

УДК 533.72

Течение разреженного молекулярного газа вблизи вращающейся цилиндрической поверхности

А.П. Андреев, В.Н. Попов

Поморский государственный университет, Архангельск

E-mail: popov.vasily@pomorsu.ru

В изотермическом приближении построено точное аналитическое решение задачи о вращении прямого кругового цилиндра в разреженном молекулярном газе. В режиме течения со скольжением с учетом поправки второго порядка по числу Кнудсена получено выражение для скорости разреженного молекулярного газа, увлекаемого вращающимся в нем цилиндром. В качестве основного уравнения используется обобщение БГК-модели кинетического уравнения Больцмана на случай учета вращательных степеней свободы молекул газа, а в качестве микроскопического граничного условия на поверхности цилиндра — модель диффузного отражения. Показано, что данный подход позволяет учесть зависимость скорости газа от числа Прандтля и температуры газа.

Ключевые слова: кинетическое уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения, точные аналитические решения, разреженный молекулярный газ, цилиндрическая поверхность.

ВВЕДЕНИЕ

Существующие до настоящего времени аналитические решения задач, связанные с вращением твердых тел в разреженном газе, ограничивались случаем сферической поверхности и простого бесструктурного одноатомного газа (см. [1, 2] и приведенные в них ссылки). В представленной работе построено точное аналитическое решение задачи о вращении прямого кругового цилиндра в разреженном молекулярном газе. В качестве основного уравнения используется обобщение БГК-модели кинетического уравнения Больцмана, учитывающее вращательные степени свободы молекул газа [3]. При выводе данного уравнения полагалось, что колебательные степени свободы молекул газа “заморожены”, а вращательные описываются на основе классической кинетической теории газов. Как показывают полученные в работе результаты, данный подход позволяет получить зависимость скорости газа от таких его теплофизических характеристик, как удельная теплоемкость при постоянном давлении c_p , динамическая вязкость η и коэффициент теплопроводности κ , а также позволяет установить зависимость скорости газа от его температуры. В качестве граничного условия на поверхности цилиндра использована модель диффузного отражения. Выбор модели граничного условия обусловлен тем, что для большинства технических (т. е. не обработанных специальным образом) поверхностей коэффициент диффузности близок к единице.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим прямой круговой цилиндр радиуса L , вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω_0 в слабо разреженном молекулярном газе ($0,01 < \text{Kn} < 0,4$). Здесь $\text{Kn} = \lambda / L$ — число Кнудсена, λ — средняя длина свободного пробега молекул газа, связанная с кинематической вязкостью газа ν_g соотношением $\nu_g = \lambda (2k_B T / \pi m)^{1/2}$, k_B — постоянная Больцмана, m — масса молекулы газа, T — температура газа. Полагая, что $L \ll H$, где H — длина цилиндра, будем пренебрегать краевыми эффектами. Тогда в цилиндрической системе координат, полярная ось которой совпадает с осью вращения цилиндра, скорость газа будет иметь одну отличную от нуля компоненту u_φ .

Цель работы состоит в построении профиля массовой скорости газа, увлекаемого вращающимся цилиндром, с учетом степени разреженности газа, значения числа Прандтля и его температуры.

Будем полагать, что $u_\varphi = \sqrt{m/2k_B T} \ll 1$. Тогда задача допускает линеаризацию, и функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям можно записать в виде

$$f(\rho', \mathbf{v}, \omega) = f^0(\rho', \mathbf{v}, \omega)[1 + Y(\rho, \mathbf{C}, \nu)]. \quad (1)$$

Здесь для двухатомного газа [3]

$$f^0(\rho', \mathbf{v}, \omega) = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \frac{J}{k_B T} \exp \left[-\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2k_B T} - \frac{J\omega^2}{2k_B T} \right],$$

для многоатомного (число атомов в молекуле $N \geq 3$)

$$f^0(\rho', \mathbf{v}, \omega) = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \frac{(J_1 J_2 J_3)^{1/2}}{(2\pi k_B T)^{3/2}} \exp \left[-\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2k_B T} - \frac{\sum_{i=1}^3 J_i \omega_i^2}{2k_B T} \right],$$

J_i ($i = 1 \div 3$) — компоненты момента инерции молекулы газа, \mathbf{v} и ω — поступательная и вращательная скорости молекул газа, $\rho = 3\sqrt{\pi} \text{Pr} / (4\lambda) \rho'$, $\mathbf{C} = \mathbf{v} \sqrt{m/2k_B T}$, $\nu = \omega \sqrt{J/2k_B T}$.

В выбранной системе координат $Y(\rho, \mathbf{C}, \nu)$ удовлетворяет уравнению [3]

$$\begin{aligned} C_\rho \frac{\partial Y}{\partial \rho} + Y(\rho, \mathbf{C}, \nu) + k \left[C_\varphi \frac{\partial Y}{\partial C_\rho} - C_\rho C_\varphi \frac{\partial Y}{\partial C_\varphi} \right] = \\ = \int K(\mathbf{C}, \nu; \mathbf{C}', \nu') Y(\rho, \mathbf{C}', \nu') d\Omega'. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $l = 2$, $d\Omega = 2\pi^{-3/2} \exp(-C^2 - \nu^2) \nu d\nu d^3 C$ — для двухатомного, $l = 5/2$, $d\Omega = \pi^{-3} \exp(-C^2 - \nu^2) d^3 \nu d^3 C$ — для многоатомного газов, $k = 4\text{Kn} / (3\sqrt{\pi} \text{Pr})$,

$$K(\mathbf{C}, \nu; \mathbf{C}', \nu') = 1 + 2\mathbf{C}\mathbf{C}' + \frac{1}{l+1/2} (C^2 + \nu^2 - l - 1/2)(C'^2 + \nu'^2 - l - 1/2).$$

Уравнение (2) допускает дальнейшее упрощение. Учтем, что в задачах обтекания газом твердой поверхности функция распределения пропорциональна вели-

чине проекции скорости молекул газа на касательное к обтекаемой поверхности направление C_τ [4]. В рассматриваемой задаче $C_\tau = C_\varphi$. Таким образом, можем записать

$$Y(\rho, \mathbf{C}, v) = C_\varphi Z(\rho, C_\rho) + \sum_{j=0}^{\infty} g_j(C_\theta, C_\varphi, v) \omega_j(\rho, C_\rho). \quad (3)$$

Здесь $g_j(C_\theta, C_\varphi, v)$ образуют с C_φ полную систему ортогональных в смысле скалярного произведения функций. Под ортогональностью в смысле скалярного произведения двух функций $f(\rho, \mathbf{C}, v)$ и $g(\rho, \mathbf{C}, v)$ понимается равенство нулю интеграла

$$\int f(\rho, \mathbf{C}, v) g(\rho, \mathbf{C}, v) d\Omega.$$

Подставим (3) в (2). В случае двухатомного газа домножим полученное уравнение на $v C_\varphi \exp(-C_\varphi^2 - C_z^2 - v^2)$ и проинтегрируем по C_φ и C_z от $-\infty$ до $+\infty$ и v от 0 до $+\infty$. В случае многоатомного газа домножим полученное уравнение на $C_\varphi \exp(-C_\varphi^2 - C_z^2 - v^2)$ и проинтегрируем по C_φ , C_z и v от $-\infty$ до $+\infty$. В обоих случаях приходим к уравнению

$$\mu \frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, \tau) \exp(-\tau^2) d\tau + k \left[\mu Z(x, \mu) - \frac{3}{2} \frac{\partial Z}{\partial \mu} \right], \quad (4)$$

где $x = \rho - R$, $\mu = C_\rho$.

Разложим $Z(x, \mu)$ в ряд по степеням k

$$Z(x, \mu) = kZ_1(x, \mu) + k^2Z_2(x, \mu) + \dots \quad (5)$$

При записи уравнения (5) принято во внимание то, что согласно (1) и (3) функция $Z(x, \mu)$ представляет собой поправку к локально-равновесной функции распределения, учитывающую наличие слоя Кнудсена (тонкого пристеночного слоя газа, непосредственно прилегающего к обтекаемой поверхности, толщиной порядка средней длины свободного пробега молекул газа) [4]. Поэтому в уравнении (5) отсутствует начальный член разложения $Z_0(x, \mu)$.

Подставляя (5) в (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k , приходим к уравнениям для нахождения $Z_1(x, \mu)$ и $Z_2(x, \mu)$:

$$\mu \frac{\partial Z_1}{\partial x} + Z_1(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z_1(x, \tau) \exp(-\tau^2) d\tau, \quad (6)$$

$$\mu \frac{\partial Z_2}{\partial x} + Z_2(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z_2(x, \tau) \exp(-\tau^2) d\tau + \mu Z_1(x, \mu) - \frac{3}{2} \frac{\partial Z_1}{\partial \mu}. \quad (7)$$

Учитывая (1), (3) и (5), граничные условия вдали от поверхности цилиндра записываются в виде:

$$Z_i(\infty, \mu) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Для построения граничных условий на поверхности цилиндра построим функцию распределения в объеме газа. Будем искать ее в виде

$$f^0(\rho', \mathbf{v}, \omega) = f_0(\mathbf{v}, \omega) [1 + \Psi(\rho, \mathbf{C}, v)], \quad (9)$$

где $f_0(\mathbf{v}, \omega)$ — абсолютный максвеллиан.

Перейдем к новому масштабу в конфигурационном пространстве. Переопределим безразмерную координату так, чтобы $\rho' = L\rho$ (новую безразмерную координату снова обозначим через ρ). Тогда уравнение для нахождения $\Psi(\rho, \mathbf{C}, \nu)$ запишется в виде

$$C_\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} [C_\rho^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - C_\rho C_\phi \frac{\partial \Psi}{\partial C_\phi}] = \\ = k^{-1} [\int K(\mathbf{C}, \nu; \mathbf{C}', \nu') \Psi(\rho, \mathbf{C}', \nu') d\Omega' - \Psi(\rho, \mathbf{C}, \nu)]. \quad (10)$$

Учитывая, что отношение правой части (10) к левой имеет порядок Kn^{-1} , для построения его решения можно использовать метод последовательных приближений. Разложим $\Psi(\rho, \mathbf{C}, \nu)$ в ряд по степеням k

$$\Psi(\rho, \mathbf{C}, \nu) = \psi^{(0)}(\rho, \mathbf{C}, \nu) + k\psi^{(1)}(\rho, \mathbf{C}, \nu) + k^2\psi^{(2)}(\rho, \mathbf{C}, \nu) + \dots \quad (11)$$

Подставляя (10) в (11) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k , находим:

$$\psi^{(0)}(\rho, \mathbf{C}, \nu) = p^{(0)} + 2\mathbf{C}\mathbf{U}^{(0)} + (C^2 + \nu^2 - l - 1/2)\tau^{(0)},$$

$$\psi^{(n)}(\rho, \mathbf{C}, \nu) = p^{(n)} + 2\mathbf{C}\mathbf{U}^{(n)} + (C^2 + \nu^2 - l - 1/2)\tau^{(n)} - \mathbf{C}\nabla\psi^{(n-1)}(\rho, \mathbf{C}, \nu) - \\ - \frac{1}{\rho} \left[C_\phi^2 \frac{\partial \psi^{(n-1)}}{\partial C_\rho} - C_\rho C_\phi \frac{\partial \psi^{(n-1)}}{\partial C_\phi} \right].$$

С учетом (9) функцию распределения (1) перепишем в виде

$$f(\rho, \mathbf{v}, \omega) = f_0(\mathbf{v}, \omega)[1 + \Psi(\rho, \mathbf{C}, \nu) + Y(\rho, \mathbf{C}, \nu)]. \quad (12)$$

Отсюда с учетом диффузного отражения молекул газа поверхностью цилиндра находим

$$Y(R, \mathbf{C}, \nu) = -\Psi(R, \mathbf{C}, \nu). \quad (13)$$

Подставим (3), (5), (11) в (13). Домножим полученное выражение в случае двухатомного газа на $\nu C_\phi \exp(-C_\phi^2 - C_z^2 - \nu^2)$ и проинтегрируем его по C_ϕ и C_z от $-\infty$ до $+\infty$ и ν от 0 до $+\infty$, а в случае многоатомного газа — на $C_\phi \exp(-C_\phi^2 - C_z^2 - \nu^2)$ и проинтегрируем по C_ϕ , C_z и ν от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда, приравнивая в полученных разложениях коэффициенты при одинаковых степенях k , находим граничные условия для функций $Z_1(x, \mu)$ и $Z_2(x, \mu)$ на поверхности цилиндра:

$$Z_1(0, \mu) = -2U_\phi^{(1)} + 2\mu S_{\rho\phi}^{(0)}, \quad (14)$$

$$Z_2(0, \mu) = -2U_\phi^{(2)} + 2\mu S_{\rho\phi}^{(1)} + 2\mu^2 \frac{\partial S_{\rho\phi}^{(0)}}{\partial \rho} + 2(\mu^2 - 2)S_{\rho\phi}^{(0)}. \quad (15)$$

Здесь $\mu > 0$, значения гидродинамических величин и их производных вычислены на поверхности цилиндра, а $S_{\rho\varphi}^{(i)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_{\rho}^{(i)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_{\varphi}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{U_{\varphi}^{(i)}}{\rho}$ суть компонента тензора скоростей деформации, записанная в цилиндрической системе координат.

С учетом полученных результатов решение поставленной задачи сводится к решению уравнений (6), (7) с граничными условиями (8), (14), (15).

2. ПОСТРОЕНИЕ ПРОФИЛЯ МАССОВОЙ СКОРОСТИ В ОБЪЕМЕ ГАЗА

Система уравнений (6), (7) с граничными условиями (8), (14), (15) решена с использованием точных аналитических методов, разработанных в [5]. Учитывая результаты уравнения (5), находим

$$U_{\varphi}|_S = \Omega R - kQ_1 S_{\rho\varphi}^{(0)}|_S + k^2 \left[-Q_1 S_{\rho\varphi}^{(1)} + Q_2 \frac{\partial S_{\rho\varphi}^{(0)}}{\partial \rho} - (Q_2 + \frac{9}{4}) S_{\rho\varphi}^{(0)} \right] |_S. \quad (16)$$

Здесь $Q_1 = -1,01619$ и $Q_2 = -1,26632$ — интегралы Лойалки [6], Ω — безразмерная угловая скорость вращения цилиндра, связанная с Ω_0 соотношением $\Omega R = \Omega_0 L \sqrt{m/2k_B T}$.

На гидродинамике массовая скорость газа, увлекаемого вращающимся цилиндром, описывается выражением

$$U_{\varphi} = B/\rho. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16), находим

$$B = \Omega R^2 / (1 - 2kQ_1 - 2k^2(4Q_2 + 9/4)).$$

Таким образом,

$$U_{\varphi} = \frac{\Omega R}{1 - 2kQ_1 - 2k^2(4Q_2 + 9/4)} \frac{R}{\rho}. \quad (18)$$

Переходя в (18) к размерным величинам, находим

$$u_{\varphi} = \frac{\Omega_0 L}{1 + \frac{4C_m^{(0)} \text{Kn}}{3\text{Pr}}} \left[\frac{\Omega_0 L}{1 + \frac{4C_m^{(0)} \zeta \text{Kn}}{3\text{Pr}}} \right] \frac{L}{\rho'}. \quad (19)$$

Здесь $C_m^{(0)} = (-2/\sqrt{\pi})Q_1 = 1,14665$ совпадает с коэффициентом изотермического скольжения разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности, а $\zeta = (4Q_2 + 9/4)/4Q_1^2 = 0,68157$.

Соотношение (19) определяет скорость газа, увлекаемого вращающимся цилиндром. Из (19) видно, что учет вращательных степеней свободы молекул газа приводит к зависимости скорости газа от значения числа Прандтля $\text{Pr} = c_p \eta / \kappa$ и, как следствие, от его температуры. Зависимость Pr от температуры носит достаточно сложный характер. Так, для углекислого газа CO_2 в диапазоне температур от 0 до 1200 °C значение числа Прандтля убывает от 0,7657 до 0,6386 [7]. При этом величина u_{φ} изменяется на 13,51 %. У азота N_2 с ростом температуры от 300 до 1200 °C значение числа Прандтля возрастает от 0,7258 до 0,7817, а величина u_{φ} изменяется на 5,45 %. У кислорода O_2 с ростом температуры от 0 до 600 °C значение

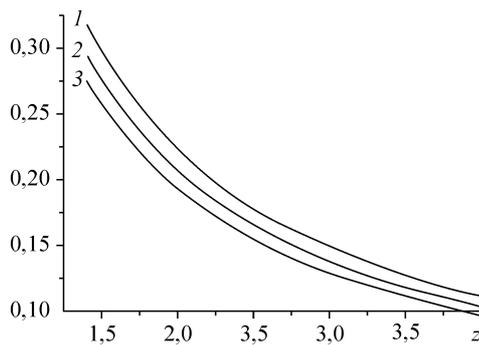


Рис. 1. Зависимость приведенной массовой скорости газа $u_\varphi/\Omega_0 L$ от безразмерного радиуса $z = \rho'/L$ для углекислого газа CO_2 при различных температурах и $\text{Kn} = 0,4$, $T = 0$ (1), 700 (2), 1200 (3) °С.

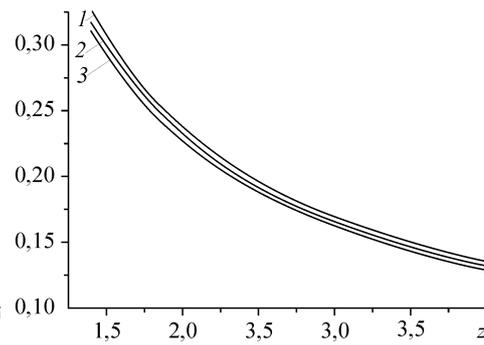


Рис. 2. Зависимость приведенной массовой скорости газа $u_\varphi/\Omega_0 L$ от безразмерного радиуса $z = \rho'/L$ для азота N_2 при различных температурах и $\text{Kn} = 0,4$, $T = 1200$ (1), 700 (2), 300 (3) °С.

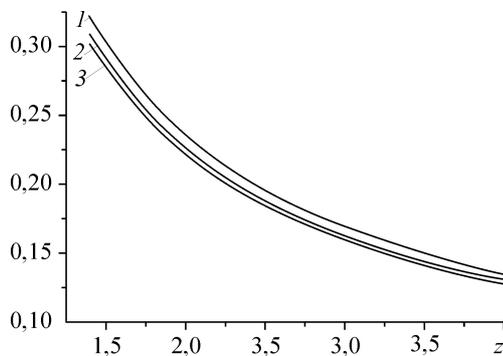


Рис. 3. Зависимость приведенной массовой скорости газа $u_\varphi/\Omega_0 L$ от безразмерного радиуса $z = \rho'/L$ для кислорода O_2 при различных температурах и $\text{Kn} = 0,4$, $T = 0$ (1), 1000 (2), 600 (3) °С.

числа Прандтля сначала убывает от 0,7720 до 0,7070, а затем при температуре от 600 до 1000 °С возрастает до 0,7301. При этом величина u_φ изменяется на 6,50 %. Отметим, что в случае простого (одноатомного) газа подобного рода зависимость отсутствует. Графики зависимостей $u_\varphi(z)$ при $z = \rho'/L$, нормированные на $\Omega_0 L$ для различных значений чисел Кнудсена, приведены на рисунках 1–3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе в режиме течения со скольжением с учетом поправки второго порядка по числу Кнудсена получено выражение для массовой скорости разреженного молекулярного газа, увлекаемого вращающимся цилиндром. Показано, что в отличие от простого (одноатомного) газа учет вращательных степеней свободы молекул приводит к зависимости скорости газа от значения числа Прандтля и температуры газа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов Л.П., Чекалов В.В. Медленное вращение сферы в ограниченном объеме разреженного газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 4. С. 117–124.
2. Поддоскин А.Б., Юшканов А.А. Вращение сферы в неограниченном газе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1997. № 1. С. 165–171.
3. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение задачи о скачке температуры в газе с вращательными степенями свободы // Теоретическая и математическая физика. 1993. Т. 95, № 3. С. 530–540.
4. Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973. 245 с.
5. Латышев А.В., Попов В.Н., Юшканов А.А. Неоднородные кинетические задачи. Метод сингулярных интегральных уравнений: Монография. Архангельск: Поморский ун-т. 2004. 266 с.
6. Loyalka S.K. The Q_n and F_n integrals for the BGK model // Transport Theory and Statistical Physics. 1975. Vol. 4. P. 55–65.
7. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1963. 708 с.

Статья поступила в редакцию 15 января 2009 г.