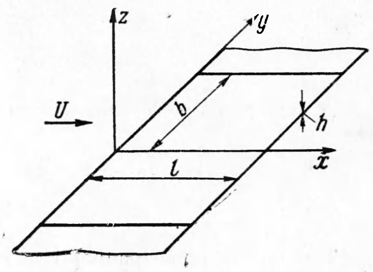
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ ЗАЩЕМЛЕННОЙ НАГРЕТОЙ ПАНЕЛИ ПРИ УЧЕТЕ ИЗБЫТОЧНОГО АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ ПО ЛИНЕАРИЗИРОВАННОЙ ТЕОРИИ

Т. Я. Герт
(Москва)

1. Рассмотрим бесконечную плоскую панель, жестко защемленную по краям $x=0, x=l$ и свободно опирающуюся на поперечные ребра $y=0, \pm b, \pm 2b, \ldots$ (фигура). Со стороны $z>0$ вдоль панели движется поток газа со сверхзвуковой скоростью U, параллельной оси x. Вследствие аэродинамического нагрева в срединной плоскости панели возникают температурные напряжения, которые при допущениях, принятых в работе [1], соответствуют формулам

$$X_x = E\alpha T X_x^\circ, \qquad Y_y = E\alpha T\left[Y_y^\circ + \frac{4p}{l^2}\left(x-\frac{l}{2}\right)^2\right] \tag{1.1}$$

Здесь E — модуль Юнга, α— коэффициент линейного температурного расширения, T — температура пограничного слоя, X_x°, Y_y°, p — безразмерные величины, зависящие от геометрических и физических характеристик конструкции.



Связь температуры со скоростью потока учитывается формулой

$$T = \frac{0.84\, cM^2}{2gc_p} \qquad \left(M=\frac{U}{c}\right) \tag{1.2}$$

где c — скорость звука, g — ускорение свободного падения, c_p — удельная теплоемкость газа.

Пусть, вследствие тех или иных причин, панель начинает колебаться. Об устойчивости колебаний панели можно судить, изучая уравнение, которому удовлетворяет малый прогиб $w(x, y; t)$ в направлении оси z

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q + N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{1.3}$$

при граничных условиях

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ при } x=0, l; \qquad w=\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, \pm b, \pm 2b, \ldots \tag{1.4}$$

Здесь $D = Eh^3/12(1-\sigma^2)$ — жесткость панели, h — толщина, σ — коэффициент Пуассона материала, μ — масса единицы площади панели, q — избыточное давление потока, $N_x = X_x h$, $N_y = Y_y h$ — усилия, изменением которых с изменением прогиба будем пренебрегать.

2. Зададимся формой прогиба; пусть

$$w(x, y; t) = f(x)\, e^{\omega t} \sin\frac{\pi y}{b} \qquad (\omega = \omega_1 + i\omega_2) \tag{2.1}$$

Здесь $f(x)$ — функция, удовлетворяющая на концах отрезка $(0, l)$ условиям

$$f=0, \quad df/dx = 0 \tag{2.2}$$

Это соответствует закреплениям панели.

Неустойчивый режим колебаний соответствует условию для частоты колебаний

$$\omega_1 > 0, \qquad \omega_2 \neq 0 \tag{2.3}$$

По линеаризированной теории избыточное давление [1]

$$q = \frac{\rho}{\sqrt{M^2-1}} \sin\frac{\pi y}{b} e^{\omega t} \int_0^x \left(U^2\frac{d^2 f}{d\xi^2} + 2U\omega\frac{df}{d\xi} + \omega^2 f\right) e^{\gamma(x-\xi)} J_0[\lambda(x-\xi)]\, d\xi \tag{2.4}$$

Здесь ρ — плотность газа

$$\gamma = -\frac{M\omega}{c(M^2-1)}, \qquad \lambda^2 = \frac{1}{M^2-1}\left[\frac{\pi^2}{b^2} - \frac{\omega^2}{c(M^2-1)}\right] \tag{2.5}$$

Подстановка (2.1), (1.1) и (2.4) в (1.3) приводит к интегродифференциальному уравнению. Чтобы освободиться от интегрального члена, воспользуемся способом, примененным в работе [1].

[1] Дун Мин-де. Некоторые задачи аэроупругости. Канд. диссертация, МГУ, 1958.

Представим стоящие под интегралом (2.4) функции $e^{\gamma(x-\xi)}$ и $J_0[\lambda(x-\xi)]$ бесконечными степенными рядами и ограничимся конечным числом членов

$$e^{\gamma(x-\xi)} = \sum_{j=0}^{m} \frac{\gamma^j (x-\xi)^j}{j!}, \qquad J_0[\lambda(x-\xi)] = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (x-\xi)^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \tag{2.6}$$

Подставим (2.6) в (2.4) и проинтегрируем по частям с учетом (2.2). Тогда

$$q = \frac{\rho}{\sqrt{M^2-1}} \sin\frac{\pi y}{b} e^{\omega t} \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \gamma^j \lambda^{2k}(j+2k)!}{2^{2k} j!(k!)^2} \left[U^2 \frac{d^2 g_{ik}}{dx^2} + 2U\omega \frac{dg_{jk}}{dx} + \omega^2 g_{jk}(x)\right]$$

Здесь (2.7)

$$g_{jk}(x) = \int_0^x \int_0^{\xi_{j+2k}} \ldots \int_0^{\xi_1} f(\xi)\, d\xi\, d\xi_1 \ldots d\xi_{j+2k} \qquad f(x) = \frac{d^{j+2k+1}}{dx^{j+2k+1}} g_{jk}(x) \tag{2.8}$$

$$g_{jk}(0) = \frac{dg_{jk}}{dx}\bigg|_{x=0} = \ldots = \frac{d^{j+2k} g_{jk}}{dx^{j+2k}}\bigg|_{x=0} = \frac{d^{j+2k+1} g_{jk}}{dx^{j+2k+1}}\bigg|_{x=0,\, l} = \frac{d^{j+2k+2} g_{jk}}{dx^{j+2k+2}}\bigg|_{x=0,\, l} = 0$$

$$(j = 0, 1, \ldots, m; \quad k = 0, 1, \ldots, n)$$

Для дальнейшего упрощения обозначим

$$g_{mn}(x) = g(x), \qquad g_{jk}(x) = \frac{d^{m+2n-j-2k} g(x)}{dx^{m+2n-j-2k}}, \qquad f(x) = \frac{d^{m+2n+1} g(x)}{dx^{m+2n+1}} \tag{2.9}$$

$$(j + 2k < m + 2n)$$

Теперь вводя безразмерную координату $x_1 = x / l$ и опуская индекс, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$\frac{d^{m+2n+5}}{dx^{m+2n+5}} g - 2\pi^2 a^2 \frac{d^{m+2n+3}}{dx^{m+2n+3}} g + (\pi^4 a^4 + r_1 \omega^\circ) \frac{d^{m+2n+1}}{dx^{m+2n+1}} g + \tag{2.10}$$

$$+ S(1+\beta^2)\left\{\left[a^2 Y_y^\circ + 4pa^2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right] \frac{d^{m+2n+1}}{dx^{m+2n+1}} g - X_x^\circ \frac{d^{m+2n+3}}{dx^{m+2n+3}} g\right\} -$$

$$- \frac{r}{\beta} \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{j+k}(1+\beta^2)^j \omega^{\circ j}[\pi^2 a^2 - (\omega^\circ/\beta)^2]^k (j+2k)!}{2^{2k} j!(k!)^2 \beta^{2(j+k)}} \left[(1+\beta^2) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{d^{m+2n-j-2k+2}}{dx^{m+2n-j-2k+2}} g + 2\sqrt{1+\beta^2}\,\omega^\circ \frac{d^{m+2n-j-2k+1}}{dx^{m+2n-j-2k+1}} g + \omega^{\circ 2} \frac{d^{m+2n-j-2k}}{dx^{m+2n-j-2k}} g\right] = 0$$

и условия

$$g(0) = \frac{dg}{dx}\bigg|_{x=0} = \ldots = \frac{d^{m+2n} g}{dx^{m+2n}}\bigg|_{x=0} = \frac{d^{m+2n+1} g}{dx^{m+2n+1}}\bigg|_{x=0,\,1} = \frac{d^{m+2n+2} g}{dx^{m+2n+2}}\bigg|_{x=0,\,1} = 0 \tag{2.11}$$

Здесь введены безразмерные величины

$$a = \frac{l}{b}, \qquad \omega^\circ = \frac{\omega l}{c}, \qquad \beta = \sqrt{M^2-1}$$

$$s = \frac{12(1-\sigma^2)\,\alpha\, 0.84 c^2 d^2}{2gc_p}, \qquad d = \frac{l}{h} \tag{2.12}$$

$$r = \frac{12(1-\sigma^2)\rho c^2 d^3}{E}, \qquad r_1 = \frac{12(1-\sigma^2)\rho_1 c^2 d^2}{E},$$

где ρ_1 — плотность материала панели.

Таким образом, приходим к краевой задаче для функции $g(x)$. Критические частоты ω° нужно искать среди собственных значений этой задачи, которые можно получить численными методами.

Поступила I IX 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Герт Т. Я. О выпучивании бесконечной плоской панели при аэродинамическом нагреве. ПМТФ, 1961, № 5.