

УДК 532.5+06

## ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ЖИДКОСТИ ПРИ МЕДЛЕННОМ ОБТЕКАНИИ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ, ПОКРЫТОЙ ВЯЗКОЙ ПЛЕНКОЙ

А. Ж. Карсян

Ростовский государственный университет путей сообщения,  
344038 Ростов-на-Дону, Россия  
E-mail: Agk16@yandex.ru

С использованием приближения Стокса аналитически решена стационарная задача об осесимметричном обтекании медленным потоком вязкой несжимаемой жидкости сплюснутого сфероида, покрытого вязкой пленкой. На границе раздела жидкостей учтено поверхностное натяжение. Представлены выражения для компонент скорости, функции тока течения. Получена формула для определения силового воздействия набегающего потока на сплюснутый сфероид.

**Ключевые слова:** вязкая жидкость, гидродинамическое воздействие, вязкая пленка, приближение Стокса, сплюснутый сфероид.

При решении ряда задач, представляющих теоретический и практический интерес, исследуется силовое воздействие набегающего потока на обтекаемые частицы. Такое воздействие необходимо учитывать при разработке различных химических технологий, в метеорологии, горном деле, при решении экологических задач, при изучении процессов осаждения частиц в средах с различной вязкостью. Одним из способов изменения такого воздействия на обтекаемые частицы является покрытие их вязкой пленкой [1, 2]. Формы обтекаемых частиц весьма разнообразны, но многие из них можно считать сфероидальными. Задачи обтекания вязкими жидкостями сплюснутых и вытянутых сфероидов рассматривались в работах [3–6]. В данной работе исследуется обтекание сплюснутого сфероида, покрытого вязкой пленкой, стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости. На поверхности раздела вязкая пленка — набегающий поток учитывается сила поверхностного натяжения. Получена формула для определения силового воздействия набегающего потока на сплюснутый сфероид, исследовано влияние наличия вязкой пленки, покрывающей сфероид, на величину силы, действующей на частицу.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим случай осесимметричного обтекания жесткого сплюснутого сфероида, покрытого вязким слоем (рис. 1), стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости, имеющей на бесконечности заданные скорость  $U_\infty = Ue_z$  ( $e_z$  — вектор, ориентированный вдоль потока в положительном направлении оси  $z$ ), плотность  $\rho^+$  и кинематическую вязкость  $\nu^+$ . Вязкая жидкость, покрывающая частицу, имеет плотность  $\rho^-$  и кинематическую вязкость  $\nu^-$ . Здесь и далее величины с индексом “–” соответствуют среде внутри слоя (внутренней среде), а величины с индексом “+” — внешней среде. Координатная поверхность  $\varepsilon = \varepsilon_0$  соответствует поверхности сплюснутого сфероида, координатная поверхность  $\varepsilon = \varepsilon_1$  — границе между набегающим потоком и вязкой

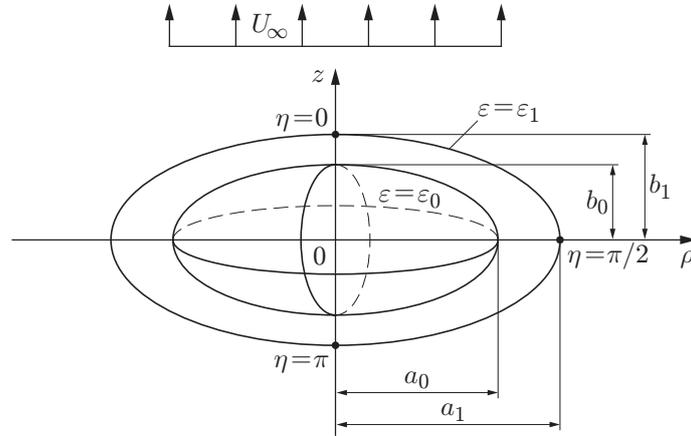


Рис. 1. Форма сплюснутой сфероидальной частицы, покрытой вязкой пленкой

пленкой, покрывающей сфероид. Процесс обтекания сплюснутого сфероида описывается в сфероидальной системе координат  $(\varepsilon, \eta, \varphi)$ , начало которой находится в центре сфероида. Сфероидальные координаты  $\varepsilon, \eta, \varphi$  связаны с декартовыми координатами  $x, y, z$  соотношениями [3]

$$x = c \operatorname{ch} \varepsilon \sin \eta \cos \varphi, \quad y = c \operatorname{ch} \varepsilon \sin \eta \sin \varphi, \quad z = c \operatorname{sh} \varepsilon \cos \eta,$$

где  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  ( $a > b$ );  $a, b$  — длины полуосей сфероида;  $0 \leq \varepsilon < \infty$ ;  $0 \leq \eta \leq \pi$ ;  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

При описании движения жидкости внутри вязкого слоя и в набегающем потоке используем стационарные уравнения движения Стокса и уравнение неразрывности

$$0 = -\nabla p^\pm + \mu^\pm \nabla^2 \mathbf{V}^\pm, \quad \operatorname{div} \mathbf{V}^\pm = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{V}^\pm (V_\varepsilon^\pm, V_\eta^\pm, V_\varphi^\pm)$  — вектор скорости;  $p^\pm$  — давление;  $\mu^\pm = \rho^\pm \nu^\pm$  — динамическая вязкость;  $V_\varepsilon^\pm(\varepsilon, \eta), V_\eta^\pm(\varepsilon, \eta)$  — компоненты вектора скорости в сфероидальной системе координат;  $V_\varphi^\pm(\varepsilon, \eta) = 0$  в силу симметрии задачи. На поверхности раздела вязкая пленка — набегающий поток действует сила поверхностного натяжения, обусловленная наличием капиллярного давления  $p_\alpha$ , причем  $p^+ = p^- + p_\alpha$ . Величина  $p_\alpha$  определяется по формуле Лапласа [7]

$$p_\alpha = \alpha(1/r_1 + 1/r_2), \quad (2)$$

где  $r_1, r_2$  — главные радиусы кривизны обтекаемой поверхности;  $\alpha$  — поверхностное натяжение на границе раздела набегающего потока и вязкой пленки. Для сплюснутого сфероида главные радиусы кривизны принимают значения  $r_1 = a = c \operatorname{ch} \varepsilon$ ,  $r_2 = b = c \operatorname{sh} \varepsilon$ .

Для задачи (1) граничные условия в сфероидальной системе координат  $(\varepsilon, \eta, \varphi)$  формулируются следующим образом:

1. На поверхности сфероида  $\varepsilon = \varepsilon_0$  выполняются условия равенства нулю нормальной и тангенциальной компонент вектора скорости внутренней среды:

$$V_\varepsilon^-(\varepsilon, \eta) = 0, \quad V_\eta^-(\varepsilon, \eta) = 0. \quad (3)$$

2. На границе раздела внешней и внутренней сред  $\varepsilon = \varepsilon_1$  выполняются кинематические условия

$$V_\varepsilon^+(\varepsilon, \eta) = V_\varepsilon^-(\varepsilon, \eta), \quad V_\eta^+(\varepsilon, \eta) = V_\eta^-(\varepsilon, \eta). \quad (4)$$

3. При переходе через поверхность раздела двух сред  $\varepsilon = \varepsilon_1$  выполняется условие непрерывности компонент тензора напряжений

$$p_{\varepsilon\varepsilon}^+(\varepsilon, \eta) = p_{\varepsilon\varepsilon}^-(\varepsilon, \eta) + p_\alpha, \quad p_{\varepsilon\eta}^+(\varepsilon, \eta) = p_{\varepsilon\eta}^-(\varepsilon, \eta), \quad (5)$$

где  $p_\alpha$  определяется по формуле (2):  $p_\alpha = \alpha(1/(c \operatorname{ch} \varepsilon) + 1/(c \operatorname{sh} \varepsilon))$ ;  $p_{\varepsilon\varepsilon}^\pm(\varepsilon, \eta)$ ,  $p_{\varepsilon\eta}^\pm(\varepsilon, \eta)$  — компоненты тензора напряжений набегающего потока и вязкой пленки.

4. На бесконечности  $\varepsilon \rightarrow \infty$  задается скорость набегающего потока:

$$\mathbf{V}^+(\varepsilon, \eta) = U \mathbf{e}_z. \quad (6)$$

**2. Решение задачи.** Решение задачи будем искать методом разделения переменных, раскладывая поля скорости и давления по полиномам Лежандра и Гегенбауэра через функцию тока Стокса. Положим

$$\lambda = \operatorname{sh} \varepsilon, \quad \mu = \cos \eta, \quad (7)$$

где  $0 \leq \lambda < \infty$ ;  $-1 \leq \mu \leq 1$ . Для течения Стокса функция тока удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных четвертого порядка  $E^4\psi = 0$  [3]. Здесь оператор  $E^4$  обозначает  $E^2(E^2)$ , поэтому уравнение  $E^4\psi = 0$  можно записать в виде

$$E^2(E^2\psi) = 0, \quad (8)$$

где

$$E^2 = \rho h_\varepsilon h_\eta \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{h_\varepsilon}{\rho h_\eta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_\eta}{\rho h_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right],$$

$\rho = c \operatorname{ch} \varepsilon \sin \eta = c \sqrt{\operatorname{sh}^2 \varepsilon + 1} \sqrt{1 - \cos^2 \eta}$ ;  $h_\varepsilon$ ,  $h_\eta$  — метрические коэффициенты [3]:  $h_\varepsilon = h_\eta = 1/(c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \varepsilon - \sin^2 \eta})$ .

В координатах  $(\lambda, \mu)$  выражение для дифференциального оператора  $E^2$  принимает вид

$$E^2 = \frac{1}{c^2(\lambda^2 + \mu^2)} \left( (\lambda^2 + 1) \frac{\partial}{\partial \lambda^2} + (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu^2} \right).$$

Решение уравнения (8) можно найти, полагая  $\psi = \psi^{(1)} + \psi^{(2)}$ , причем

$$E^2\psi^{(1)} = 0, \quad E^2\psi^{(2)} = \Omega(\lambda, \mu)$$

( $\Omega(\lambda, \mu)$  — решение уравнения  $E^2\psi^{(1)} = 0$ ). Решение однородного уравнения  $E^2\psi^{(1)} = 0$  можно получить с помощью метода разделения переменных:  $\psi^{(1)} = L(\lambda)M(\mu)$ . Подставляя это выражение в уравнение  $E^2\psi^{(1)} = 0$ , получаем

$$\frac{\lambda^2 + 1}{L(\lambda)} \frac{d^2 L(\lambda)}{d\lambda^2} + \frac{1 - \mu^2}{M(\mu)} \frac{d^2 M(\mu)}{d\mu^2} = 0. \quad (9)$$

В силу независимости переменных  $\lambda$ ,  $\mu$  каждое слагаемое в равенстве (9) должно быть постоянной величиной. Для целых положительных  $n$  эти слагаемые равны  $n(n-1)$ . В результате для функций  $M(\mu)$  и  $L(\lambda)$  получаем два обыкновенных линейных дифференциальных уравнения второго порядка

$$(\lambda^2 + 1)L''(\lambda) - n(n-1)L(\lambda) = 0; \quad (10)$$

$$(1 - \mu^2)M''(\mu) + n(n-1)M(\mu) = 0. \quad (11)$$

Уравнение (10) имеет решение  $L(\lambda) = C_{2n}I_n(\lambda) + C_{3n}K_n(\lambda)$ . Уравнение (11) представляет собой уравнение Гегенбауэра степени  $-1/2$ , а его решением являются функции Гегенбауэра первого и второго рода  $J_n(\mu)$ ,  $H_n(\mu)$ , рассмотренные подробно в [3]. В результате решения уравнений (10), (11) находим решение уравнения  $E^2\psi^{(1)} = 0$  в виде рядов по полиномам Гегенбауэра:

$$\Omega(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_{2n}I_n(\lambda) + C_{3n}K_n(\lambda))J_n(\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} (C'_{2n}I_n(\lambda) + C'_{3n}K_n(\lambda))H_n(\mu). \quad (12)$$

Функции Гегенбауэра  $H_n(\mu)$  второго рода порядка  $n \geq 2$  бесконечны в точках  $\mu = \pm 1$  на оси симметрии течения. Так как особенность такого рода не соответствует физическому смыслу задачи, то постоянные, отмеченные штрихом, должны быть равны нулю при всех значениях  $n$ , кроме того, слагаемые с многочленами Гегенбауэра при  $n = 0$  и  $n = 1$  должны отсутствовать, поскольку при наличии этих слагаемых тангенциальные скорости в точках  $\mu = \pm 1$  бесконечны [3]. В результате решение однородного уравнения (12) принимает вид

$$\Omega(\lambda, \mu) = \sum_{n=2}^{\infty} (C_{2n}I_n(\lambda) + C_{3n}K_n(\lambda))J_n(\mu). \quad (13)$$

Решение неоднородного уравнения  $E^2\psi^{(2)} = \Omega(\lambda, \mu)$  будем искать методом разделения переменных с помощью подстановки

$$\psi^{(2)}(\lambda, \mu) = \sum_{n=2}^{\infty} (g_n(\lambda))J_n(\mu). \quad (14)$$

Применяя оператор  $E^2$  к выражению (14) и учитывая, что  $J_n(\mu)$  удовлетворяет уравнению Гегенбауэра (11), для  $g_n(\lambda)$  получаем уравнение

$$(\lambda^2 + 1) \frac{\partial^2 g_n(\lambda)}{\partial \lambda^2} - n(n-1)g_n(\lambda) = C_{2n}I_n(\lambda) + C_{3n}K_n(\lambda),$$

частное решение которого имеет вид [3]

$$g_n(\lambda) = C_{1n}U_n(\lambda) + C_{4n}V_n(\lambda).$$

Подставляя  $g_n(\lambda)$  в (14), получаем

$$\psi^{(2)}(\lambda, \mu) = \sum_{n=2}^{\infty} (C_{1n}U_n(\lambda) + C_{4n}V_n(\lambda))J_n(\mu).$$

В результате полное решение для функции тока в сфероидальных координатах принимает вид

$$\psi(\lambda, \mu) = \sum_{n=2}^{\infty} (C_{2n}I_n(\lambda) + C_{3n}K_n(\lambda) + C_{1n}U_n(\lambda) + C_{4n}V_n(\lambda))J_n(\mu).$$

Компоненты вектора скорости внешней и внутренней сред определяем по формулам [3]

$$v_\varepsilon = -\frac{h_\eta}{\rho} \frac{\partial \psi(\varepsilon, \eta)}{\partial \eta}, \quad v_\eta = \frac{h_\varepsilon}{\rho} \frac{\partial \psi(\varepsilon, \eta)}{\partial \varepsilon}. \quad (15)$$

В соответствии с (7) и с учетом соотношения  $dJ_n(\lambda)/d\lambda = -P_{n-1}(\lambda)$ , справедливого при  $n \geq 1$  [3], выражения для компонент вектора скорости (15) для внешней и внутренней сред имеют вид

$$\begin{aligned} V_\lambda^\pm(\lambda, \mu) &= -\frac{1}{c\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \frac{1}{c\sqrt{\lambda^2 + 1}} P_{n-1}(\mu)\psi^\pm(\lambda), \\ V_\mu^\pm(\lambda, \mu) &= \frac{1}{c\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \frac{1}{c\sqrt{1 - \mu^2}} J_n(\mu) \frac{d\psi^\pm(\lambda)}{d\lambda}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\psi^+$ ,  $\psi^-$  — функции тока рассматриваемых внешнего и внутреннего течений соответственно;  $P_n(\mu)$  — функция Лежандра первого рода;  $V_\lambda^\pm(\lambda, \mu)$ ,  $V_\mu^\pm(\lambda, \mu)$  — компоненты вектора скорости внутри вязкой пленки и в набегающем потоке.

Компоненты тензора напряжений внешней и внутренней сред определяем по формулам [3]

$$\begin{aligned} p_{\varepsilon\varepsilon} &= -p + 2\mu \left( \frac{1}{H_\varepsilon} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{V_\eta}{H_\varepsilon H_\eta} \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \eta} \right), \\ p_{\varepsilon\eta} &= \mu \left( \frac{1}{H_\eta} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \eta} + \frac{1}{H_\varepsilon} \frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} - \frac{V_\varepsilon}{H_\varepsilon H_\eta} \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \eta} - \frac{V_\eta}{H_\varepsilon H_\eta} \frac{\partial H_\eta}{\partial \varepsilon} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $H_\varepsilon, H_\eta$  — параметры Ламе:

$$H_\varepsilon = H_\eta = c\sqrt{\operatorname{ch}^2 \tau - \sin^2 \eta}. \quad (18)$$

В соответствии с (7) и с учетом соотношения (18) выражения для компонент тензора напряжений (17) для внешней и внутренней сред записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} p_{\lambda\lambda}^\pm &= -p^\pm + \frac{2\mu^\pm}{c\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \left( \frac{\partial V_\lambda^\pm}{\partial \lambda} + V_\mu^\pm \frac{-\mu\sqrt{1 - \mu^2}}{\lambda^2 + \mu^2} \right), \\ p_{\lambda\mu}^\pm &= \mu^\pm \frac{1}{c\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \left( \frac{\partial V_\lambda^\pm}{\partial \mu} + \frac{\partial V_\mu^\pm}{\partial \lambda} + V_\lambda^\pm \frac{\mu\sqrt{1 - \mu^2}}{\lambda^2 + \mu^2} - V_\mu^\pm \frac{\lambda\sqrt{1 + \lambda^2}}{\lambda^2 + \mu^2} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда граничные условия (3)–(6) в соответствии с (7) принимают вид

$$\begin{aligned} V_\lambda^-(\lambda, \mu) &= 0, & V_\eta^-(\lambda, \mu) &= 0, & \lambda &= \lambda_0, \\ V_\lambda^+(\lambda, \mu) &= V_\lambda^-(\lambda, \mu), & V_\mu^+(\lambda, \mu) &= V_\mu^-(\lambda, \mu), & \lambda &= \lambda_1, \\ p_{\lambda\lambda}^+(\lambda, \mu) &= p_{\lambda\lambda}^-(\lambda, \mu) + p_\alpha, & p_{\lambda\mu}^+(\lambda, \mu) &= p_{\lambda\mu}^-(\lambda, \mu), & \lambda &= \lambda_1; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\mathbf{V}^+(\lambda, \mu) = U\mathbf{e}_z, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Здесь  $p_\alpha = \alpha(1/(c\lambda) + 1/(c\sqrt{1 + \lambda^2}))$ ;  $\lambda_0 = \operatorname{sh} \varepsilon_0$ ;  $\lambda_1 = \operatorname{sh} \varepsilon_1$ ;  $p_{\lambda\lambda}^\pm(\lambda, \mu)$ ;  $p_{\lambda\mu}^\pm(\lambda, \mu)$  — компоненты тензора напряжений внутри вязкой пленки и в набегающем потоке.

В частном случае  $n = 2$  решение однородного уравнения  $E^2\psi^{(1)} = 0$  для внешней и внутренней сред имеет вид

$$\Omega(\lambda, \mu) = (C_{22}^\pm(\lambda - (\lambda^2 + 1) \operatorname{arctg} \lambda)/2 + C_{32}^\pm(\lambda^2 + 1))J_2(\mu),$$

при этом  $I_2(\lambda) = \lambda^2 + 1$ ,  $K_2(\lambda) = (\lambda - (\lambda^2 + 1) \operatorname{arctg} \lambda)/2$ . Решение неоднородного уравнения  $E^2\psi^{(2)} = \Omega(\lambda, \mu)$  для внешней и внутренней сред записывается следующим образом:

$$\psi^{(2)}(\lambda, \mu) = (-C_{12}^\pm\lambda/2 + C_{42}^-( -5\lambda^2 - 1)(1 + \lambda^2)/8)J_2(\mu),$$

причем  $U_2(\lambda) = -\lambda/2$ ,  $V_2(\lambda) = (-5\lambda^2 - 1)(1 + \lambda^2)/8$ ,  $C_{42}^- = C_{42}^-/10$ .

В результате полное решение для функции тока внешней и внутренней сред имеет вид

$$\begin{aligned} \psi^\pm(\lambda, \mu) &= J_2(\mu)(-C_{12}^\pm\lambda/2 + C_{22}^\pm(\lambda - \operatorname{arctg} \lambda(1 + \lambda^2))/2 + \\ &\quad + C_{32}^\pm(1 + \lambda^2) + C_{42}^-( -5\lambda^2 - 1)(1 + \lambda^2)/8). \end{aligned} \quad (22)$$

Выполним замену  $C_1 = C_{12}/2$ ,  $C_2 = C_{22}/2$ ,  $C_3 = C_{32}/2$ ,  $C_4 = C_{42}/2$ . В соответствии с этими обозначениями функция тока (22) записывается в виде

$$\psi^\pm(\lambda, \mu) = J_2(\mu)(-C_1^\pm\lambda + C_2^\pm(\lambda - \operatorname{arctg} \lambda(1 + \lambda^2)) + C_3^\pm(1 + \lambda^2) + C_4^-( -5\lambda^2 - 1)(1 + \lambda^2)/4),$$

где  $J_2(\mu) = (1 - \mu^2)/2$  — полином Гегенбауэра;  $\psi^+(\lambda, \mu)$ ,  $\psi^-(\lambda, \mu)$  — функции тока внешней и внутренней сред соответственно. На бесконечности ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) выполняется условие

$$\psi^+(\lambda, \mu) \rightarrow Uc^2(\lambda^2 + 1)(1 - \mu^2)/2,$$

из которого следует, что  $C_3^+ = -Uc^2$ . В результате решение для функции тока внешней среды  $\lambda \in [\lambda_1, \infty]$  принимает вид

$$\psi^+(\lambda, \mu) = (1 - \mu^2)(-C_1^+ \lambda + C_2^+(\lambda - \operatorname{arctg} \lambda(1 + \lambda^2)) - Uc^2(1 + \lambda^2))/2, \quad (23)$$

решение для функции тока внутренней среды  $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$  записывается в виде

$$\begin{aligned} \psi^-(\lambda, \mu) = (1 - \mu^2)(-C_1^- \lambda + C_2^-(\lambda - \operatorname{arctg} \lambda(1 + \lambda^2)) + \\ + C_3^-(1 + \lambda^2) + C_4^-(-5\lambda^2 - 1)(1 + \lambda^2)/4)/2. \end{aligned} \quad (24)$$

Компоненты вектора скорости определяются из (16), а компоненты тензора напряжений — из (19) при  $n = 2$  с учетом условия  $P_1(\mu) = \mu$ .

Используя граничные условия (20), (21), составим систему уравнений для определения неизвестных постоянных  $C_1^\pm, C_2^\pm, C_3^-, C_4^-$ . Используя эти постоянные, определим функции тока для внешней и внутренней сред (23), (24):

— на поверхности сплюснутого сфероида  $\lambda = \lambda_0$

$$-C_1^- \lambda + C_2^-(\lambda - \operatorname{arctg} \lambda(1 + \lambda^2)) + C_3^-(1 + \lambda^2) + C_4^-(-5\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)/4 = 0,$$

$$-C_1^- + 2C_2^-(1 - \lambda \operatorname{arctg} \lambda) + 2\lambda C_3^- + C_4^-(-12\lambda - 20\lambda^3)/4 = 0;$$

— на границе раздела вязкая пленка — набегающий поток  $\lambda = \lambda_1$

$$-C_1^+ \lambda + C_2^+(\lambda - \operatorname{arctg} \lambda(1 + \lambda^2)) + C_3^+(1 + \lambda^2) =$$

$$= -C_1^- \lambda + C_2^-(\lambda - \operatorname{arctg} \lambda(1 + \lambda^2)) + C_3^-(1 + \lambda^2) + C_4^-(-5\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)/4,$$

$$-C_1^+ + 2C_2^+(1 - \lambda \operatorname{arctg} \lambda) + 2\lambda C_3^+ =$$

$$= -C_1^- + 2C_2^-(1 - \lambda \operatorname{arctg} \lambda) + 2\lambda C_3^- + C_4^-(-12\lambda - 20\lambda^3)/4,$$

$$\frac{2\mu^+}{c\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \left( \frac{\partial V_\lambda^+}{\partial \lambda} + V_\mu^+ \frac{-\mu\sqrt{1 - \mu^2}}{\lambda^2 + \mu^2} \right) + \alpha \left( \frac{1}{c\lambda} + \frac{1}{c\sqrt{1 + \lambda^2}} \right) =$$

$$= \frac{2\mu^-}{c\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \left( \frac{\partial V_\lambda^-}{\partial \lambda} + V_\mu^- \frac{-\mu\sqrt{1 - \mu^2}}{\lambda^2 + \mu^2} \right),$$

$$\mu^+ \frac{1}{c\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \left( \frac{\partial V_\lambda^+}{\partial \mu} + \frac{\partial V_\mu^+}{\partial \lambda^+} + V_\lambda^+ \frac{\mu\sqrt{1 - \mu^2}}{\lambda^2 + \mu^2} - V_\mu^+ \frac{\lambda\sqrt{1 + \lambda^2}}{\lambda^2 + \mu^2} \right) =$$

$$= \mu^- \frac{1}{c\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \left( \frac{\partial V_\lambda^-}{\partial \mu} + \frac{\partial V_\mu^-}{\partial \lambda^-} + V_\lambda^- \frac{\mu\sqrt{1 - \mu^2}}{\lambda^2 + \mu^2} - V_\mu^- \frac{\lambda\sqrt{1 + \lambda^2}}{\lambda^2 + \mu^2} \right).$$

Силу, действующую на сплюснутый, покрытый пленкой сфероид, обтекаемый потоком жидкости, определим по формуле [3]

$$W_z = 8\pi\mu c \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda(\psi - \psi_\infty)}{\rho^2}, \quad (25)$$

где  $\psi$  — функция тока Стокса рассматриваемого течения;  $\psi_\infty = -U\rho^2/2$  — функция тока, соответствующая течению жидкости на бесконечности;  $\rho = c\sqrt{\lambda^2 + 1}\sqrt{1 - \mu^2}$ . Подставляя в формулу (25) найденное значение функции тока рассматриваемого внешнего течения (23), получаем формулу для определения силового воздействия набегающего потока на сплюснутый сфероид, покрытый вязкой пленкой:

$$W_z = 4\pi\mu_1(-C_1^+/c_1). \quad (26)$$

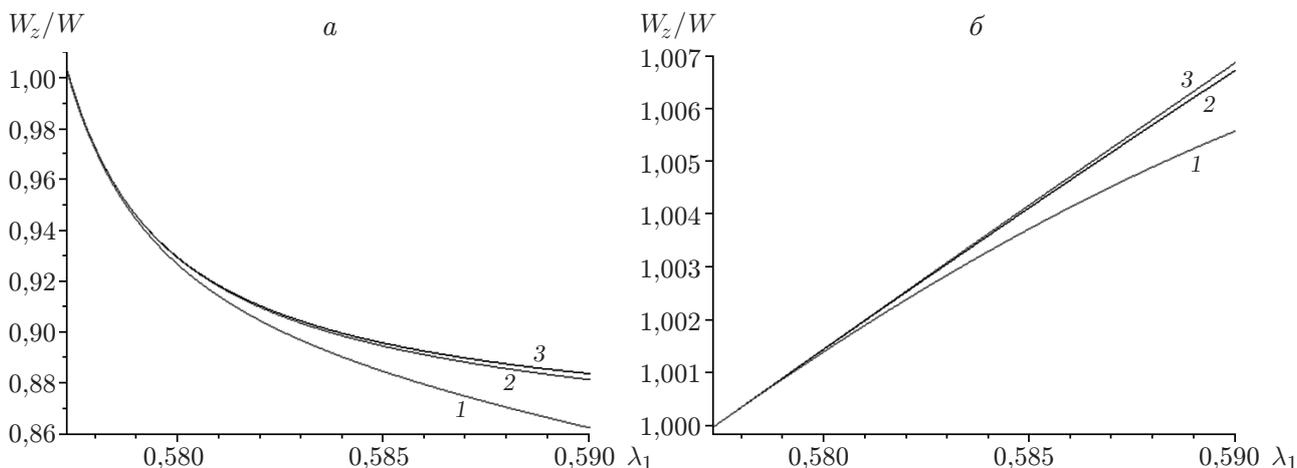


Рис. 2. Зависимость отношения  $W_z/W$  от параметра  $\lambda_1$ :  
*a* —  $\mu_1 = 0,0018$  кг/(м·с),  $\mu_2 = 0,000\,018$  кг/(м·с), *б* —  $\mu_1 = 0,000\,018$  кг/(м·с),  
 $\mu_2 = 0,0018$  кг/(м·с); 1 —  $U = 0,01$  м/с, 2 —  $U = 0,05$  м/с, 3 —  $U = 0,10$  м/с

**3. Анализ полученных результатов.** С использованием формулы (26) можно определить гидродинамическую силу, действующую на сплюснутый сфероид, покрытый вязкой пленкой, со стороны набегающего потока, с учетом вязкости внешней и внутренней сред, скорости набегающего потока и толщины пленки. В случае если  $\lambda_1 \rightarrow \lambda_0$  (т. е. толщина пленки стремится к нулю), формула (26) переходит в известное выражение для сплюснутого сpherоида, представленное в [3]:  $W = 8\pi\mu_1 cU/(\lambda_0 - \operatorname{arccotg} \lambda_0(\lambda_0^2 - 1))$ .

Чтобы определить, какое влияние оказывает вязкая пленка, покрывающая сфероид, на величину силы, действующей на частицу, проведем численный анализ полученного аналитического решения. В качестве примера рассмотрим сплюснутую сфероидальную частицу с размерами  $a_0 = 0,02$  м,  $b_0 = 0,01$  м ( $\lambda_0 = 0,5773$ ), обтекаемую стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Параметр  $\lambda_1$  изменяется в интервале от  $\lambda_0$  до значения  $\lambda_1 = 0,5891$  ( $\lambda_1 = \lambda_0$  означает, что толщина пленки равна нулю),  $\alpha = 0,0757$  Н/м. На рис. 2 представлена зависимость от параметра  $\lambda_1$  отношения силы  $W_z$ , действующей со стороны набегающего потока на сплюснутую сфероидальную частицу, покрытую вязкой пленкой, к силе  $W$ , действующей на сплюснутую сфероидальную частицу в отсутствие пленки, для случая воздушной пленки, покрывающей тело, обтекаемое потоком воды (рис. 2, *a*), и для случая водяной пленки, покрывающей тело, обтекаемое воздушным потоком (рис. 2, *б*). Видно, что в случае, когда вязкость внутренней среды меньше вязкости внешней среды ( $\mu_2 < \mu_1$ ,  $\mu_1 = 0,0018$  кг/(м·с),  $\mu_2 = 0,000\,018$  кг/(м·с)), увеличение толщины пленки приводит к уменьшению величины силы, действующей на частицу (см. рис. 2, *a*). В случае, когда вязкость внешней среды меньше вязкости внутренней среды ( $\mu_1 < \mu_2$ ,  $\mu_1 = 0,000\,018$  кг/(м·с),  $\mu_2 = 0,0018$  кг/(м·с)), увеличение толщины пленки приводит к увеличению силы, действующей на частицу (см. рис. 2, *б*).

**Заключение.** В работе аналитически решена задача об обтекании сплюснутого сpherоида, покрытого вязкой пленкой, стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Получена формула для определения силового воздействия набегающего потока на сплюснутый сpherоид, покрытый вязкой пленкой, с учетом динамической вязкости внешней  $\mu_1$  и внутренней  $\mu_2$  сред, скорости набегающего потока  $U$  и поверхностного натяжения на границе раздела основного потока и вязкой пленки  $\alpha$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Лойцянский Л. Г.** Об изменении сопротивления тел путем заполнения пограничного слоя жидкостями с другими физическими константами // Прикл. математика и механика. 1942. Т. 6. С. 95–100.
2. **Бувич Ю. А., Гупало Ю. П.** Обтекание тела, покрытого жидкой пленкой // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 5. С. 11–13.
3. **Хаппель Дж.** Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. М.: Мир, 1976.
4. **Ламб Г.** Гидродинамика. М.: Гостехтеоретиздат, 1947.
5. **Дудин И. В., Нариманов Р. К.** Сопротивление при медленном движении эллипсоида // Изв. Том. политехн. ун-та. 2004. Т. 307, № 3. С. 17–21.
6. **Замышляев А. А., Шрагер Г. Р.** Обтекание сфероидов потоком жидкости при умеренных числах Рейнольдса // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2004. № 3. С. 25–33.
7. **Левич В. Г.** Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959.

*Поступила в редакцию 1/II 2013 г.,  
в окончательном варианте — 10/VII 2013 г.*

---