

УДК 539.41 + 620.17

**ПРИМЕНЕНИЕ КРУГОВ МОРА ДЛЯ СВЯЗИ И МОДЕЛЬНОЙ ОЦЕНКИ
ПРОЧНОСТНЫХ ДАННЫХ РАЗНОРАЗМЕРНЫХ ОБРАЗЦОВ ГОРНЫХ ПОРОД**

П. А. Цой^{1,2}, О. М. Усольцева¹

¹Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
E-mail: paveltsoy@mail.ru, Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный технический университет,
просп. Карла Маркса, 20, 630073, г. Новосибирск, Россия

Предложен подход для связи прочностных данных по разноразмерным образцам горных пород линейной зависимостью касательного напряжения от нормального напряжения. Данные представлены кругами Мора. Ключевым моментом является определение центроидов для областей, ограниченных полукругами Мора, относящихся к одноосному сжатию и растяжению. С использованием координат центроидов проводится построение зависимости касательного напряжения от нормального. На этой основе построена модельная оценка недостающих прочностных данных (пределы прочности на сжатие и растяжение) для образцов горных пород. На примере метаалевролита выполнена оценка недостающих пределов прочности.

Круги Мора, разноразмерные образцы горных пород, одноосное сжатие, растяжение, центроид, предел прочности

DOI: 10.15372/FTPRPI20190203

Для описания прочностного поведения горных пород необходимо провести ряд механических испытаний, соответствующих установленным стандартам [1 – 6], содержащим методики и рекомендации по выполнению тестов на объемное сжатие, прямой сдвиг, одноосное сжатие, растяжение (прямое, бразильская проба). Минимальную необходимую информацию можно получить, опираясь на данные последних двух тестов. Результаты по прочностным характеристикам сводятся в декартовой системе координат “касательное напряжение — нормальное напряжение” и на их основе строятся круги Мора [7 – 12]. В практике используется линейная зависимость касательного напряжения от нормального, по которой можно определить угол внутреннего трения и коэффициент сцепления [7]. Для формулировки критериев разрушения геоматериалов в [11, 12] предлагаются новые инварианты тензора напряжений, которые определяются как средние значения касательных и нормальных напряжений, а также как их отношения по всем площадкам, проходящим через главные направления тензора напряжений.

Работа выполнена при финансовой поддержке проектов ФНИ (№ гос. рег. АААА-А17-117121140065-7) при содействии ЦКП геомеханических, геофизических и геодинамических измерений СО РАН.

Использованы экспериментальные результаты, полученные в [13, 14]. Рассмотрены стандартные (отношение высоты образца h к диаметру поперечного сечения d равно 2 в случае одноосного сжатия и $h/d = 1$ в случае растяжения) разноразмерные образцы метаалевролита цилиндрической формы и получены значения пределов прочности [14]. В исследовании поставлена задача объединить пределы прочности образцов при разных размерах в одном линейном соотношении между касательным и нормальным напряжением и найти возможное применение полученному соотношению.

ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

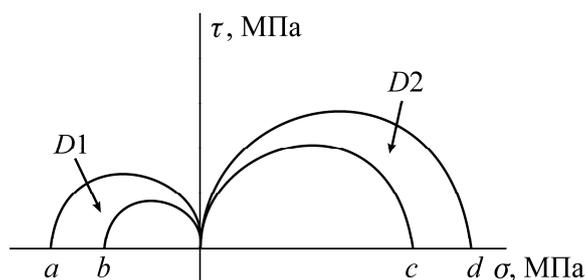
“КАСАТЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ — НОРМАЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ”

Пусть имеются известные полуокружности Мора для каждого цилиндрического образца горной породы: два образца на растяжение и два — на одноосное сжатие. Образцы при каждом виде испытаний различаются размерами (рисунок). Границы полуокружностей (в декартовой системе координат “касательное напряжение τ — нормальное напряжение σ ”), соответствующих растяжению, рассмотрим в виде следующих соотношений:

$$\left(\sigma - \frac{a}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad (1)$$

$$\left(\sigma - \frac{b}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2, \quad (2)$$

где $\tau \geq 0$, $a < 0$, $b < 0$, $a/b > 1$.



Полуокружности Мора в декартовой системе координат “касательное напряжение τ — нормальное напряжение σ ”; $D1$, $D2$ — области, заключенные между полуокружностями и прямой $\tau = 0$; a , b — пределы прочности при растяжении; c , d — пределы прочности при одноосном сжатии

Границы полуокружностей, соответствующих одноосному сжатию, имеют вид:

$$\left(\sigma - \frac{c}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2, \quad (3)$$

$$\left(\sigma - \frac{d}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2, \quad (4)$$

здесь $\tau \geq 0$, $c > 0$, $d > 0$, $c/d < 1$.

В соответствии с прочностными данными, полученными в [14], сделано предположение, что соотношение между c и d меняться не будет.

Найдем координаты центроидов σ_{D1} , τ_{D1} и σ_{D2} , τ_{D2} для каждой соответствующей области $D1$ и $D2$ по формулам [11, 12]:

$$\sigma_{D1} = \frac{\iint_{D1} \sigma d\sigma d\tau}{\iint_{D1} d\sigma d\tau}, \quad \tau_{D1} = \frac{\iint_{D1} \tau d\sigma d\tau}{\iint_{D1} d\sigma d\tau}, \quad \sigma_{D2} = \frac{\iint_{D2} \sigma d\sigma d\tau}{\iint_{D2} d\sigma d\tau}, \quad \tau_{D2} = \frac{\iint_{D2} \tau d\sigma d\tau}{\iint_{D2} d\sigma d\tau}.$$

Удобнее вычислять эти величины в полярной системе координат, где $\sigma = \rho \cos \phi$, $\tau = \rho \sin \phi$, ρ — полярный радиус, ϕ — полярный угол. Тогда величина σ_{D1} запишется как

$$\sigma_{D1} = \frac{\int_{\pi/2}^{\pi} \cos \phi d\phi \int_{b \cos \phi}^{a \cos \phi} \rho^2 d\rho}{\int_{\pi/2}^{\pi} d\phi \int_{b \cos \phi}^{a \cos \phi} \rho d\rho} = \frac{1}{2} \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}. \quad (5)$$

Проделав подобные вычисления, получим величины τ_{D1} , σ_{D2} , τ_{D2} , которые окончательно запишутся следующим образом:

$$\tau_{D1} = \frac{\int_{\pi/2}^{\pi} \sin \phi d\phi \int_{b \cos \phi}^{a \cos \phi} \rho^2 d\rho}{\int_{\pi/2}^{\pi} d\phi \int_{b \cos \phi}^{a \cos \phi} \rho d\rho} = \frac{2}{3\pi} \frac{b^3 - a^3}{a^2 - b^2}; \quad \tau_{D2} = \frac{\int_0^{\pi/2} \sin \phi d\phi \int_{c \cos \phi}^{d \cos \phi} \rho^2 d\rho}{\int_0^{\pi/2} d\phi \int_{c \cos \phi}^{d \cos \phi} \rho d\rho} = \frac{2}{3\pi} \frac{d^3 - c^3}{d^2 - c^2}. \quad (6)$$

$$\sigma_{D2} = \frac{\int_0^{\pi/2} \cos \phi d\phi \int_{c \cos \phi}^{d \cos \phi} \rho^2 d\rho}{\int_0^{\pi/2} d\phi \int_{c \cos \phi}^{d \cos \phi} \rho d\rho} = \frac{1}{2} \frac{d^3 - c^3}{d^2 - c^2}.$$

Можно отметить, что

$$\tau_{D1} = -\frac{4}{3\pi} \sigma_{D1}, \quad \tau_{D2} = \frac{4}{3\pi} \sigma_{D2}. \quad (7)$$

По найденным координатам σ_{D1} , τ_{D1} и σ_{D2} , τ_{D2} можно определить уравнение прямой, опираясь на соотношение

$$\frac{\sigma - \sigma_{D1}}{\sigma_{D2} - \sigma_{D1}} = \frac{\tau - \tau_{D1}}{\tau_{D2} - \tau_{D1}},$$

откуда

$$\tau = \frac{\tau_{D2} - \tau_{D1}}{\sigma_{D2} - \sigma_{D1}} \sigma + \left(\tau_{D1} + \frac{\tau_{D1} - \tau_{D2}}{\sigma_{D2} - \sigma_{D1}} \sigma_{D1} \right) = k\sigma + m, \quad (8)$$

где

$$k = (\tau_{D2} - \tau_{D1}) / (\sigma_{D2} - \sigma_{D1}) = -4/3\pi(p+q)/(p-q),$$

$$m = \tau_{D1} + \frac{\tau_{D1} - \tau_{D2}}{\sigma_{D2} - \sigma_{D1}} \sigma_{D1} = -\frac{2}{3\pi} p \left(1 - \frac{p+q}{p-q} \right),$$

$$p = (a^3 - b^3) / (a^2 - b^2); \quad q = (d^3 - c^3) / (d^2 - c^2).$$

Таким образом, прочностные данные образцов с двумя разными размерами, испытанных на одноосное сжатие и растяжение, объединены в одном линейном соотношении $\tau(\sigma)$.

Так как по результатам экспериментов [14] соотношение между a и b не всегда было одним и тем же, необходимо рассмотреть еще два случая.

Первый случай $\tau \geq 0$, $a < 0$, $b < 0$, $a/b > 1$,

$$k = -\frac{4}{3\pi} \frac{p-q}{p+q}, \quad (9)$$

$$m = -\frac{2}{3\pi} p \left(1 - \frac{p+q}{p-q} \right). \quad (10)$$

Второй случай $\tau \geq 0$, $a < 0$, $b < 0$, $a/b = 1$. Здесь полукруги Мора второго квадранта совпадут, т. е. область $D1$ выродится в границу полукругов и тогда в качестве центроида можно взять $\sigma_{D1} = a/2$; $\tau_{D1} = -a/2$.

При этом

$$k = \frac{4q + 3\pi a}{3\pi(q-a)}, \quad (11)$$

$$m = -\frac{a}{2} \left(1 + \frac{4q + 3\pi a}{3\pi(q-a)} \right). \quad (12)$$

На практике возникают случаи, когда невозможно выбрать достаточное количество (как минимум три экземпляра на одноосное сжатие и три — на растяжение) стандартных цилиндрических образцов диаметром 30 мм и длинами 60 и 30 мм (образцы $P1$). Но при этом можно воспользоваться имеющимся материалом керна и сделать образцы меньшего масштаба: с диаметром 10 мм и длинами 20 и 10 мм (образцы $P2$). Затем их испытать на прессе Deben Microtest [14]. На основе изложенных математических построений оценим прочностные параметры образцов $P1$ (предел прочности на одноосное сжатие и растяжение), имея в распоряжении прочностные данные образцов $P2$ и прочностные данные хотя бы одного образца $P1$. Для этого поставим следующую задачу: зная величины b и c из ряда механических тестов над образцами $P2$, а также зная величины a_0 и d_0 хотя бы одного образца $P1$, оценить возможные величины a и d .

СПОСОБ МОДЕЛЬНОЙ ОЦЕНКИ ПРОЧНОСТНЫХ ДАННЫХ ОБРАЗЦОВ $P1$

Предположим, что на основании известных осредненных прочностных данных по образцам $P2$ (табл. 1, последняя строка) и известных a_0 и d_0 хотя бы одного образца $P1$ построено линейное соотношение (8), связывающее два центроида σ_{D1} , τ_{D1} и σ_{D2} , τ_{D2} $\tau = k\sigma + m$.

ТАБЛИЦА 1. Прочностные данные для разноразмерных образцов металавролита, МПа

Размер 1 ($P1$)			Размер 2 ($P2$)		
Номер образца	d	a	Номер образца	c	b
1	90.80	-10.10	4-1-1	52.66	-7.93
2	85.90	-9.70	4-1-2	31.89	-16.97
3	87.70	-11.60	4-1-3	25.24	-8.86
Среднее значение	88.13	-10.47	4-2-1	40.20	-8.44
			4-2-2	39.93	-18.21
			4-2-3	33.31	-10.44
			Среднее значение	37.21	-11.81

Предположим, что $a/b > 1$. Тогда воспользуемся соотношениями (9), (10). После их упрощения и деления первого на второе получим:

$$\frac{k}{m} = -\frac{(d^2 + cd + c^2)(a+b) + (a^2 + ab + b^2)(d+c)}{(a^2 + ab + b^2)(d^2 + cd + c^2)}. \quad (13)$$

Далее рассмотрим выражение (13) как квадратное уравнение относительно величины d и преобразуем его следующим образом:

$$hd^2 + gd + w = 0, \quad (14)$$

где $h = -k/m - (a+b)/(a^2 + ab + b^2)$; $g = -kc/m - (ac + bc)/(a^2 + ab + b^2) - 1$; $w = -kc^2/m - (ac^2 + bc^2)/(a^2 + ab + b^2) - c$.

Находим корни уравнения (14). Поскольку должно быть выполнено условие $d > 0$, то выбираем корень

$$d = \frac{-g + \sqrt{g^2 - 4hw}}{2h}. \quad (15)$$

Задавшись отклонением величины d на $\pm nd_0$, где d_0 — известный предел прочности на сжатие образца $P1$, $n = 0 - 0.10$, и варьируя величиной a , можно получить оценку величин a и d . Для случая, когда $a/b < 1$, выражение для d получится таким же.

Рассмотрим конкретные прочностные данные на примере образцов металаевролита (табл. 1) [14]. Смоделируем следующую ситуацию на основе имеющихся данных. Пусть удалось изготовить всего лишь один образец $P1$, им будет № 1. Также изготовлены шесть образцов $P2$.

Проведены эксперименты на одноосное сжатие и растяжение над всеми образцами, определены соответствующие пределы прочности. Для шести образцов $P2$ вычислены средние значения пределов прочности (табл. 1, последняя строка). В качестве a и d взяты значения $a = -10.1$ МПа, $d = 90.8$ МПа для образца № 1, в качестве b и c — средние значения по образцам $P2$, $b = -11.81$ МПа, $c = 37.21$ МПа.

Поскольку $a/b < 1$, по (9) и (10) вычислим коэффициенты k , m и получим линейную зависимость $\tau = 0.3061\sigma + 6.0089$, которая проходит через центры. Будем опираться на данные по каждому отдельному образцу $P2$. При каждом конкретном b и c по $P2$, используя формулу (15), задавшись отклонением $d = 90.8$ на ± 9.08 и варьируя a от 0 с отрицательным шагом 0.2, проведена модельная оценка a и d (табл. 2, столбцы 4, 5). Отметим, что по прочностным данным образцов 4-1-2 и 4-2-2 удовлетворяющую оценку величин a и d получить не удалось. То есть могут быть данные по образцам $P2$, которые не будут иметь решений при подстановке в выражение (15) либо эти решения не будут удовлетворительными.

Представим, что после проведенной оценки параметров a и d все-таки удалось изготовить и испытать еще два образца $P1$: № 2 и № 3. Тогда можно вычислить относительные погрешности оценки a и d (обозначим их соответственно δ_a и δ_d , табл. 2, столбцы 6 и 7) относительно средних значений (табл. 1, строка 6) по прочностным данным $P1$.

Можно видеть (табл. 2, последняя строка), что среднее значение $\delta_a = 20.69\%$, среднее значение $\delta_d = 5.45\%$ и сделать вывод, что полученная оценка параметров a и d является удовлетворительной.

ТАБЛИЦА 2. Оценочные значения величин a и d , их погрешности δ_a и δ_d относительно соответствующих средних значений по $P1$

Номер образца	a	d	δ_a	δ_d
	МПа		%	
4-1-1	-13.6	83.91	29.89	4.79
	-13.8	92.40	31.81	4.85
4-1-2	—	—	—	—
	-12.4	83.37	18.43	5.40
4-1-3	-12.6	89.00	20.34	0.99
	-12.8	95.20	22.25	8.02
	-13.0	83.76	24.16	4.96
4-2-1	-13.2	90.73	26.07	2.95
	-13.4	98.43	27.98	11.69
4-2-2	—	—	—	—
	-11.2	84.43	6.97	4.20
4-2-3	-11.4	90.26	8.88	2.42
	-11.6	96.66	10.79	9.68
Средняя относительная погрешность, %			20.69	5.45

Таким образом, имея в наличии предел прочности на одноосное сжатие и предел прочности на растяжение хотя бы одного образца большего размера $P1$; линейную зависимость, проходящую через центры областей $D1$ и $D2$; прочностные данные по образцам меньшего размера $P2$, можно выполнить оценку прочностных данных по недостающим образцам размера $P1$.

ВЫВОДЫ

Построены соотношения для модельной оценки прочностных данных разноразмерных образцов горных пород. Предложен подход по объединению прочностных данных (представленных в виде кругов Мора) разноразмерных образцов в единую линейную зависимость касательного напряжения от нормального напряжения. Используются интегральные формулы для определения центров, которые вычислены для плоских областей, ограниченных полукругами Мора. Рассмотрено три случая взаимного расположения полукругов Мора при растяжении: $a/b < 1$, $a/b > 1$ и $a/b = 1$. На примере металавролита показано практическое применение линейной зависимости $\tau(\sigma)$ для модельной оценки прочностных данных образцов большего размера по прочностным данным образцов меньшего размера. Получено, что величины средних относительных погрешностей по пределу прочности на растяжение и сжатие не превысили 20.69 и 5.45 % соответственно.

Предложенный подход может быть использован и для других разноразмерных горных пород и эквивалентных геоматериалов, где соотношения между пределами прочности на растяжение и одноосное сжатие удовлетворяют приведенным в этой работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 21153.2-84. Породы горные. Методы определения предела прочности при одноосном сжатии. — М., 1985.
2. ГОСТ 21153.3-85. Породы горные. Методы определения предела прочности при одноосном растяжении. — М., 1985.

3. **ГОСТ 21153.8-88.** Породы горные. Метод определения предела прочности при объемном сжатии. — М., 1988.
4. **ASTM D 7012-04.** Standard test method for compressive strength and elastic moduli of intact rock core specimens under varying states of stress and temperatures. — 8 p.
5. **ASTM D 3967-95a.** Standard test method for splitting tensile strength of intact rock core specimens. — 3 p.
6. **ASTM D 5607-02.** Standard test method for performing laboratory direct shear strength tests of rock specimens under constant normal force. — 12 p.
7. **Каркашадзе Г. Г.** Механическое разрушение горных пород. — М.: МГГУ, 2004. — 222 с.
8. **Jiang H.** Simple three-dimensional Mohr-Coulomb criteria for intact rocks, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 2018, Vol. 105. — P. 145–159.
9. **Heng S., Guo Y., Yang C., Daemen J. J., and Li Z.** Experimental and theoretical study of the anisotropic properties of shale, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 2015, Vol. 74. — P. 58–68.
10. **Cen D. and Huang D.** Direct shear tests of sandstone under constant normal tensile stress condition using a simple auxiliary device, *Rock Mech. Rock Eng.*, 2017, Vol. 50, No. 6. — P. 1425–1438.
11. **Ревуженко А. Ф.** О критериях разрушения горных пород, основанных на новой системе инвариантов тензора напряжений // ФТПРПИ. — 2014. — № 3. — С. 33–39.
12. **Микенина О. А., Ревуженко А. Ф.** Критерии предельного состояния и разрушения идеально связанных и сыпучих тел // ФТПРПИ. — 2014. — № 4. — С. 55–60.
13. **Tsoi P., Usol'tseva O., Persidskaya O., Semenov V., and Sivolap B.** About the variation of meta-siltstone deformation strength properties under the different scales, 17 *Int. Multidisciplinary Scientific Geoconf. (SGEM 2017): Proc. of Conf., Bulgaria, Albena, 29 Jun 5 Jul, 2017, Albena: STEF92 Technology Ltd., 2017. — Iss. 13, Vol. 17. — P. 19–24.*
14. **Цой П. А., Усольцева О. М., Персидская О. А., Семенов В. Н., Сиволап Б. Б.** Изменение модуля деформации и пределов прочности метаалевролита в зависимости от размера образцов // *Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук.* — 2017. — Т. 4. — № 2. — С. 187–190.

Поступила в редакцию 28/XI 2018

После доработки 24/I 2019

Принята к публикации 29/III 2019