4. **Гордиенко Б. А.** Ударное выпучивание упругих систем.— Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 4.
5. **Малый В. И., Ефимов А. Б.** Потеря устойчивости стержня при продольном ударе.— ДАН СССР, 1972, т. 202, № 4.
6. **Корнев В. М.** Асимптотический анализ поведения упругих стержней при апериодическом интенсивном нагружении.— ПМТФ, 1972, № 3.
7. **Корнев В. М.** Развитие динамических форм потери устойчивости упругих систем при интенсивном нагружении на конечном отрезке времени.— ПМТФ, 1972, № 4.

Поступила 25/I 1984 г.

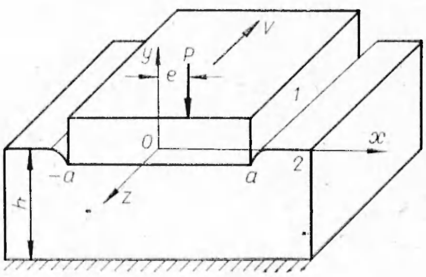
УДК 539.375.6:539.377

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ С УЧЕТОМ ИЗНОСА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В. М. АЛЕКСАНДРОВ, Е. В. КОВАЛЕНКО

(Москва)

1. Пусть в упругий (G, ν) шероховатый слой большой толщины h вдавливается массивный цилиндрический штамп, к каждой единице длины которого с эксцентриситетом e приложено усилие P, постоянное во времени. Штамп движется с постоянной скоростью V вдоль своей образующей, причем будем считать, что область контакта его со слоем имеет ширину $2a(ha^{-1} \gg 1)$ и не меняется с течением времени (см. фигуру). При этом происходит изнашивание поверхности слоя, сопровождающееся тепловыделением в области контакта. Предположим, что сам штамп не изнашивается. В области контакта возникают кулоновские силы трения [1, 2]



$$\tau_{yz} = (k_1 + k_2T)q, \tag{1.1}$$

где k_1, k_2 — постоянные; T — температура в области контакта; $q = q(x, t)$ — контактное давление.

Условие контакта тел *1* и *2* запишем в виде

$$v_1 + v_2 + v_3 = -[\delta(t) + \alpha(t)x - f(x)] \quad (|x| \leqslant a), \tag{1.2}$$

где v_1 — перемещение верхней границы упругого слоя от смятия шероховатостей; v_2 — упругая деформация поверхности слоя; v_3 — перемещение границы $y = 0$ слоя вследствие ее изнашивания; $\delta(t) + \alpha(t)x$ — жесткое перемещение штампа под действием силы P; $f(x)$ — форма его основания.

Перемещение v_1 примем линейно зависимым [3] от контактного давления q:

$$v_1 = -lq \tag{1.3}$$

(l — постоянная, характеризующая степень шероховатости соприкасающихся тел). Перемещение v_2 имеет вид [4]

$$v_2 = -\frac{1}{\pi\theta}\int_{-a}^{a} q(\xi, t)(-\ln|\xi - x| + d)\,d\xi, \quad \theta = \frac{G}{1-\nu}, \tag{1.4}$$

где $d = \ln h + a_0$; $a_0 = -0{,}527$ для $\nu = 0{,}3$.

Прежде чем приступить к определению перемещения v_3, отметим следующее обстоятельство. Обозначим через A работу сил трения τ_{yz} на пути скольжения штампа. Тогда очевидно, что она представима в форме

$$A = A_1 + A_2, \quad A_1 = n_1A, \quad A_2 = n_2A, \quad n_1 + n_2 = 1, \tag{1.5}$$

где A_1 — работа сил трения, затраченная на износ поверхности слоя; A_2 — работа сил трения, пошедшая на тепловыделение в области контакта.

С учетом последних соотношений и выражения (1.1) перемещение v_3 запишется в форме [5]

$$v_3 = -n_1V\int_0^t m[T(x, \tau)][k_1 + k_2T(x, \tau)]\,q(x, \tau)\,d\tau, \tag{1.6}$$

где m — коэффициент интенсивности износа, являющийся функцией температуры.

Таким образом, интегральное уравнение для определения контактного давления в соответствии с (1.2)—(1.4), (1.6) имеет вид

$$(1.7)\qquad lq(x,t)+\frac{1}{\pi\theta}\int\limits_{-a}^{a}q(\xi,t)(-\ln|\xi-x|+d)\,d\xi+n_1V\int\limits_0^t m[T(x,\tau)][k_1+$$
$$+k_2T(x,\tau)]\,q(x,\tau)\,d\tau=\delta(t)+\alpha(t)x-f(x)\quad(|x|\leqslant a,\ 0\leqslant t\leqslant\Theta<\infty).$$

Здесь предполагаем, что величина Θ достаточно большая, но такая, что $\delta(\Theta)+\alpha(\Theta)a$ имеет порядок перемещения в линейной теории упругости.

При решении задач теплопроводности для тел *1* и *2* будем рассматривать их неограниченными в направлении, перпендикулярном плоскости контакта. В уравнении теплопроводности пренебрежем членом $\partial T/\partial t$, поскольку процесс износа во времени протекает относительно медленно. В этом случае к интегральному уравнению (1.7) нужно добавить уравнения теплопроводности

$$(1.8)\qquad \Delta T_i(x,\ y,\ t)=0\ (i=1,\ 2,\ \Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2)$$

при граничных условиях

$$(1.9)\qquad \alpha_1\partial T_1/\partial y-\alpha_2\partial T_2/\partial y=n_2\beta V(k_1+k_2T)q\quad(y=0,\ |x|\leqslant a);$$

$$(1.10)\qquad T_1=T_2\quad(y=0,\ |x|\leqslant a);$$

$$(1.11)\qquad (-1)^i\partial T_i/\partial y+\varkappa_iT_i=0\ (y=0,\ |x|>a,\ i=1,\ 2);$$

градиенты T_i на бесконечности исчезают. Здесь $T_i(x,\ y,\ t)$ — температура в i-м теле; α_i — коэффициенты теплопроводности; $\varkappa_i$ — коэффициенты теплообмена; β — тепловой эквивалент механической работы.

Для замыкания постановки задачи к уравнениям (1.7)—(1.11) необходимо добавить условия квазиравновесия штампа на слое

$$(1.12)\qquad P=\int\limits_{-a}^{a}q(x,\ t)\,dx,\quad Pe=\int\limits_{-a}^{a}xq(x,\ t)\,dx.$$

2. Следует отметить, что данная постановка задачи приводит к необходимости решения нелинейной системы (1.7)—(1.12). Однако можно упростить задачу следующим образом.

Введем коэффициент разделения потока тепла в области контакта, предположив, что

$$(2.1)\qquad \partial T_1/\partial y=-\alpha\partial T_2/\partial y\quad(y=0,\ |x|\leqslant a).$$

Тогда задача теплопроводности (1.8)—(1.11) распадается на две независимые с граничными условиями при $y=0$:

$$(2.2)\qquad \alpha_1[1+\alpha_2(\alpha_1\alpha)^{-1}]\partial T_1/\partial y=n_2\beta V(k_1+k_2T_1)q$$
$$(|x|\leqslant a),\ -\partial T_1/\partial y+\varkappa_1T_1=0\quad(|x|>a);$$

$$(2.3)\qquad -\alpha_1\alpha[1+\alpha_2(\alpha_1\alpha)^{-1}]\partial T_2/\partial y=n_2\beta V(k_1+k_2T_2)q$$
$$(|x|\leqslant a),\ \partial T_2/\partial y+\varkappa_2T_2=0\ (|x|>a),$$

где T_i $(i=1,\ 2)$ на бесконечности исчезают.

После решения задач (1.8), (2.2), (2.3) коэффициент разделения потока тепла α должен быть найден из граничного условия (1.10), записанного в интегральной форме

$$(2.4)\qquad \overline{T}_1=\overline{T}_2,\quad \overline{T}_i(t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a}T_i(x,\ 0,\ t)\,dx.$$

Далее для упрощения предположим, что в формулах (2.2) и (2.3) вместо $q(x,\ t)$ стоит его среднее значение $\overline{q}(t)\equiv\overline{q}=P(2a)^{-1}$. Тогда заметим, что функции T_i, определяемые согласно формулам (1.8), (2.2), (2.3), а следовательно, и функции $\overline{T}_i$ (2.4) уже не будут зависеть от времени.

При помощи интегрального преобразования Фурье по продольной координате x задачи (1.8), (2.2), (2.3) приводятся к решению интегральных уравнений

$$(2.5)\qquad p_i(x)+\frac{g_2^{(i)}}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}p_i(\xi)\,d\xi\int\limits_0^\infty\frac{\cos u\varkappa_i(\xi-x)}{u+1}\,du=g_1^{(i)}$$
$$(|x|\leqslant a,\ i=1,\ 2).$$

Здесь $p_i(x)$ связаны с $T_i(x, y)$ при $y = 0$ выражением

$$(2.6)\qquad T_i(x, 0) = -\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} p_i(\xi)\,d\xi \int_0^\infty \frac{\cos u\varkappa_i(\xi - x)}{u+1}\,du,$$

а постоянные $g_1^{(i)}$ и $g_2^{(i)}$ имеют вид

$$g_1^{(i)} = \frac{n_2 k_1 \beta V \bar{q} \alpha^{1-i}}{\alpha_1\left[1 + \alpha_2(\alpha_1\alpha)^{-1}\right]},\quad g_2^{(i)} = \frac{n_2 k_2 \beta V \bar{q} \alpha^{1-i}}{\alpha_1\left[1 + \alpha_2(\alpha_1\alpha)^{-1}\right]} - \varkappa_i.$$

Интегральное уравнение (2.5) будет однозначно разрешимо в пространстве непрерывных функций $C(-a, a)$ при $k_2 > 0$, что можно установить методом [6], а решение его может быть найдено, например, при помощи разложения функции $p_i(x)$ в ряд по полиномам Лежандра [7]. Если же коэффициент $k_2 < 0$, то, очевидно, существует такой счетный набор значений параметра $\{g_2^{(ij)}\}$ ($i = 1, 2, j = 1, 2, \ldots$), при которых однородное интегральное уравнение (2.5) будет разрешимо в $C(-a, a)$, т. е. в этом случае имеется счетный набор скоростей движения штампа, при которых происходит потеря квазистационарной термоупругой устойчивости системы. Этот счетный набор постоянных $\{g_2^{(ij)}\}$ можно определить методом Ритца [8].

В случае, когда $g_2^{(i)}$ не является точкой спектра интегрального оператора, стоящего в левой части (2.5), упростим уравнение (1.7), подставляя в него вместо $T(x, t)$ среднее значение температуры $\overline{T}$, найденное из соотношений (2.5), (2.6). Будем иметь

$$lq(x, t) + \frac{1}{\pi\theta}\int_{-a}^{a} q(\xi, t)(-\ln|\xi - x| + d)\,d\xi + n_1 m(\overline{T})\,V(k_1 + k_2\overline{T})\int_0^t q(x, \tau)\,d\tau =$$
$$= \delta(t) + \alpha(t)x - f(x)\quad (|x| \leqslant a,\ 0 \leqslant t \leqslant \Theta < \infty).$$

Решение последнего интегрального уравнения при условиях (1.12) может быть построено по методике [8, 9]. Так, при достаточно большом времени износа получим

$$q(x, t) = \bar{q}(1 + 3ex/a^2),$$

$$\delta^\cdot(t) = n_1 m(\overline{T})V(k_1 + k_2\overline{T})\bar{q},\quad \alpha^\cdot(t) = 3n_1 m(\overline{T})V(k_1 + k_2\overline{T})e\bar{q}/a^2.$$

В заключение отметим, что коэффициенты n_1 и n_2 должны быть определены экспериментально для каждого конкретного вида сопряжения контактирующих тел.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бартенев Г. М., Лаврентьев В. В.** Трение и износ полимеров. Л.: Химия, 1972.
2. **Коровчинский М. В.** Локальный термический контакт при квазистационарном тепловыделении в процессе трения.— В кн.: Теория трения и износа. М.: Наука 1965.
3. **Штаерман И. Я.** Контактная задача теории упругости. М.: Гостехтеориздат, 1949.
4. **Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.** Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
5. **Александров В. М., Коваленко Е. В.** Плоские контактные задачи теории упругости для неклассических областей при наличии износа.— ПМТФ, 1980, № 3.
6. **Александров В. М., Коваленко Е. В.** Движение штампа по поверхности тонкого покрытия, лежащего на гидравлическом основании.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 4.
7. **Коваленко Е. В.** Об эффективном методе решения контактных задач для линейно-деформируемого основания с тонким усиливающим покрытием.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1979, т. 32, № 2.
8. **Коваленко Е. В.** О приближенном решении одного типа интегральных уравнений теории упругости и математической физики.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1981, т. 34, № 5.
9. **Александров В. М., Коваленко Е. В.** Об одном классе интегральных уравнений смешанных задач механики сплошных сред.— ДАН СССР, 1980, т. 252, № 2.

Поступила 28/II 1984 г.