ПМТФ, № 6, 1961

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Л. М. Куршин

(Новосибирск)

В работе предлагается постановка задачи устойчивости стержня в условиях ползучести, основанная на исследовании движения стержня при воздействии на него возмущений. Отличие от постановки [1] состоит в характере возмущающих воздействий.

§ 1. Рассмотрим шарнирно опертый стержень прямоугольного сечения, нагруженный постоянной продольной силой T.

Пусть уравнение состояния при ползучести имеет вид [1]

$$\dot{p} = A\sigma^n p^{-\alpha} \qquad \left(p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}\right) \tag{1.1}$$

где σ — напряжение, p — деформация ползучести, ε — полная деформация, E — модуль упругости. Точкой обозначена производная по времени. Интегрируя (1.1), имеем

$$p^{\alpha+1} = (\alpha + 1) \int_0^t A\sigma^n \, dt \tag{1.2}$$

Для центра сечения

$$p_0^{\alpha+1} = (\alpha + 1) A\sigma_0^n t \qquad \left(\sigma_0 = \frac{T}{F}, \ F \text{ — площадь сечения}\right) \tag{1.3}$$

Введем в (1.2)

$$\sigma = \sigma_0 + \delta\sigma$$

Здесь $\delta\sigma$ — часть напряжений, неравномерно распределенная по сечению и обусловленная прогибами стержня. При малых прогибах $\delta\sigma$ малы по сравнению с σ_0. Проводя линеаризацию в (1.2), получим

$$p = [A(1+\alpha)\sigma_0^n t]^{\frac{1}{\alpha+1}} \left(1 + \frac{1}{(1+\alpha)t} \int_0^t \frac{n\delta\sigma}{\sigma_0} dt\right)$$

или с учетом (1.3)

$$p = p_0 + An\sigma_0^{n-1} p_0^{-\alpha} \int_0^t \delta\sigma \, dt \tag{1.4}$$

Вводя в (1.4)

$$p = \varepsilon_0 - zw_{xx} - \frac{1}{E}(\sigma_0 + \delta\sigma)$$

умножая на z и интегрируя по сечению с учетом уравнения равновесия

$$\int_F \delta\sigma z \, dF = Tw \tag{1.5}$$

получим интегральное уравнение

$$Iw_{xx} + \frac{T}{E} w + An\sigma^{n-1} p^{-\alpha} T \int_0^t w \, dt = 0 \tag{1.6}$$

где I — момент инерции сечения. Здесь и ниже, где это не может вызвать недоразумений, индексы (0) опускаются, и обозначения p и σ относятся к соответствующим величинам по оси стержня.

Полагая

$$w = \tau \sin \frac{\pi x}{l}, \qquad T_э = \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \qquad \sigma^\circ = \frac{T}{T_э} \tag{1.7}$$

и переходя от переменной t к переменной p согласно (1.1), получим из (1.6) интегральное уравнение Вольтерра

$$(1 - \sigma^\circ)\,\tau(p) = \frac{En\sigma^\circ}{\sigma}\, p^{-\alpha} \int_0^p p_1{}^\alpha \tau(p_1)\, dp_1 \tag{1.8}$$

имеющее при $\sigma^\circ < 1$ только тривиальное решение $\tau = 0$.

Таким образом, согласно уравнению (1.8) стержень при $T < T_э$ устойчивости не теряет.

Обратимся к постановке задачи устойчивости стержня, предложенной в работе [1]. Варьируя уравнение состояния (1.1), имеем

$$\delta\dot{p} = An\sigma^{n-1}p^{-\alpha}\delta\sigma - A\alpha\sigma^n p^{-\alpha-1}\delta p \qquad \left(\delta p = \delta\varepsilon - \frac{1}{E}\,\delta\sigma\right) \tag{1.9}$$

Положим $\delta\varepsilon = -zw_{xx}$, тогда, умножая (1.9) на z и интегрируя по сечению с учетом (1.5), получим уравнение [1]

$$I\dot{w}_{xx} + \frac{T}{E}\,\dot{w} + A\alpha\sigma^n p^{-\alpha-1}\left(Iw_{xx} + \frac{T}{E}\,w\right) + An\sigma^{n-1}Tp^{-\alpha}w = 0 \tag{1.10}$$

Отметим, что уравнение в вариациях (1.9) означает линеаризацию уравнения состояния (1.1) по сечению стержня, обусловленную малостью прогибов. Поэтому p и w в уравнении (1.10) относятся к одному и тому же моменту времени, т. е. в (1.10) должна учитываться зависимость от времени не только прогиба w, но и коэффициентов уравнения. Покажем, что уравнение (1.10) получается при повышении порядка уравнения (1.6).

Дифференцируя (1.6) по времени с учетом переменности p, получим

$$I\dot{w}_{xx} + \frac{T}{E}\,\dot{w} + An\sigma^{n-1}Tp^{-\alpha}w - \alpha nAT\sigma^{n-1}p^{-\alpha-1}\dot{p}\int_0^t w\,dt = 0$$

Исключая отсюда интеграл с помощью (1.6) и учитывая (1.1), придем к уравнению (1.10). Уравнение (1.10) на порядок выше, чем уравнение (1.6). За счет этого, кроме решения $w = 0$, уравнение (1.10) имеет и некоторый нетривиальный интеграл.

С учетом (1.7) получим из (1.10) уравнение для τ

$$(1 - \sigma^\circ)\,\dot{\tau} + \alpha A\sigma^n p^{-\alpha-1}\left[1 - \left(1 + \frac{Enp}{\alpha\sigma}\right)\sigma^\circ\right]\tau = 0 \tag{1.11}$$

Учитывая (1.1), перейдем от переменной t к переменной p. Уравнение (1.11) запишется в виде

$$(1 - \sigma^\circ)\,\frac{d\tau}{dp} + \frac{\alpha}{p}\left[1 - \left(1 + \frac{Enp}{\alpha\sigma}\right)\sigma^\circ\right]\tau = 0 \tag{1.12}$$

Нетривиальный интеграл этого уравнения будет

$$\tau = Cp^{-\alpha}e^{kp} \qquad \left(k = \frac{\sigma^\circ}{1 - \sigma^\circ}\,\frac{En}{\sigma}\right) \tag{1.13}$$

Решение (1.13) не является решением уравнения (1.8) и соответствует некоторому возмущенному движению стержня. В статье Ю. Н. Работнова [2] показано, что прогиб (1.13) реализуется после воздействия на сжатый стержень некоторой поперечной нагрузки. Границе устойчивости [1]

$$kp = \alpha \tag{1.14}$$

соответствует минимум функции (1.13).

Для дальнейшего представляет интерес рассмотреть те результаты, к которым можно прийти при дальнейшем повышении порядка уравнения (1.6).

Рассмотрим задачу продольного изгиба в условиях ползучести шарнирно опертого стержня при некотором начальном прогибе w°. Полагая

$$p = \varepsilon_0 - z\,(w_{xx} - w_{xx}{}^\circ) - \frac{1}{E}(\sigma_0 + \delta\sigma)$$

из уравнения (1.4) получим интегральное уравнение

$$I\,(w_{xx} - w_{xx}{}^\circ) + \frac{T}{E}\,w + AnT\sigma^{n-1}p^{-\alpha}\int\limits_0^t w\,dt = 0 \qquad (1.15)$$

Используя (1.7) и полагая $w^\circ = \tau^\circ \sin \pi x / l$, получим

$$\tau^\circ - (1 - \sigma^\circ)\,\tau + An\sigma^{n-1}\sigma^\circ E p^{-\alpha}\int\limits_0^t \tau\,dt = 0 \qquad (1.16)$$

решение которого, если ввести вместо переменной t переменную p, будет

$$\tau = \frac{\alpha\tau^\circ}{1 - \sigma^\circ}\,p^{-\alpha}e^{kp}\int\limits_0^p p_1{}^{\alpha-1}e^{-kp_1}\,dp_1 \qquad (1.17)$$

Отметим сделанную в работе [3] оценку границы устойчивости стержня на основе решения (1.17), полученного в [3] несколько иным путем. В работе [3] предлагается считать стержень неустойчивым тогда, когда скорость роста прогиба (1.17) начинает увеличиваться ($\ddot{\tau} \geqslant 0$).

Продифференцируем уравнение (1.15) с учетом переменности p и условия (1.1) и из полученного уравнения исключим с помощью (1.15) интеграл. Получим уравнение

$$I\dot{w}_{xx} + \frac{T}{E}\,\dot{w} + A\alpha\sigma^n p^{-\alpha-1}\Big[I\,(w_{xx} - w_{xx}{}^\circ) + \frac{T}{E}\,w\Big] + An\sigma^{n-1}Tp^{-\alpha}w = 0 \quad (1.18)$$

Освобождаясь с помощью дифференцирования от w°, получим

$$I\ddot{w}_{xx} + \frac{T}{E}\,\ddot{w} + A\sigma^n p^{-\alpha-1}\Big[(1 + 2\alpha)\Big(I\dot{w}_{xx} + \frac{T}{E}\,\dot{w}\Big) + \frac{np}{\sigma}\,T\dot{w}\Big] +$$
$$+ A^2\sigma^{2n-1}nTp^{-2\alpha-1}w = 0 \qquad (1.19)$$

Вводя (1.7), будем иметь

$$(1 - \sigma^\circ)\,\ddot{\tau} + A\sigma^n p^{-\alpha-1}\Big[(1 + 2\alpha)\Big(1 - \sigma^\circ\Big) - \frac{Enp}{\sigma}\,\sigma^\circ\Big]\dot{\tau} -$$
$$- A^2\sigma^{2n-1}En\sigma^\circ p^{-2\alpha-1}\tau = 0 \qquad (1.20)$$

Переходя в (1.20) к переменной p, получим

$$(1 - \sigma^\circ)\,p\,\frac{d^2\tau}{dp^2} + \Big[(1 - \sigma^\circ) + \alpha\,\Big(1 - \sigma^\circ - \frac{Enp}{\alpha\sigma}\,\sigma^\circ\Big)\Big]\frac{d\tau}{dp} - \frac{En}{\sigma}\,\sigma^\circ\tau = 0 \qquad (1.21)$$

Можно убедиться, что решения (1.13) и (1.17) являются двумя линейно независимыми интегралами уравнения (1.21).

Таким образом, уравнение второго порядка (1.19) содержит интеграл, соответствующий деформации стержня с первоначальным прогибом.

Пусть при решении задачи порядок уравнения оказался почему-либо завышенным и пусть оценка устойчивости проводится по уравнению (1.19), причем коэффициенты уравнения считаются постоянными и устойчивость тривиального решения оценивается по поведению интегралов уравнения (1.20), рассматриваемого как уравнение возмущенного движения. Тогда из (1.20), поскольку коэффициент при τ всегда отрицателен, следует, что область устойчивости вообще отсутствует. Этот результат является, очевидно, следствием завышения порядка уравнения и неучета переменности коэффициентов уравнения при его исследовании.

При исследовании устойчивости пластин на основе теории течения [1] как раз такое завышение порядка основного уравнения имело место.

При оценке границы устойчивости на основе возмущенных движений вида (1.13) к уравнению (1.21) должны быть присоединены некоторые дополнительные условия, позволяющие отделить эти движения от интегралов, соответствующих начальному прогибу.

Уравнение (1.21) позволяет сделать вывод о том, что класс возмущенных движений, на основе которого можно судить об устойчивости стержня, не ограничивается вынужденными движениями типа (1.13).

Постановка задачи устойчивости при ползучести на основе исследования поведения стержня, имеющего первоначальный прогиб [3], обладает тем недостатком, что при этом не рассматривается какое-либо устойчивое или неустойчивое состояние прямолинейного стержня. Стержень сразу искривляется, и по росту прогибов во времени определяется некоторое критическое время, которое относится затем к прямолинейному стержню. Квазистатическая постановка [1] является естественной в том смысле, что здесь рассматривается прямолинейный стержень, который подвергается некоторым возмущениям.

Имеет смысл, исходя из общей идеи квазистатической постановки задачи устойчивости [1], рассмотреть иной класс движений стержня при воздействии на него возмущений. При этом необходимо сформулировать условия устойчивости или неустойчивости прямого стержня, исходя из свойств возмущенного движения.

Таким образом, возникает следующая постановка, являющаяся в известном смысле обобщением постановки [3].

§ 2. Пусть прямолинейный шарнирно опертый стержень находится под продольной нагрузкой в условиях ползучести. Представим себе, что по прошествии некоторого времени на стержень подействовало некоторое возмущение. В качестве такого возмущения примем некоторый сколь угодно малый мгновенный остаточный прогиб. Исследуем, начиная с этого момента, возмущенное движение стержня. Оказывается, что характер возмущенного движения зависит от момента времени, в который было приложено возмущение. Если возмущение воздействовало на стержень в момент времени достаточно ранний, когда деформация ползучести невелика, то возмущенное движение начинается с некоторой скоростью, убывающей во времени. Если возмущение воздействует на прямолинейный стержень в некоторый достаточно отдаленный момент времени, когда в стержне накопилась достаточная деформация, то возмущенное движение происходит сразу с возрастающей скоростью. Таким образом, существует состояние стержня, которое мы назовем критическим, характеризующееся тем, что если бы в этот момент времени на стержень воздействовало возмущение, то возмущенное движение происходило бы с неубывающей скоростью, тогда как возмущенные движения, начинающиеся в любой предыдущий момент времени, происходили бы с уменьшающейся скоростью.Если представить графически последовательность возмущенных движений, начинающихся в различные моменты времени, то возмущенное движение, соответствующее критическому состоянию, характеризуется тем, что для него точка перегиба кривой совпадает с начальной точкой.

Составим уравнение рассматриваемых возмущенных движений стержня.

Пусть возмущение в виде остаточного прогиба w° подействовало на стержень в момент времени $t = t^*$. Тогда в сечении стержня напряжения будут

$$\sigma = \sigma_0 \quad \text{при } t < t^*, \qquad \sigma = \sigma_0 + \delta\sigma \quad \text{при } t \geqslant t^* \tag{2.1}$$

Вводя (2.1) в уравнение (1.2), при $t \geqslant t^*$ получим

$$p^{\alpha+1} = (\alpha + 1) A \left[\int_0^{t^*} \sigma_0{}^n \, dt + \int_{t^*}^{t} (\sigma_0 + \delta\sigma)^n \, dt \right]$$

После линеаризации будем иметь

$$p = [(\alpha + 1) A \sigma_0{}^n t]^{\frac{1}{1+\alpha}} \left(1 + \frac{n}{(1+\alpha)t} \int_{t^*}^{t} \frac{\delta\sigma}{\sigma_0} \, dt\right)$$

или с учетом (1.3)

$$p = p_0 + An\sigma_0^{n-1}p_0^{-\alpha}\int\limits_{t^*}^{t}\delta\sigma\, dt \tag{2.2}$$

Для деформаций ползучести при возмущенном движении ($t \geqslant t^*$) имеем

$$p = \varepsilon_0 - z\,(w_{xx} - w_{xx}^\circ) - \frac{1}{E}\,(\sigma_0 + \delta\sigma) \tag{2.3}$$

Вводя (2.3) в (2.2) и интегрируя по сечению с учетом уравнения (1.5), получим интегральное уравнение возмушенных движений

$$I\,(w_{xx} - w_{xx}^\circ) + \frac{T}{E}\,w + An\sigma^{n-1}Tp^{-\alpha}\int\limits_{t^*}^{t} w dt = 0 \tag{2.4}$$

где индексы (0) у σ и p опущены.

Вводя (1.7) и полагая $w^\circ = \tau^\circ \sin \pi x / l$, получим из (2.4) уравнение

$$(1 - \sigma^\circ)\,\tau - \tau^\circ = An\sigma^{n-1}E\sigma^\circ p^{-\alpha}\int\limits_{t^*}^{t}\tau\, dt \tag{2.5}$$

При $t = t^*$ имеем

$$\tau^* = \frac{\tau^\circ}{1 - \sigma^\circ} \tag{2.6}$$

Здесь τ^* — полный начальный прогиб с учетом продольной силы.

Вводя вместо переменной t переменную p — деформацию ползучести по оси стержня и учитывая (2.6), запишем уравнение возмущенных движений (2.5) в виде

$$(1 - \sigma^\circ)\,(\tau - \tau^*) = \frac{En}{\sigma}\,\sigma^\circ p^{-\alpha}\int\limits_{p^*}^{p} p_1^{\alpha}\tau\, dp_1 \tag{2.7}$$

Здесь τ^* — деформация ползучести в момент t^*.

Решение уравнения (2.7) будет

$$\tau = \tau^*\left[\left(\frac{p}{p^*}\right)^{-\alpha} e^{k(p-p^*)} + \alpha p^{-\alpha}e^{kp}\int\limits_{p^*}^{p} p_1^{\alpha-1}e^{-kp_1}dp_1\right] \tag{2.8}$$

где k согласно (1.13).

Дифференцируя два раза (2.8) по времени с учетом (1.1) и полагая $p = p^*$, найдем для ускорения возмущенного движения в момент начала движения

$$(\ddot{\tau})_{t=t^*} = A^2\sigma^{2n}p^{*-2\alpha}\left(k - \frac{2\alpha}{p^*}\right) \tag{2.9}$$

Таким образом, при воздействии возмущения при малых p^* (время мало) стержень начинает двигаться замедленно, при достаточно больших p^* — ускоренно. Критическая деформация p^* определится условием

$$k - \frac{2\alpha}{p^*} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\sigma^\circ}{1 - \sigma^\circ}\,\frac{En}{\sigma}\,p^* = 2\alpha \tag{2.10}$$

Если при выводе уравнения возмущенных движений будем исходить не из уравнения (1.2), а из уравнения в вариациях (1.9), то придем к уравнению (1.18), справедливому теперь при $t \geqslant t^*$.

Уравнение (1.18) получается и из интегрального уравнения (2.4), если последнее продифференцировать по t и исключить затем интеграл. К уравнению (1.18) должно быть добавлено начальное условие, которое согласно (2.4) имеет вид

$$\left[J\,(w_{xx} - w_{xx}^\circ) + \frac{T}{E}\,w\right]_{t=t^*} = 0 \tag{2.11}$$

Освобождаясь в (1.18) от w°, придем к однородному уравнению второго порядка, совпадающему с (1.19) при $t \geqslant t^*$. При исследовании возмущенных движений на основе этого уравнения к (2.11) должно быть присоединено еще одно начальное условие, которое получается из (1.18) при $t = t^*$.

Таким образом, рассматриваемые возмущенные движения содержатся как в уравнении (1.18), так и в уравнении (1.19) и их можно выделить постановкой соответствующих начальных условий.

Значение критической деформации ползучести можно получить и не разыскивая фактически возмущенных движений, а оперируя лишь уравнением возмущенного движения. При этом необходимо воспользоваться тем, что возмущенное движение, начинающееся в момент, когда стержень находится в критическом состоянии, удовлетворяет условию

$$(\ddot{w})_{t=t^*} = 0 \qquad (2.12)$$

Действительно, будем исходить из уравнения (1.18). Дифференцируя его по времени, получим

$$I\ddot{w}_{xx} + \frac{T}{E}\ddot{w} + A\sigma^n p^{-\alpha-1}\left[\alpha\left(I\dot{w}_{xx} + \frac{T}{E}\dot{w}\right) + \frac{np}{\sigma}T\dot{w}\right] -$$
$$-A^2\sigma^{2n}p^{-2\alpha-2}\left[\alpha(\alpha+1)I(w_{xx} - w_{xx}{}^\circ) + \alpha(\alpha+1)\frac{T}{E}w + \frac{np}{\sigma}Tw\right] = 0 \qquad (2.13)$$

Вводя в уравнения (1.18), (2.13) и (2.11) выражения (1.7) и полагая $t = t^*$, получим уравнения

$$-(1-\sigma^\circ)\dot{\tau}^* + A\alpha\sigma^n p^{-\alpha-1}[-(1-\sigma^\circ)\tau^* + \tau^\circ] + An\sigma^{n-1}p^{-\alpha}E\sigma^\circ\tau^* = 0$$

$$-(\tau^* - \tau^\circ) + \sigma^\circ\tau^* = 0 \qquad (2.14)$$

$$-(1-\sigma^\circ)\ddot{\tau}^* + A\sigma^n p^{-\alpha-1}\left[-\alpha(1-\sigma^\circ) + \frac{En}{\sigma}\sigma^\circ p\right]\dot{\tau}^* -$$
$$-A^2\sigma^{2n}\alpha p^{-2\alpha-2}\left[-(1+\alpha)(\tau^* - \tau^\circ) + (1+\alpha)\sigma^\circ\tau^* + \frac{nE}{\sigma}\sigma^\circ p\tau^*\right] = 0$$

где

$$\dot{\tau}^* = (\dot{\tau})_{t=t^*}, \qquad \ddot{\tau}^* = (\ddot{\tau})_{t=t^*}$$

Присоединяя к трем уравнениям (2.14) условие (2.12)

$$\ddot{\tau}^* = 0$$

будем иметь систему четырех однородных уравнений для τ°, τ^*, $\dot{\tau}^*$, $\ddot{\tau}^*$. Приравнивая определитель этой системы нулю, получим выражение для критической деформации ползучести, совпадающее с (2.10).

§ 3. Рассмотрим задачу устойчивости сжатого стержня в условиях ползучести при более общем виде уравнения состояния и более общих условиях опирания. Пусть имеет место уравнение состояния

$$\Phi(\sigma, p, \dot{p}) = 0 \qquad (3.1)$$

так что уравнение в вариациях имеет вид [1]

$$\lambda\delta\sigma + \mu\delta p + \nu\delta\dot{p} = 0 \qquad (3.2)$$

где $\lambda = \Phi_\sigma$, $\mu = \Phi_p$, $\nu = \Phi_{\dot{p}}$ — частные производные функции Φ, не зависящие от x. Полагая для возмущенного движения при $t \geqslant t^*$

$$\delta p = -z(w_{xx} - \overset{\circ}{w}_{xx}) - \frac{\delta\sigma}{E}$$

умножая уравнение (3.2) на z и интегрируя по сечению с учетом соотношения

$$\int\limits_F z\delta\sigma\, dF = M$$

получим уравнение

$$\nu\left[I\dot{w}_{xx}+\frac{1}{E}\dot{M}\right]+\mu\left[I(w_{xx}-\overset{\circ}{w}_{xx})+\frac{1}{E}M\right]-\lambda M=0 \qquad (3.3)$$

Учитывая, что для продольно сжатого стержня независимо от условий опирания

$$M_{xx}=Tw_{xx}$$

где $T(t)$ — усилие сжатия в стержне, придем к уравнению

$$\nu\left[I\dot{w}_{xxxx}+\frac{T}{E}\dot{w}_{xx}+\frac{\dot{T}}{E}w_{xx}\right]+\mu\left[I(w_{xxxx}-\overset{\circ}{w}_{xxxx})+\frac{T}{E}w_{xx}\right]-$$
$$-\lambda Tw_{xx}=0 \qquad (3.4)$$

К этому уравнению возмущенных движений должно быть присоединено начальное условие

$$\left[I(w_{xxxx}-\overset{\circ}{w}_{xxxx})+\frac{T}{E}w_{xx}\right]_{t=t^*}=0 \qquad (3.5)$$

В уравнении (3.4) переменные в общем случае разделяются. Действительно, примем

$$w=\tau(t)\,w_1(x),\qquad w^\circ=\tau^\circ w_1(x) \qquad (3.6)$$

Здесь $w_1(x)$ — собственная функция уравнения упругой устойчивости

$$EIw_{xxxx}+T_э w_{xx}=0 \qquad (3.7)$$

при заданных условиях опирания, $T_э$ — соответствующая критическая нагрузка. Уравнение (3.4), если ввести в него (3.6) с учетом (3.7), дает:

$$\nu[(1-\sigma^\circ)\dot{\tau}-\dot{\sigma}^\circ\tau]+\mu[(1-\sigma^\circ)\tau-\tau^\circ]+\lambda E\sigma^\circ\tau=0 \qquad \left(\sigma^\circ=\frac{T}{T_э}\right) \qquad (3.8)$$

Из уравнения (3.5) имеем

$$[(1-\sigma^\circ)\tau-\tau^\circ]_{t=t^*}=0 \qquad (3.9)$$

Дифференцируя (3.8), получим

$$\nu[(1-\sigma^\circ)\ddot{\tau}-2\dot{\sigma}^\circ\dot{\tau}-\ddot{\sigma}^\circ\tau]+\mu[(1-\sigma^\circ)\dot{\tau}-\dot{\sigma}^\circ\tau]+\lambda E\dot{\sigma}^\circ\tau+\lambda E\sigma^\circ\dot{\tau}+$$
$$+\dot{\nu}[(1-\sigma^\circ)\dot{\tau}-\dot{\sigma}^\circ\tau]+\dot{\mu}[(1-\sigma^\circ)\tau-\tau^\circ]+\dot{\lambda}E\sigma^\circ\tau=0 \qquad (3.10)$$

Полагая в (3.8) и (3.10) $t=t^*$ и присоединяя условие (3.9) и условие $\ddot{\tau}^*=0$ из четырех однородных уравнений относительно τ°, τ^*, $\dot{\tau}^*$, $\ddot{\tau}^*$ получим уравнение, определяющее границу устойчивости стержня

$$-(1-\sigma^\circ)\ddot{\sigma}^\circ-2\dot{\sigma}^{\circ 2}+\frac{\lambda}{\nu}(1+2\sigma^\circ)E\dot{\sigma}^\circ+$$
$$+\frac{\sigma^\circ(1-\sigma^\circ)E\lambda^2}{\nu^2}\left[-\frac{\mu}{\lambda}-\frac{\dot{\nu}}{\lambda}+\frac{\dot{\lambda}\nu}{\lambda^2}-\frac{E\sigma^\circ}{1-\sigma^\circ}\right]=0 \qquad (3.11)$$

При $\sigma^\circ=\mathrm{const}$ граница устойчивости определится условием

$$\frac{E\sigma^\circ}{1-\sigma^\circ}=-\frac{\mu}{\lambda}-\frac{\dot{\nu}}{\lambda}+\frac{\dot{\lambda}\nu}{\lambda^2} \qquad (3.12)$$

При $\Phi=\dot{p}-A\sigma^n p^{-\alpha}$ получаем (2.10) при произвольных условиях опирания стержня.

Поступила 4 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 3.
2. Rabotnov J. N. The theorie of creep and its applications. Plasticity Pergamon Press, 1960.
3. Шестериков С. А. О критерии устойчивости при ползучести. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 6.