

УДК 534

АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ ВИБРАЦИОННОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

С. А. Герасимов

Ростовский государственный университет, 344090 Ростов-на-Дону

Представлены результаты расчета и приближенного описания средней скорости вибро-транспортирования в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, в зависимости от различных параметров, характеризующих систему.

Введение. Вибрационное перемещение [1], несомненно, особый вид движения. Нетрадиционным является принцип возбуждения этого движения. Согласно основному закону динамики системы тел внутренние силы не оказывают влияния на положение центра масс [2]. Однако они могут оказывать влияние на внешние силы [3], которыми в случае вибрационного перемещения являются силы трения [4–6] при движении устройства по поверхности или силы сопротивления [7] при движении механической системы в среде. На этом свойстве основан принцип вибрационного перемещения. Указанные работы составляют далеко не полный список теоретических результатов в этой области. Менее изучено вибрационное перемещение системы тел в среде с сопротивлением, и единственной работой, в которой сделана попытка исправить этот недостаток, является [7]. Представляет интерес изучение вибрационного перемещения в среде с сопротивлением, сила которого пропорциональна скорости, а не ее квадрату. Однако в этом случае соответствующие дифференциальные уравнения невозможно решить аналитическими методами. Поэтому могут оказаться полезными приближенные решения, позволяющие сравнительно легко оценивать эффективность вибрационного перемещения с сопротивлением, пропорциональным скорости движения системы тел относительно среды.

Схема и уравнение движения вибродвижителя. Вибродвижитель представляет собой несимметричную платформу 1 массы M , частично или полностью находящуюся в среде L , и массивное тело 2 массы m , совершающее незатухающие, необязательно гармонические колебания в системе отсчета $X'O'Y'$, связанной с платформой (рис. 1). Предполагается, что платформа и тело не перемещаются в вертикальном направлении. Поэтому имеет смысл рассматривать только силы, имеющие горизонтальные составляющие. Это сила F_{m-M} , действующая на платформу со стороны тела, сила F_{M-m} , действующая на

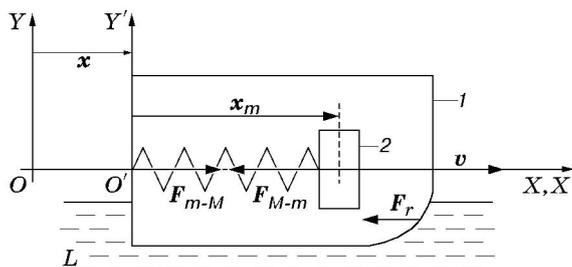


Рис. 1. Схема вибродвижителя

тело со стороны платформы, и сила сопротивления среды \mathbf{F}_r с коэффициентами сопротивления λ_+ и λ_- , соответствующими движению платформы в положительном ($v > 0$) и отрицательном ($v < 0$) направлениях оси X :

$$\mathbf{F}_r = \begin{cases} -\lambda_+ v & \text{при } v > 0, \\ -\lambda_- v & \text{при } v < 0. \end{cases}$$

Пусть \mathbf{x} — вектор, определяющий положение платформы относительно системы отсчета, связанной со средой, \mathbf{x}_m — вектор, описывающий положение тела массы m относительно платформы. Уравнения движения платформы и тела запишем в виде

$$M \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_{m-M}, \quad m \frac{d^2(\mathbf{x} + \mathbf{x}_m)}{dt^2} = \mathbf{F}_{M-m}. \quad (1)$$

С учетом условия $\mathbf{F}_{m-M} = -\mathbf{F}_{M-m}$ уравнения (1) принимают вид

$$\frac{d^2}{dt^2} [M\mathbf{x} + m(\mathbf{x} + \mathbf{x}_m)] = \mathbf{F}_r. \quad (2)$$

Уравнение (2) — закон движения центра масс системы. В настоящей работе представлены результаты решения дифференциального неоднородного уравнения движения (2).

Масштабирование уравнения. Пусть $M_0 = M + m$ — полная масса системы. При гармонических колебаниях тела массы m зависимость координаты этого тела относительно платформы от времени описывается законом $x_m = a \cos(2\pi t/T)$. В этом случае использование новых безразмерных переменных

$$\zeta = \frac{M_0}{4\pi^2 m a} x, \quad \tau = \frac{\lambda_+}{M_0} t, \quad \vartheta = \frac{M_0^2}{4\pi^2 m a \lambda_+} \frac{dx}{dt}, \quad \theta = \frac{\lambda_+}{M_0} T$$

позволяет уменьшить число величин, которыми определяется движение системы. При $a > 0$ уравнение движения принимает вид

$$\frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} + \left(\frac{1 - \delta}{2} \operatorname{sign} \left(\frac{d\zeta}{d\tau} \right) + \frac{1 + \delta}{2} \right) \frac{d\zeta}{d\tau} - \frac{1}{\theta^2} \cos \frac{2\pi\tau}{\theta} = 0, \quad (3)$$

где $\delta = \lambda_-/\lambda_+$ — параметр асимметрии системы; $\operatorname{sign} \vartheta = 1$, если $\vartheta > 0$, и $\operatorname{sign} \vartheta = -1$, если $\vartheta < 0$.

Зависимости $\zeta(\tau)$ и $\vartheta(\tau)$ при $\delta = 5$, $\theta = 1$ приведены на рис. 2. Однако более интересными представляются результаты расчета средней скорости $\langle v \rangle$ вибрационного перемещения за фиксированное число периодов n :

$$\langle v \rangle = \frac{1}{nT} \int_t^{t+nT} v(t) dt. \quad (4)$$

При больших значениях t , существенно превышающих время установления движения, средняя скорость не зависит от этого параметра, что может быть использовано при выборе величины t в численных расчетах средней скорости (4). Значение n задает только точность определения величины $\langle v \rangle$. В большинстве случаев можно ограничиться значением $n = 1$. Соответствующая безразмерная приведенная величина $\langle \vartheta \rangle$ зависит только от приведенного периода θ и параметра асимметрии δ .

Автомодельное движение. Не решая дифференциальное уравнение (3), можно обнаружить важное свойство, а именно: при очень больших ($\delta \gg 1$) и очень малых ($\delta \ll 1$) значениях параметра асимметрии δ произведения $\vartheta\theta^2$ и $\vartheta\delta\theta^2$ зависят от τ и соответственно либо от θ , либо от $\delta\theta$. Зависимость средней скорости от времени, т. е. от τ , исчезает. Большие значения параметра асимметрии ($\delta \gg 1$) соответствуют движению только в

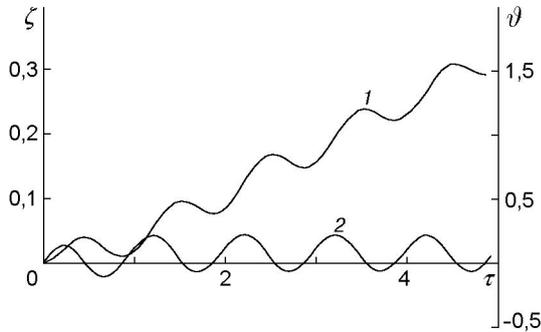


Рис. 2

Рис. 2. Зависимости координаты ζ (1) и скорости v (2) от времени τ при $\delta = 5$, $\theta = 1$

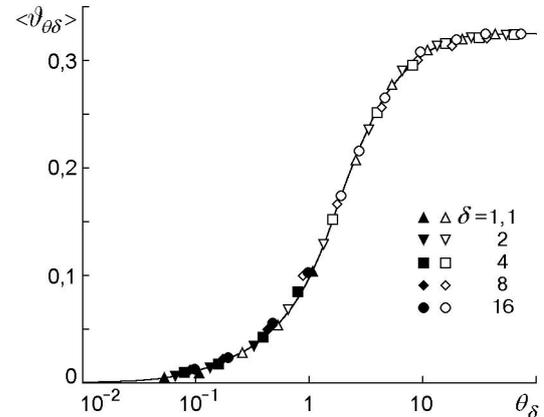


Рис. 3

Рис. 3. Автомоделная зависимость средней приведенной скорости виброперемещения $\langle v_{\theta\delta} \rangle$ от приведенного периода вибраций θ_δ и параметра δ : сплошная кривая — зависимость (5), светлые точки — решение уравнения (3) при $0,1 \leq \theta \leq 64$, темные — при $0,1 \leq \theta < 1$

положительном направлении оси X . При этом $\text{sign}(v\theta^2) = 1$, и величина $\langle v \rangle \theta^2$ должна зависеть только от θ . При очень малых значениях параметра асимметрии ($\delta \ll 1$) становится невозможным перемещение платформы в положительном направлении оси X , что соответствует условию $\text{sign}(v\theta^2) = -1$. В этом случае величина $\langle v \rangle \theta^2 \delta$ должна зависеть только от $\delta\theta$. Этот же вариант движения может быть описан формальной заменой δ на $1/\delta$. Отсюда следует, что при больших значениях θ параметр асимметрии системы δ должен присутствовать в решении дифференциального уравнения (3) только в виде комбинаций $\delta - 1$, $\delta + 1$, $1 - 1/\delta$ и $1 + 1/\delta$. Одновременная замена λ_+ на λ_- и λ_- на λ_+ при прочих равных условиях, в частности при том же значении T , соответствует движению платформы в обратном направлении с той же средней скоростью $\langle v \rangle \rightarrow -\langle v \rangle$. Комбинация $\langle v \rangle \theta^2 / (1 - 1/\delta)$ соответствует изменению направления скорости при $\lambda_- \leftrightarrow \lambda_+$ и указанных условиях. Аналогично комбинация $\theta / (1 + 1/\delta)$ соответствует симметричному преобразованию периода колебаний $T \leftrightarrow T$ при $\lambda_+ \leftrightarrow \lambda_-$. Особо следует подчеркнуть приближенный характер такого подхода. Во-первых, асимптотически точным этот метод является только при очень больших и очень малых значениях параметра асимметрии. Во-вторых, выше записаны наиболее простые комбинации величин $\langle v \rangle$, θ , δ , что, вообще говоря, свидетельствует об эмпирическом подходе к решению проблемы. В-третьих, приведенные выше аргументы относятся к так называемым преобразованиям симметрии, которые могут быть точными только для очень ограниченного ряда задач [8].

Итак, приближенная автомоделная зависимость, описывающая зависимость средней скорости виброперемещения от всех параметров системы, должна иметь вид $\langle v \rangle \theta^2 / (1 - 1/\delta) = f(\theta / (1 + 1/\delta))$, где f — некоторая функция, которую и осталось определить. Для этого достаточно представить результаты решения дифференциального уравнения (3) в виде зависимости $\langle v_{\theta\delta} \rangle = \langle v \rangle \theta^2 / (1 - 1/\delta)$ от $\theta_\delta = \theta / (1 + 1/\delta)$. Для заданных значений δ и θ_δ она позволяет не только найти значение средней скорости, но и восстановить величину приведенного периода θ . Эта зависимость представлена на рис. 3 для $0,1 \leq \theta \leq 64$ и $1,1 \leq \delta \leq 16$. Можно предложить следующий вариант аппроксимации этой зависимости,

соответствующий асимптотической зависимости средней скорости от периода колебаний и параметра асимметрии при больших значениях θ :

$$\langle \vartheta \rangle = \frac{2\delta(\delta - 1)}{\{(\delta + 1)^3 + 64[\theta\delta(\delta + 1)]^{3/2} + 31\theta^3\delta^3/2\}^{2/3}}. \quad (5)$$

Разумеется, задачу можно решить и другим способом, например аппроксимировать двумерную зависимость $\langle \vartheta \rangle$ от θ и δ . Однако такой подход справедлив только при определенных ограничениях на параметры задачи. Предложенный подход дает достаточно точные результаты, по крайней мере при всех $\theta > 1$ и любых значениях параметра асимметрии δ . При малых значениях приведенного периода ($\theta < 1$) принцип установления автомодельности существенно отличается от описанного. Следовательно, при $\theta < 1$ имеет смысл использовать аппроксимацию (5) только для оценки и качественного описания виброперемещения. Поэтому на рис. 3 приведены результаты решения уравнения движения (3) и для $\theta > 0,1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Blekhman I. I.** Vibrational mechanics. Singapore: World Scientific, 2000.
2. **Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.** Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика. М.: Наука, 1983.
3. **Nappo F.** Sulla influenza indiretta delle forze inerziali sul moto del baricentro // *Ricerca Sci. (Rendiconti)*. 1965. V. 8, N 1. P. 3–14.
4. **Sharmat R. S.** Analysis of the vibra-lo // *Mech. Mach. Theory*. 1978. V. 13, N 2. P. 208–212.
5. **Моласян А. С., Моласян С. А.** Вибрационное перемещение самотормозящейся машины // *Вибротехника*. 1989. № 63. С. 109–112.
6. **Gerasimov S. A.** A real model of vibratory-impact propulsive device // *Probl. Appl. Phys.* 2000. V. 6. P. 117, 118.
7. **Нагаев Р. Ф., Тамм Е. А.** Вибрационное перемещение в среде с квадратичным сопротивлением движению // *Машиноведение*. 1980. № 4. С. 3–8.
8. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967.

*Поступила в редакцию 30/III 2001 г.,
в окончательном варианте — 15/VI 2001 г.*