

О ВЛИЯНИИ ЭФФЕКТА ХОЛЛА НА ГИПЕРЗВУКОВОЕ
ОБТЕКАНИЕ КЛИНА

Л. А. Панченко

(Москва)

Рассматривается задача обтекания клина установившимся гиперзвуковым потоком невязкого сжимаемого газа. Внутри клина возбуждается магнитное поле перпендикулярно его образующей. Течение в возмущенной области исследуется на основе обычных уравнений магнитной гидродинамики и закона Ома, который записывается для случая, когда учитывается эффект Холла. Полученная система уравнений была численно решена на ЭВМ методом конечных разностей. Результаты показывают, что для данной задачи эффект Холла увеличивает магнитогидродинамическое воздействие магнитного поля на поток.

В работе М. Д. Ладыженского [1] было рассмотрено обтекание гиперзвуковым потоком тел, внутри которых возбуждается магнитное поле. Было исследовано влияние сильного магнитного поля на течение для случая, когда не учитывался эффект Холла. Целью данной работы является исследование влияния эффекта Холла на течение.

Пусть клин обтекается установившимся гиперзвуковым потоком невязкого сжимаемого газа. Внутри клина возбуждается магнитное поле, вектор напряженности которого перпендикулярен его образующей и имеет постоянный модуль H^* . Электропроводностью в невозмущенном потоке пренебрегаем. В области за ударной волной справедливы уравнения магнитной гидродинамики, причем, так как рассматривается случай, когда $\omega\tau \neq 0$, где ω — угловая частота вращения электронов в магнитном поле, τ — среднее время между столкновениями электрона с ионами, закон Ома берем в форме [2]

$$\mathbf{j} = \sigma_0 \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{H} \right) - \frac{\omega\tau}{H} \mathbf{j} \times \mathbf{H} \quad (1)$$

где σ_0 — проводимость в отсутствие магнитного поля, она предполагается постоянной; \mathbf{H} , \mathbf{E} — векторы напряженностей магнитного и электрического полей соответственно; c — скорость света в вакууме; \mathbf{V} — скорость газа; \mathbf{j} — вектор плотности электрического тока.

Отнесем скорость в возмущенной области к скорости невозмущенного потока V_∞ , напряженность магнитного поля — к величине H^* , плотность — к плотности на бесконечности ρ_∞ , плотность электрического тока — к величине $\sigma_0 V_\infty H^*/c$, напряженность электрического поля — к величине $V_\infty H^*/c$, давление — к удвоенному скоростному напору в невозмущенном потоке $\rho_\infty V_\infty^2$, пространственные координаты отнесем к длине образующей клина L . В безразмерных переменных уравнения магнитной гидродинамики и закон Ома запишутся так:

$$\begin{aligned} (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{q}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{H}, & \operatorname{div} \rho \mathbf{V} &= 0, & q &= \frac{\sigma_0 H^* L}{c^2 \rho_\infty V_\infty} \\ \frac{1}{q} \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \left(\frac{V^2}{2} + \frac{1}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} \right) &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}, & \mathbf{j} &= \frac{1}{R_m} \operatorname{rot} \mathbf{H}, & R_m &= \frac{4\pi\sigma_0 L V_\infty}{c^2} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{H} - \frac{\omega\tau}{H} \mathbf{j} \times \mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

Здесь \mathbf{V} , \mathbf{H} , ρ , p — соответственно безразмерные вектор скорости, вектор напряженности магнитного поля, плотность и давление; κ — отношение удельных теплоемкостей.

В уравнения (2) входят безразмерные величины q и R_m . Порядок их был оценен в работе [1]. Здесь будут рассматриваться случаи $R_m \sim 1$, $q \sim 1/\varepsilon$, где $\varepsilon = (\kappa - 1)/(\kappa + 1)$ — отношение плотности перед ударной волной к характерному значению плотности за ударной волной.

К уравнениям (2) необходимо добавить условия на ударной волне, граничные условия на теле и на бесконечности. Условия на ударной волне в безразмерных переменных и в предположении бесконечно большого значения числа Маха на бесконечности имеют вид

$$p_2 = \frac{2}{\kappa + 1} \sin^2 \beta, \quad \rho_2 = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}, \quad V_{2\tau} = \cos \beta, \quad V_{2n} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \sin^2 \beta, \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1 \quad (3)$$

Здесь индекс 2 относится к области за ударной волной, τ, n — единичные векторы касательной и нормали соответственно к ударной волне, β — местный угол наклона скачка с направлением скорости в невозмущенном потоке. На теле имеем условие непротекания $V_n = 0$. В невозмущенном потоке для магнитного поля справедливы уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$$

Уравнения (2) и (3) составляют полную систему уравнений задачи. Вид ударной волны определяется в процессе решения задачи.

Спроектируем уравнения (2) на оси декартовой системы координат x, y, z , которые выберем таким образом: начало координат поместим в носике клина, ось x направим по его образующей, а ось y — перпендикулярно ей. Все рассматриваемые функции в силу постановки задачи являются функциями только x и y и от z не зависят. Обозначим через u, v, w компоненты скорости \mathbf{V} на оси x, y, z соответственно. Тогда получаем

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{q}{\rho} (j_y h_z - j_z h_y) \quad (4)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{q}{\rho} (j_z h_x - j_x h_z) \quad (5)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{q}{\rho} (j_x h_y - j_y h_x) \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$$j_x = \frac{1}{R_m} \frac{\partial h_z}{\partial y}, \quad j_y = -\frac{1}{R_m} \frac{\partial h_z}{\partial x}, \quad j_z = \frac{1}{R_m} \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \quad (8)$$

$$j_x = \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \left[\left(1 + \frac{\omega^2 \tau^2}{h^2} h_x^2 \right) (E_x + v h_z - w h_y) + \left(\frac{\omega^2 \tau^2}{h^2} h_x h_y - \frac{\omega \tau}{h} h_z \right) (E_y + w h_x - u h_z) + \left(\frac{\omega^2 \tau^2}{h^2} h_x h_z + \frac{\omega \tau}{h} h_y \right) (u h_y - v h_x) \right]$$

$$j_y = \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \left[\left(\frac{\omega^2 \tau^2}{h^2} h_x h_y + \frac{\omega \tau}{h} h_z \right) (E_x + v h_z - w h_y) + \left(1 + \frac{\omega^2 \tau^2}{h^2} h_y^2 \right) (E_y + w h_x - u h_z) + \left(\frac{\omega^2 \tau^2}{h^2} h_y h_z - \frac{\omega \tau}{h} h_x \right) (u h_y - v h_x) \right] \quad (9)$$

$$j_z = \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \left[\left(\frac{\omega^2 \tau^2}{h^2} h_x h_z - \frac{\omega \tau}{h} h_y \right) (E_x + v h_z - w h_y) + \left(\frac{\omega^2 \tau^2}{h^2} h_y h_z - \frac{\omega \tau}{h} h_x \right) (E_y + w h_x - u h_z) + \left(1 + \frac{\omega^2 \tau^2}{h^2} h_z^2 \right) (u h_y - v h_x) \right]$$

$$\frac{\rho}{q} \left[u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{2} + \frac{1}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} \right) \right] + \frac{\rho}{q} \left[v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{2} + \frac{1}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} \right) \right] = E_x j_x + E_y j_y + E_z j_z \quad (10)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

Из уравнений (11) получаем, что $E_z = 0$, так как предполагается, что внешнее электрическое поле отсутствует.

Из уравнений магнитной гидродинамики следует, что везде выполняется уравнение $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ или, по теореме Гаусса,

$$\int_{\Sigma} j_n d\Sigma = 0$$

Здесь Σ — некоторая замкнутая поверхность, j_n — нормальная к поверхности составляющая плотности электрического тока \mathbf{j} . Так как в рассматриваемой задаче от z ничто не зависит, возьмем за поверхность Σ кусок поверхности (сечение которой плоскостью $z = 0$ изображено на фиг. 1), заключенный между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$. $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$.

Заметим, что на поверхности клина $j_n = 0$, как это следует из постановки задачи, перед ударной волной газ непроводящий, т. е. токи из ударной волны отсутствуют, поэтому последовательно имеем

$$\int_{\Sigma_1} j_n d\Sigma = 0, \quad \int_{\Sigma_2} j_n d\Sigma = 0, \quad \int_{\Sigma_3} j_n d\Sigma = 0 \quad \text{или} \quad \int_0^Y j_x dy = 0 \quad (12)$$

Таким образом, из постановки задачи следует, что электрический ток в направлении оси x не протекает.

Предполагая параметр $\varepsilon = (\kappa - 1) / (\kappa + 1)$ малым, проведем оценки величин, входящих в уравнения (4) — (11), для случая $\omega\tau \sim 1$.

Аналогично случаю, рассмотренному в [1], имеем

$$x \sim 1, \quad y \sim \varepsilon, \quad u \sim 1, \quad v \sim \varepsilon, \quad \rho \sim 1/\varepsilon$$

$$\partial p / \partial x \sim \varepsilon, \quad p = \sin^2 \theta, \quad h_y = 1 + O(\varepsilon), \quad j_z \sim 1$$

Далее из уравнений (5), (8), (6), (9) и (10), (11) имеем соответственно

$$h_x \sim \varepsilon, \quad j_x \sim 1, \quad h_z \sim \varepsilon, \quad j_y \sim \varepsilon, \quad w \sim 1 \quad (13)$$

$$E_x \sim 1, \quad E_y \sim \varepsilon, \quad E_x = f(x) + \varepsilon\phi(y), \quad f(x) \sim 1, \quad \phi(y) \sim 1$$

Все эти оценки, полученные для случая $\omega\tau \sim 1$, подтверждаются решением.

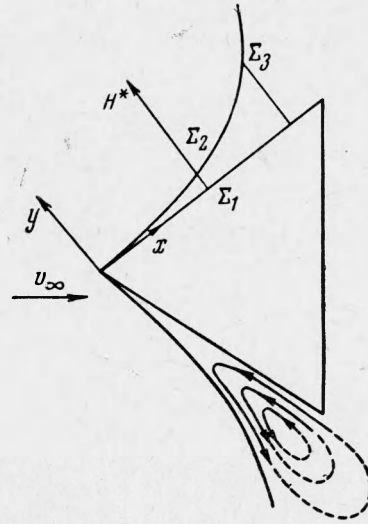
Пренебрегая в уравнениях (4) — (11) членами порядка ε по сравнению с 1 и используя (12), получаем

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{q}{\rho} j_z, \quad u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{q}{\rho} j_x$$

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{2q\varepsilon}{\rho} \rho [w j_x - u j_z - E_x j_x] \quad (14)$$

$$j_x = \frac{E_x - w + \omega\tau u}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad j_z = \frac{\omega\tau w - \omega\tau E_x + u}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad E_x = \frac{1}{Y} \int_0^Y (w - \omega\tau u) dy$$

Здесь $Y = Y(x)$ — уравнение ударной волны.



Фиг. 1

Последнее уравнение в системе (14) получается из уравнений (12), (13) и уравнения для j_x системы (14).

На ударной волне из (3) имеем

$$\begin{aligned} \rho_2 = \sin^2 \theta, \quad \rho_2 = 1/\varepsilon, \quad u_2 = \cos \theta \\ v_2 = (dY/dx) \cos \theta - \varepsilon \sin \theta, \quad w = 0 \end{aligned} \quad \text{при } Y = Y(x) \quad (15)$$

Здесь θ — полуугол раствора клина.

Перейдем к новым переменным x и ψ , определяя ψ таким образом:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \rho v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\rho u, \quad \psi = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{на поверхности} \\ \text{клина} \end{array} \right)$$

Тогда из (14) получаем

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{q}{\rho} j_z, \quad u \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{q}{\rho} j_x \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{2q\varepsilon}{\rho} \rho \left[\frac{w}{u} j_x - j_z - \frac{E_x}{u} j_x \right], \quad E_x = -\frac{1}{Y} \int_0^Y (w - \omega \tau u) \frac{d\psi}{\rho u} \\ j_x = \frac{E_x - w + \omega \tau u}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad j_z = \frac{\omega \tau w - \omega \tau E_x + u}{1 + \omega^2 \tau^2} \end{aligned} \quad (16)$$

Система (16) описывает течение газа в возмущенной области за ударной волной и определяет электрические токи и электрическое поле в этой области. Найдем форму ударной волны. Из уравнения неразрывности в переменных x и ψ имеем

$$\frac{\partial(v/u)}{\partial \psi} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho u} = 0, \quad v = -u \int_0^\psi \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho u} d\psi \quad (17)$$

Из граничных условий (15) имеем

$$v_2 = \frac{dY}{dx} \cos \theta - \varepsilon \sin \theta \quad (18)$$

Используя выражение $\psi = -x \sin \theta - y \cos \theta$ для функции тока в невозмущенном потоке с учетом непрерывности функции тока на ударной волне, получаем

$$\Psi = -x \sin \theta - Y \cos \theta \quad (19)$$

Из уравнений (18) и (19) находим

$$v_2 = -\frac{dY}{dx} - (1 + \varepsilon) \sin \theta \quad (20)$$

Подставляя (20) в (17), находим уравнение для определения формы ударной волны в новых переменных

$$\frac{d\Psi}{dx} = -\sin \theta (1 + \varepsilon) + \cos \theta \int_0^\psi \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho u} d\psi \quad (21)$$

из которого, используя (19), можно найти $Y(x)$.

Система уравнений (16) и уравнение (21) были численно решены на ЭВМ методом конечных разностей. Решение было получено для $\omega \tau = 0.1, 0.5, 1, 10, 100$. В расчетах принималось $\theta = 40^\circ$, $\varepsilon = 1.4$. Правильность счета контролировалась тем, что при $\omega \tau = 0$ решение должно совпадать с результатами [1]. Шаг интегрирования брался равным $\Delta x = 0.01$.

При уменьшении шага в два раза, т. е. при $\Delta x = 0.005$, получали изменения в четвертых-пятых знаках вычисляемых величин, т. е. шаг интегрирования $\Delta x = 0.01$ давал достаточную точность.

Оценим порядок величин, входящих в (21), по $\omega\tau$. Из (21) получаем

$$E_x \sim \omega\tau, \quad j_x \sim \omega\tau, \quad w \sim \omega\tau \quad \text{при } \omega\tau \ll 1$$

Порядок остальных величин не изменяется и определяется оценками, проведенными для $\omega\tau \sim 1$. Таким образом, в пределе при $\omega\tau \rightarrow 0$ имеем решение, полученное в [1]. Пусть теперь $\omega\tau \gg 1$, тогда

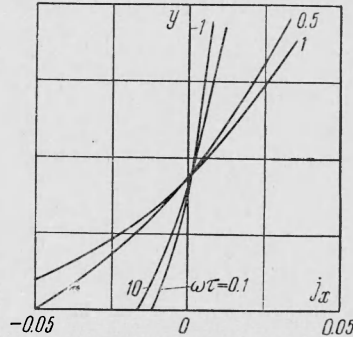
$$w \sim \frac{1}{\omega\tau}, \quad j_x \sim \frac{1}{\omega\tau}, \quad E_x \sim \omega\tau$$

Порядок остальных величин не изменяется и определяется оценками, проведенными для случая $\omega\tau \sim 1$. При $\omega\tau \gg 1$ уравнения системы (21) принимают более простой вид.

Обозначим $E_x = \omega\tau E_x'$, где $E_x' \sim 1$, тогда

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{a}{\rho} j_z, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{2q\epsilon}{\rho} \frac{E_x'^2}{u} \quad (22)$$

$$j_z = -E_x', \quad E_x' = \frac{1}{Y} \int_0^Y \frac{d\psi}{\rho}, \quad j_x = 0, \quad w = 0$$



Фиг. 2

При $\omega\tau \rightarrow \infty$ система (16) имеет предельное решение, удовлетворяющее системе (22).

Если электрическое поле $\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{H}$ перпендикулярно магнитному (в данной задаче это условие выполняется), то из уравнения (1) можно получить [2]

$$\mathbf{j} = \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} \left(\mathbf{E}^* - \frac{\omega\tau}{H} \mathbf{E}^* \times \mathbf{H} \right) \quad (23)$$

в безразмерных переменных, введенных выше. В уравнении (23) второй член справа есть ток, перпендикулярный как \mathbf{E}^* , так и \mathbf{H} , и называемый током Холла. Проекции этого тока \mathbf{j}^* на оси координат будут

$$j_x^* = \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \frac{\mathbf{H} \times \mathbf{E}^*}{H}, \quad j_x^* = \frac{\omega\tau u}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad j_y^* = 0, \quad j_z^* = \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} [w - E_x]$$

Около стенки клина, где скорость u мала, компонента тока Холла вдоль оси x будет мала, и основной вклад в j_x^* будет давать компонента прямого тока вдоль оси x , т. е. тока, параллельного \mathbf{E}^* , как видно из уравнения (23). При удалении от стенки клина составляющая скорости u увеличивается; компоненты тока Холла и прямого тока вдоль оси x разных знаков; проекция полного тока на ось x по сечению $x = \text{const}$ обращается в 0 и меняет знак (что подтверждают численные результаты, представленные на фиг. 2 в виде графиков функции $j_x = j_x(y)$ при $x = 0.4$ для разных $\omega\tau$), поэтому суммарный ток в направлении оси x отсутствует. За счет тока Холла и получены оценки

$$\begin{aligned} j_x &\sim 1/\omega\tau, & j_y &\sim 1 & \text{при } \omega\tau \gg 1 \\ j_x &\sim 1, & j_y &\sim 1 & \text{при } \omega\tau \sim 1 \\ j_x &\sim \omega\tau, & j_y &\sim 1 & \text{при } \omega\tau \ll 1 \end{aligned}$$

Полученные результаты подтверждают оценки порядков величин по $\omega\tau$.

На фиг. 3 и 4 представлены численные результаты для $j_x(x)$ и $w(x)$ соответственно при $y = 0$ для разных $\omega\tau$. Они показывают, что поперечная составляющая скорости w , появляющаяся при $\omega\tau \neq 0$, увеличивается с ростом $\omega\tau$, достигает максимума и затем падает. Уже при $\omega\tau = 100$ величины j_x и w пренебрежимо малы.

Электрический ток в направлении оси x не протекает, поэтому появляется электрическое поле $E_x = E_x(x)$. На фиг. 4 пунктирной линией показана зависимость $0.1 E_x/\omega\tau$ от x для разных $\omega\tau$, которая подтверждает вывод о том, что $E_x \sim \omega\tau$.

В работе [1] показано, что при обтекании гиперзвуковым потоком тел, внутри которых возбуждается магнитное поле, может происходить отрыв потока от тела. Это объясняется действием поперечных сил, направленных против движения. Об-

