения модельных констант:

$$4 - C_3/3 \geq C_2 \geq 2C_3/3. \quad (2.12)$$

В наиболее известных моделях второго поколения для набора констант $\{C_i\}$ приняты следующие значения:

— для модели SSG (Speziale — Sarkar — Gatski [1])

$$C_1^0 = 3,4, \quad C_1^1 = 1,8, \quad C_2 = 0,36, \quad C_3 = 1,25, \quad C_4 = 0,4, \quad C_5 = 4,2;$$

— для модели LRR (Launder — Reece — Rodi [2])

$$C_1^0 = 3,0, \quad C_1^1 = 0, \quad C_2 = 0,8, \quad C_3 = 1,75, \quad C_4 = 1,31, \quad C_5 = 0;$$

— для модели GL (Gibson — Launder [3])

$$C_1^0 = 3,6, \quad C_1^1 = 0, \quad C_2 = 0,8, \quad C_3 = 1,2, \quad C_4 = 1,2, \quad C_5 = 0;$$

— для модели T (Taulbee [4])

$$C_1^0 = 3,6, \quad C_1^1 = 0, \quad C_2 = 0,8, \quad C_3 = 1,94, \quad C_4 = 1,16, \quad C_5 = 0.$$

Подставляя данные значения в неравенство (2.12), нетрудно убедиться, что левая часть неравенства выполняется для всех моделей, правая — лишь для модели GL, причем здесь точно выполняется соотношение $C_2 = 2C_3/3$.

Аналогично с использованием второго способа рассмотрим более общий случай $R \neq 0$. При этом с учетом результатов для случая $R = 0$ ограничимся рассмотрением более сильного неравенства (2.6)

$$C_2/2 + C_3B_3 - C_4B_2 + R^2 \geq 0. \quad (2.13)$$

Для того чтобы неравенство (2.13) выполнялось при любом значении R , дискриминант квадратного трехчлена должен быть отрицательным:

$$2(C_2 + 2C_3B_3) \geq C_4^2B_2^2/R^2. \quad (2.14)$$

Следовательно, для моделей “опасной” является область, в которой неравенство (2.14) не выполняется; причем при каждом заданном значении B_3 наиболее неблагоприятный вариант соответствует случаю, когда значение B_2 максимально, т. е. с учетом (2.9) $B_2 = R(B_3 + 1/3)$. В этом предельном случае из неравенства (2.14) следует ограничение

$$C_4^2B_3^2 + (2C_4^2/3 - 4C_3)B_3 + C_4^2/9 - 2C_2 \leq 0. \quad (2.15)$$

Для выполнения (2.15) при любом значении B_3 необходимым условием является условие

$$C_2 \geq 2C_3/3 - 2C_3^2/C_4^2. \quad (2.16)$$

Кроме того, для выполнения условия (2.15) при всех возможных значениях B_3 (см. (2.8)) необходимо, чтобы минимальный и максимальный корни квадратного трехчлена для B_3 в левой части (2.15) были меньше $-1/3$ и больше $1/6$ соответственно. Это приводит к следующим ограничениям на значения констант:

$$C_2 \geq 2C_3/3; \quad (2.17)$$

$$C_3 \geq C_4^2/4 \quad (\text{или} \quad C_3 + 3C_2 \geq 3C_4^2/8, \quad \text{если} \quad C_3 \leq C_4^2/4). \quad (2.18)$$

Ограничение (2.17), гарантирующее применимость моделей вблизи предельного значения $B_3 = -1/3$, усиливает неравенство (2.16), однако по сравнению с рассмотренным случаем $R = 0$ не дает ничего нового. Неравенства (2.18) обеспечивают адекватность моделей в предельной области вблизи значения $B_3 = 1/6$.

Подставляя в неравенства (2.17), (2.18) значения констант для различных моделей, легко убедиться, что неравенство (2.18) выполняется для всех случаев, в то время как неравенство (2.17) выполняется только для модели GL.

В случае, когда условие $C_2 \geq 2C_3/3$ нарушается, с помощью (2.13) нетрудно также определить значения R , при которых происходит такое нарушение. Действительно, подставляя в (2.13) значение $B_3 = -1/3$, при котором и происходит нарушение, и соответствующее ему значение $B_2 = 0$, имеем

$$R \leq \sqrt{-(C_2 - 2C_3/3)/2}. \quad (2.19)$$

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы: 1) необходимое условие адекватности моделей представляется в виде неравенств (2.12), (2.17), (2.18); 2) в случае если неравенство $C_2 \geq 2C_3/3$ не выполняется, условие реализуемости нарушается при $R \leq \sqrt{-(C_2 - 2C_3/3)/2}$.

Проанализируем ограничения, используя первый метод, т. е. подставляя в соотношение (2.6) значения констант каждой модели и выявляя доступную для данной модели область допустимых значений параметров B_2, B_3 . При этом полученные выше результаты имеют наглядную геометрическую интерпретацию.

Действительно, неравенство (2.13) можно наглядно представить на плоскости $(B_2/R, B_3)$ с помощью семейства прямых линий с величиной R в качестве параметра. Огибающая этого семейства представляет собой параболу, задаваемую формулой $C_2 + 2C_3B_3 = C_4^2(B_2/R)^2/2$, что согласуется с (2.14). На рис. 2 показаны семейство этих прямых и соответствующая им параболу (2.14) (использованы значения констант модели LRR, для остальных моделей, кроме GL, результаты аналогичны). Данные параболы пересекают область допустимых значений параметров в той ее части, которая примыкает к нижней вершине треугольника. При этом для каждого значения R из интервала $[0, \sqrt{-(C_2 - 2C_3/3)/2}]$, определяемого соотношением (2.19), соответствующая прямая также пересекает треугольник; ниже этой прямой условия реализуемости (2.6) нарушаются. Следовательно, ни одну модель (за исключением модели GL, для которой нестрогое

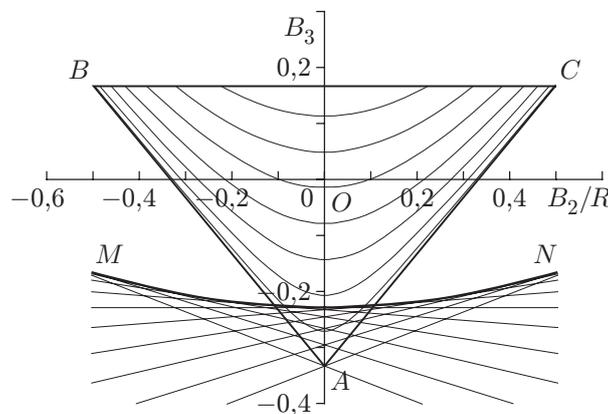


Рис. 2. “Область адекватности” модели LRR при расчетах эллиптических течений:

область ниже параболы MN — зона нарушения условий реализуемости модели

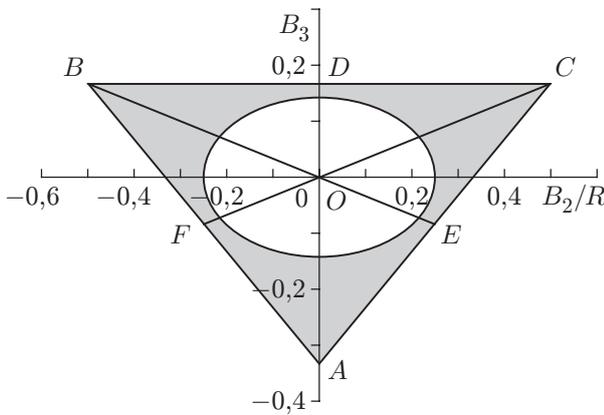


Рис. 3

Рис. 3. “Область адекватности” модели LRR при расчетах безвихревого трехмерного искажения

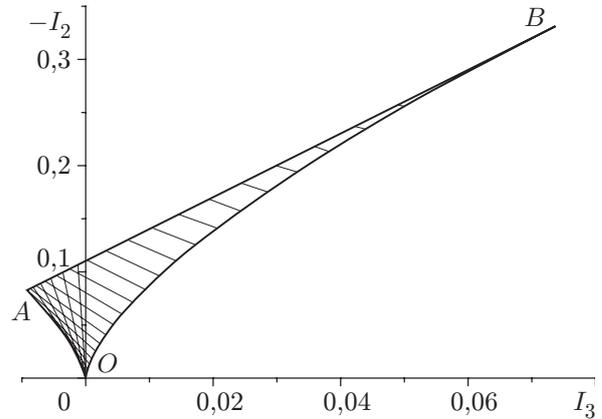


Рис. 4

Рис. 4. Треугольник Ламли с семейством изолиний B_3 ($-1/3 \leq B_3 \leq 0$)

неравенство $C_2 \geq 2C_3/3$ обращается в равенство) нельзя признать адекватной. В частности, эти модели неприменимы для расчета сильноанизотропных течений с большими отрицательными значениями параметра B_3 и соответственно положительным значением компоненты b_{33} (высокая интенсивность турбулентных пульсаций вдоль оси 3).

Аналогичные расчеты выполнены для второго класса течений — трехмерного безвихревого искажения. В данном случае ограничение определяется неравенством (1.3), причем часть физической области параметров, в которой происходит нарушение этого ограничения, оказывается еще большей, чем для класса эллиптических течений. На рис. 3 представлена конфигурация этой области для модели LRR (заштрихованная область треугольника ABC).

3. Инвариантное представление результатов. Полученные выше результаты, в частности ограничения (2.6) на значения компонент тензора анизотропии b , можно представить в инвариантном виде. Для этого вместо параметров $\{B_i\}$ будем использовать второй I_2 и третий I_3 инварианты указанного тензора (первый инвариант — свертка b_{ii} — обращается в нуль по определению):

$$I_2 = -\{b^2\}/2, \quad I_3 = \{b^3\}/3.$$

На рис. 4 представлен так называемый треугольник Ламли (область плоскости (I_3, I_2)), соответствующий физически допустимым значениям этих инвариантов. Треугольник Ламли можно рассматривать как одну из форм представления обычных условий реализуемости (2). Здесь точки $O(0, 0)$, $A(-1/108, 1/12)$, $B(2/27, 1/3)$ соответствуют изотропной, изотропной двумерной и одномерной турбулентности. Линия AB , задаваемая формулой

$$-I_2 = 1/9 + 3I_3,$$

соответствует двумерной турбулентности. Боковые границы определяются уравнением

$$-I_2 = 3(I_3/2)^{2/3} \quad (3.1)$$

и соответствуют осесимметричной турбулентности.

Соотношения, устанавливающие связь между инвариантами I_2 , I_3 и параметрами $\{B_i\}$, имеют вид [12]

$$-2I_2 = B_1^2 + 2B_2^2/R^2 + 6B_3^2, \quad I_3 = B_3(B_1^2 + 2B_2^2/R^2 - 2B_3^2). \quad (3.2)$$

Проанализируем эти соотношения более подробно. Прежде всего рассмотрим параметр B_3 , для которого из (3.2) получаем

$$I_3 = -2B_3(I_2 + 4B_3^2). \quad (3.3)$$

Соотношение (3.3) можно представить в виде кубического уравнения

$$B_3^3 - (-I_2/4)B_3 + I_3/8 = 0,$$

которое позволяет по заданным значениям инвариантов найти соответствующие значения параметра B_3 . Это уравнение является уравнением так называемого неполного ($x^3 + px + q = 0$) вида ($p = I_2/4$, $q = I_3/8$). Характер его решений определяется знаком выражения $Q \equiv (p/3)^3 + (q/2)^2$.

Выражая Q через инварианты:

$$Q = ((I_3/2)^2 + (I_2/3)^3)/64$$

и учитывая соотношение (3.1) для границы доступной области плоскости (I_3, I_2) , легко заключить, что $Q \leq 0$. Следовательно, уравнение (3.3) имеет три вещественных корня (лишь в предельном случае $-I_2 = 3(I_3/2)^{2/3}$, соответствующем осесимметричной турбулентности, таких корней два). Иными словами, в общем случае каждой точке из доступной области на плоскости (I_3, I_2) соответствует три значения параметра B_3 . Этот результат допускает наглядную геометрическую интерпретацию (см. рис. 4). При заданном значении B_3 уравнение (3.3) задает на плоскости (I_3, I_2) прямую. При этом для всех B_3 из интервала $[-1/3, 1/6]$ соответствующая прямая пересекает домен доступной области. Отрезок, на котором происходит пересечение, можно рассматривать как соответствующую изолинию B_3 . Нетрудно убедиться, что семейство этих изолиний очерчивает доступную область три раза, так что можно говорить о трех “листах”, или копиях, этой области, покрытых изолиниями B_3 . На рис. 4 приведены первые “полтора листа”, которым соответствуют значения B_3 из интервала $[-1/3, 0]$. Заметим, что изолиния $B_3 = -1/3$ вырождается в точку, а значению $B_3 = 1/6$ (как следует из (3.3)) соответствует изолиния, совпадающая с верхней границей $-I_2 = 1/9 + 3I_3$ области.

Боковые границы $-I_2 = 3(I_3/2)^{2/3}$ области совпадают с огибающей семейства прямых (3.3). Следовательно, полученный вывод о “трехлистном” соответствии можно дополнить следующими геометрическими построениями. Из каждой точки доступной области можно провести три касательных к боковым границам $-I_2 = 3(I_3/2)^{2/3}$. В общем случае каждая из этих прямых соответствует трем различным значениям B_3 . Эти значения (легко идентифицируемые с помощью построения или выражения (3.3)) соответствуют точке, выбранной на плоскости (I_3, I_2) .

Процедура идентификации изолиний B_2, B_1 является более сложной. В частности, простой аналитический расчет изолиний B_2 возможен лишь при $B_1 = 0$. Соответствующее семейство изолиний приведено на рис. 5. Как и для параметра B_3 , здесь имеет место тройное соответствие значений $|B_2|$ и заданной точки области, при этом изолиния $B_2 = 0$ соответствует боковым границам области.

При $B_1 \neq 0$ семейство изолиний B_2 рассчитывается численно на основе уравнений (3.2): при фиксированном значении параметра B_1 для каждого значения B_2 эти уравнения определяют соответствующую изолинию в параметрической форме. При этом в качестве параметра используется величина B_3 , диапазон возможных значений которой определяется соотношениями (2.8), (2.10).

Используя полученные вспомогательные результаты, легко представить и проанализировать характер ограничений (2.6) на плоскости (I_3, I_2) в “инвариантном” виде. Для определенности ограничимся рассмотрением набора констант, соответствующих модели SSG (для других моделей результаты аналогичны).

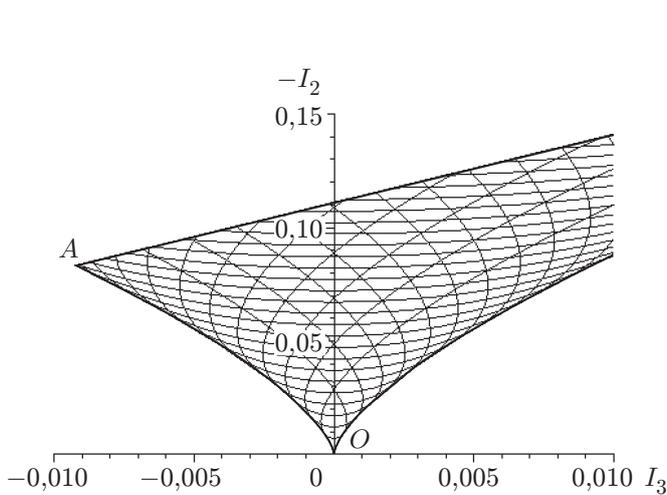


Рис. 5

Рис. 5. Фрагмент физически допустимой области параметров с сеткой изолиний B_2 ($B_1 = 0$)

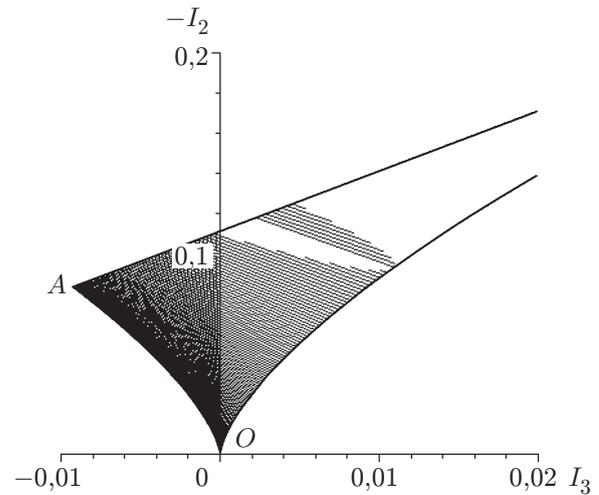


Рис. 6

Рис. 6. “Область адекватности” модели SSG на плоскости инвариантов I_2 и I_3 ($R = 0,2$; $B_1 = 0$)

Расчет выполняется аналогично тому, как это было сделано при построении изолиний. Однако помимо стандартных условий (2.8), (2.10) учитывается ограничение (2.6). При этом для каждой рассматриваемой модели легко идентифицируются “запретные” зоны внутри основной области (I_3, I_2). Эти зоны представляют собой совокупность тех изолиний или их частей, для которых условие (2.6) нарушается.

Результаты расчетов при $R = 0,2$, $B_1 = 0$ представлены на рис. 6; часть области, где не нарушается основное неравенство (2.6), заштрихована.

Следует отметить, что данные выводы являются лишь иным представлением полученных выше результатов, показанных, в частности, на рис. 2.

Заключение. Проведенное исследование показывает, что многие используемые при замыкании уравнений переноса для напряжений Рейнольдса аппроксимации корреляций давление — скорости деформации нельзя считать достаточно точными. В частности, они неприемлемы для расчета течений с произвольной степенью анизотропии. Попытки (в том числе с учетом выведенных выше ограничений на значения констант и расчетов “областей адекватности”) расширить область применимости моделей, варьируя значения констант или заменяя их некоторыми функциями параметров течения, как правило, приводят к тому, что полученный результат указывает на принципиальный недостаток моделей: турбулентность является в большей степени нелокальной, чем предполагается в рамках этих моделей. Вследствие этого набор полей, для которых составляются дифференциальные уравнения, в общем случае должен быть расширен. Однако данный вывод не умаляет значения этих моделей при выполнении инженерных расчетов, в частности при вычислении параметров стационарных состояний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Speziale C. G., Sarkar S., Gatski T. B. Modeling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach // J. Fluid Mech. 1991. V. 227. P. 245–272.

2. **Launder B. E., Reece G., Rodi W.** Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure // J. Fluid Mech. 1975. V. 68. P. 537–566.
3. **Gibson M. M., Launder B. E.** Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer // J. Fluid Mech. 1978. V. 86. P. 491–511.
4. **Taulbee D. B.** An improved algebraic stress model and corresponding nonlinear stress model // Phys. Fluids. Ser. A. 1992. V. 4. P. 2555–2561.
5. **Ламли Дж.** Модели второго порядка для турбулентных течений // Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984. С. 7–34.
6. **Богданов С. Р., Соболев С. И.** К проблеме моделирования корреляций “давление — скорости деформаций” в теории турбулентности // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1992. № 2. С. 42–46.
7. **Bogdanov S. R., Jongen T. J.** Constraints for the pressure-strain correlation tensor derived from spectral representation // Abstr. of the 6th Fluid mech. conf. (EUROMECH), Stockholm (Sweden), June 26–30, 2006. Stockholm: Roy. Inst. of Technol., 2006. V. 2. P. 224.
8. **Монин А. С.** Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности / А. С. Монин, А. М. Яглом. М.: Наука, 1967. Ч. 2.
9. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т. 3, ч. 1.
10. **Jongen T., Gatski T. B.** A new approach characterizing the equilibrium states of the Reynolds stress anisotropy in homogeneous turbulence // Theoret. Comput. Fluid Dynamics. 1998. N 11. P. 31–47.
11. **Kassinos S. C., Reynolds W. C.** A particle representation model for the deformation of homogeneous turbulence: Annu. res. briefs. S. l.: Center turbulence res., 1996. P. 31–51.
12. **Jongen T., Gatski T. B.** A unified analysis of planar homogeneous turbulence using single-point closure equations // J. Fluid Mech. 1999. V. 399. P. 117–150.

*Поступила в редакцию 24/I 2007 г.,
в окончательном варианте — 25/IV 2007 г.*
