

УДК 517.9

Исследование сеточно-характеристических методов повышенных порядков точности на неструктурированных сетках*

А.В. Фаворская, И.Б. Петров

Московский физико-технический институт (государственный университет), Институтский переулок, 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141701

E-mails: aleanera@yandex.ru (Фаворская А.В.), petrov@mipt.ru (Петров И.Б.)

Фаворская А.В., Петров И.Б. Исследование сеточно-характеристических методов повышенных порядков точности на неструктурированных сетках // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 2. — С. 223–233.

В работе исследованы сеточно-характеристические методы решения гиперболических систем уравнений с использованием интерполяции высоких порядков на неструктурированных тетраэдральных и треугольных сетках на аппроксимацию, рассмотрены порядки интерполяции от первого до пятого включительно. Также приведены одномерные разностные схемы, соответствующие рассматриваемым методам, и выполнено исследование данных схем на устойчивость. Сеточно-характеристические методы на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках успешно применяются для решения задач сейсморазведки углеводородов, в том числе, в условиях Арктического шельфа и вечной мерзлоты, а также для решения задач сейсмоки, задач динамического деформирования и разрушения, при исследовании анизотропных композитных материалов.

DOI: 10.15372/SJNM20160208

Ключевые слова: *сеточно-характеристический метод, численное моделирование, неструктурированные сетки, интерполяция высоких порядков.*

Favorskaya A. V., Petrov I. B. The study of increased order grid-characteristic methods on unstructured grids // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 2. — P. 223–233.

We study the grid-characteristic methods for solving hyperbolic systems using a high order interpolation on unstructured tetrahedral and triangular grids for approximation. We consider the interpolation with orders from the first to the fifth included. Also, one-dimensional finite difference schemes appropriate for the considered methods are given. We study these schemes in terms of stability. The grid-characteristic method on unstructured triangular and tetrahedral grids are successfully used for solving the seismic prospecting problems, including, seismic prospecting in the conditions of the Arctic shelf and permafrost, as well as for solving seismic problems, problems of dynamic deformation and destruction, studying anisotropic composite materials.

Keywords: *grid-characteristic method, numerical simulation, unstructured grids, high order interpolation.*

1. Введение

При численном моделировании волновых процессов в сейсмической разведке [1], сейсмике и при исследовании анизотропных композитных материалов [2] широко используются сеточно-характеристические методы [2–9], в том числе на неструктурированных

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Соглашения о предоставлении субсидии № 14.575.21.0084 от 20 октября 2014 года (уникальный идентификатор ПНИ: RFMEFI57514X0084).

треугольных [8] и тетраэдральных сетках [2, 9]. Преимуществом данной группы методов является возможность использования контактных границ сложной формы, что позволяет моделировать сейсмические процессы в постановках, максимально приближенных к реальным [2, 9], сохраняя все преимущества сеточно-характеристических методов: решение полной системы уравнений, описывающей состояние бесконечно-малого объема сплошной линейно-упругой среды [9, 10], учет физических процессов (распространение разрывов вдоль характеристик) и корректную постановку контактных и граничных условий.

К схемам повышенного и высокого порядков точности относят схемы ENO (essentially nonoscillatory), WENO (weighted essentially nonoscillatory), компактные схемы и схемы для решения продолженных систем уравнений.

В схемах ENO TVD-ограничение [3] заменяется требованием, уменьшающим количество возникающих экстремумов, допуская их появление при наличии ограничения на их величину. Технически это обеспечивается выбором шаблона полиномиальной интерполяции высокого порядка, обеспечивающим наименьшие осцилляции из всех возможных. В то время как схемы ENO используют наиболее гладкий из нескольких шаблонов, схемы WENO [11–15] выбирают усредненный с весами шаблон, использующий все возможные шаблоны. Веса подбираются на основе локальной гладкости решения таким образом, чтобы они были близки к нулю для негладких шаблонов, но были оптимальны в областях гладкости решения. WENO-схемы действуют по аналогии с ENO-схемами возле разрывов. Но в областях гладкости WENO-схемы ближе к центрированным противопоточным схемам.

Применение схем WENO с высоким порядком аппроксимации как по времени, так и по пространству для решения нелинейных гиперболических систем на неструктурированных сетках в двумерном и трехмерном случаях можно найти в [14, 15]. Описание WENO-схем до одиннадцатого порядка аппроксимации можно найти в [12]. К недостаткам WENO-схем можно отнести их неэкономичность и необходимость специальных видоизменений в окрестности границ.

Компактные схемы используют уравнения, которые связывают значения результата в нескольких соседних точках со значениями данных в нескольких соседних точках. Это позволяет повысить порядок аппроксимации, не увеличивая шаблон. Класс неявных компактных разностных схем, обладающих порядком аппроксимации выше второго, устойчивостью, экономичной разрешимостью разностных уравнений, когда число арифметических операций, приходящихся на вычислительный цикл, пропорционально числу узлов сетки, представлен в [16, 17]. К недостатку неявных схем можно отнести сложность их распараллеливания.

Класс консервативных абсолютно устойчивых компактных схем, монотонных в широком диапазоне значений локального числа Куранта для решения квазилинейных уравнений гиперболического типа представлен в [18, 19]. Схемы данного класса имеют четвертый порядок аппроксимации по пространственной координате на компактном шаблоне и нечетный (первый или третий) порядок аппроксимации по времени. Схемы данного класса экономичны и решаются методом бегущего счета. К их недостаткам можно отнести ограничение на число Куранта снизу.

Характеристические свойства гиперболических систем уравнений сохраняются и в следствиях исходных уравнений, получаемых дифференцированием исходных уравнений (продолженных или расширенных системах уравнений). Такие продолженные системы используются для построения схем высокого порядка аппроксимации на нерасширяющемся шаблоне, в том числе монотонных схем подобного типа [20, 21]. Для многослой-

ных разностных схем возникает проблема выполнения первого шага интегрирования по времени, для расчета которого нужно использовать двухслойные схемы. Использование продолженных систем уравнений позволяет избежать данной проблемы.

В данной работе рассматриваются двумерные и трехмерные разностные схемы, соответствующие сеточно-характеристическим методам на треугольных и тетраэдральных сетках с интерполяцией от первого до пятого порядков включительно [22], проведено исследование данных схем на аппроксимацию [23]. Данные методы в одномерном случае сводятся к группам одномерных разностных схем, проведено их исследование на устойчивость [23].

2. Сеточно-характеристический метод

На каждом шаге интегрирования по времени вначале, для обеспечения изотропности метода, выбирают два в случае треугольных сеток и три в случае тетраэдральных сеток произвольных направлений образующих базис, и вводят новую систему координат (ξ_1, ξ_2) или (ξ_1, ξ_2, ξ_3) соответственно. Произвольный выбор направлений на каждом шаге интегрирования по времени обеспечивает изотропность получаемых методов. В данном произвольно выбранном базисе рассматриваемая система гиперболического типа (например система уравнений, описывающая состояние бесконечно малого объема сплошной линейно-упругой среды [9, 10]) запишется следующим образом для двумерного случая:

$$\vec{q}_t + \mathbf{A}_1^{2D} \vec{q}_{\xi_1} + \mathbf{A}_2^{2D} \vec{q}_{\xi_2} = 0 \quad (1)$$

и следующим образом для трехмерного:

$$\vec{q}_t + \mathbf{A}_1^{3D} \vec{q}_{\xi_1} + \mathbf{A}_2^{3D} \vec{q}_{\xi_2} + \mathbf{A}_3^{3D} \vec{q}_{\xi_3} = 0. \quad (2)$$

Для каждой из систем вида

$$\vec{q}_t + \mathbf{A}_1 \vec{q}_{\xi_1} = 0 \quad (3)$$

справедливы следующие точные выражения:

$$\vec{q}(\xi_1, \xi_2, t) = \sum_{i=1}^{I^{2D}} \mathbf{X}_i^{2D,1} \vec{q}(\xi_1 - c_i^{2D,1} \tau, \xi_2, t), \quad (4)$$

$$\vec{q}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \sum_{i=1}^{I^{3D}} \mathbf{X}_i^{3D,1} \vec{q}(\xi_1 - c_i^{3D,1} \tau, \xi_2, \xi_3, t) \quad (5)$$

для двумерного и трехмерного случаев соответственно.

В (3) и ниже \mathbf{A}_1 является матрицей \mathbf{A}_1^{2D} для двумерного случая и \mathbf{A}_1^{3D} для трехмерного случая соответственно. В (4) $\mathbf{X}_i^{2D,1}$ — некие матрицы, выражающиеся через компоненты матрицы \mathbf{A}_1^{2D} , $c_i^{2D,1}$ — собственные числа матрицы \mathbf{A}_1^{2D} , I^{2D} — их количество, в (5) $\mathbf{X}_i^{3D,1}$ — некие матрицы, выражающиеся через компоненты матрицы \mathbf{A}_1^{3D} , $c_i^{3D,1}$ — собственные числа матрицы \mathbf{A}_1^{3D} , I^{3D} — их количество, в (4), (5) τ — шаг интегрирования по времени.

Используя в (4) или (5) интерполяцию высокого порядка [22] на треугольной или тетраэдральной сетках соответственно и последовательно применяя для каждого из направлений ξ_1, ξ_2 или ξ_1, ξ_2, ξ_3 формулы, аналогичные (4), (5) и соответствующие системе, аналогичной (3), получаем метод нахождения решения на следующем временном слое для двумерного и трехмерного случаев соответственно.

Формулы (4), (5) можно представить в операторном виде:

$$\vec{q}' = \mathbf{F}_1^{2D} \vec{q}^n, \quad (6)$$

$$\vec{q}' = \mathbf{F}_1^{3D} \vec{q}^n. \quad (7)$$

3. Разностные схемы на неструктурированных сетках

Сеточно-характеристический метод на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках сводится к чередованию соответственно $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$ и $\frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}$ разностных схем при порядке интерполяции, равном N . То, какая именно схема используется, определяется тем, в какую точку попадает характеристика. Было проведено исследование схем при порядках интерполяции от первого до пятого включительно на треугольных и тетраэдральных сетках. Приведем одну из 10 схем, соответствующих третьему порядку интерполяции на треугольных сетках:

$$\begin{aligned} p_{m,k}^{n+1} = & p_{m,k}^n + \frac{ca\tau}{6h} \left(p_{m+2,k-2}^n - 3p_{m,k-2}^n + 2p_{m-1,k-2}^n - 6p_{m-1,k-1}^n + 12p_{m,k-1}^n - \right. \\ & \left. 6p_{m+1,k-1}^n + 6p_{m-1,k}^n - 6p_{m,k}^n \right) + \frac{cb\tau}{6h} \left(2p_{m-1,k-2}^n - 3p_{m,k-2}^n - 6p_{m-1,k-1}^n + 12p_{m,k-1}^n + \right. \\ & \left. 6p_{m-1,k}^n - 9p_{m,k}^n - 2p_{m-1,k+1}^n \right) + \frac{(ca\tau)^2}{2h^2} \left(2p_{m+1,k-1}^n + 2p_{m,k-2}^n + 2p_{m-1,k-1}^n - \right. \\ & \left. p_{m+1,k-2}^n - 4p_{m,k-1}^n - p_{m-1,k-2}^n \right) + \frac{(ca\tau)(cb\tau)}{2h^2} \left(3p_{m,k}^n - 3p_{m-1,k}^n + p_{m+1,k-1}^n - \right. \\ & \left. 6p_{m,k-1}^n + 5p_{m-1,k-1}^n - p_{m+1,k-2}^n + 3p_{m,k-2}^n - 2p_{m-1,k-2}^n \right) + \frac{(cb\tau)^2}{2h^2} \left(p_{m,k}^n - 2p_{m,k-1}^n + \right. \\ & \left. p_{m,k-2}^n + p_{m-1,k+1}^n - 3p_{m-1,k}^n + 3p_{m-1,k-1}^n - p_{m-1,k-2}^n \right) + \frac{(ca\tau)^3}{6h^3} \left(p_{m-1,k-2}^n - \right. \\ & \left. 3p_{m,k-2}^n + 3p_{m+1,k-2}^n - p_{m+2,k-2}^n \right) + \frac{(ca\tau)^2(cb\tau)}{2h^3} \left(p_{m+1,k-2}^n - p_{m+1,k-1}^n - 2p_{m,k-2}^n + \right. \\ & \left. 2p_{m,k-1}^n + p_{m-1,k-2}^n - p_{m-1,k-1}^n \right) + \frac{(ca\tau)(cb\tau)^2}{2h^3} \left(p_{m-1,k-2}^n - p_{m,k-2}^n - 2p_{m-1,k-1}^n + \right. \\ & \left. p_{m,k-1}^n + p_{m-1,k}^n - p_{m,k}^n \right) + \frac{(cb\tau)^3}{6h^3} \left(p_{m-1,k-2}^n - 3p_{m-1,k-1}^n + 3p_{m-1,k}^n - p_{m-1,k+1}^n \right). \quad (8) \end{aligned}$$

В (8) p соответствует одному из инвариантов Римана решаемой системы (3), c — собственное значение, соответствующее данному инварианту Римана, τ — шаг интегрирования по времени, числа a , b образуют единичный вектор вдоль рассматриваемого направления, h — одна треть длины боковой стороны рассматриваемого равнобедренного прямоугольного треугольника.

4. Аппроксимация

Порядок аппроксимации формулами (6), (7) системы уравнений (3) и по времени и по всем координатам совпадает с порядком интерполяции.

Можно выделить два способа нахождения решения на следующем временном слое. В двумерном случае они выглядят следующим образом:

$$\vec{q}^{n+1} = \mathbf{F}_2^{2D} \mathbf{F}_1^{2D} \vec{q}^n, \tag{9}$$

$$\vec{q}^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_1^{2D} \mathbf{F}_2^{2D} + \mathbf{F}_2^{2D} \mathbf{F}_1^{2D})\vec{q}^n, \tag{10}$$

а в трехмерном примут следующий вид:

$$\vec{q}^{n+1} = \mathbf{F}_3^{3D} \mathbf{F}_2^{3D} \mathbf{F}_1^{3D} \vec{q}^n, \tag{11}$$

$$\vec{q}^{n+1} = \frac{1}{6} \left(\mathbf{F}_1^{3D} \mathbf{F}_2^{3D} \mathbf{F}_3^{3D} + \mathbf{F}_3^{3D} \mathbf{F}_1^{3D} \mathbf{F}_2^{3D} + \mathbf{F}_2^{3D} \mathbf{F}_3^{3D} \mathbf{F}_1^{3D} + \mathbf{F}_3^{3D} \mathbf{F}_2^{3D} \mathbf{F}_1^{3D} + \mathbf{F}_1^{3D} \mathbf{F}_3^{3D} \mathbf{F}_2^{3D} + \mathbf{F}_2^{3D} \mathbf{F}_1^{3D} \mathbf{F}_3^{3D} \right) \vec{q}^n. \tag{12}$$

Порядок аппроксимации формулами (9)–(12) систем уравнений (1), (2) соответственно по всем координатам совпадает с используемым порядком интерполяции.

Выражения (9), (11) аппроксимируют по времени системы (1), (2) соответственно с порядком, совпадающим с порядком интерполяции в случае, когда

$$\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j = \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i \tag{13}$$

при $i \neq j$.

А в случае, когда выражение (13) не выполнено, (9), (11) аппроксимируют по времени системы (1), (2) соответственно с первым порядком.

Выражения (10), (12) аппроксимируют по времени системы (1), (2) соответственно со вторым порядком, начиная с квадратичной интерполяции, и с первым порядком для линейной интерполяции. Также существует ряд соотношений между матрицами \mathbf{A}_i , при выполнении которых выражения (10), (12) аппроксимируют системы (1), (2) по времени с порядком, совпадающим с порядком интерполяции. Например, когда выполнены следующие соотношения:

$$2\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i = (\mathbf{A}_j \mathbf{A}_i \mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j) \tag{14}$$

выражения (10), (12) аппроксимируют системы (1), (2) с третьим порядком по времени при кубической интерполяции.

5. Устойчивость

Для интерполяции второго порядка выражения (9)–(12) в одномерном случае эквивалентны чередованию разностных схем, шаблоны которых приведены на рисунках 1, 2. Каждая из этих схем исследовалась в [24]. Схема с шаблоном на рис. 1 является устойчивой при числе Куранта [3, 4, 24] от 0 до 2, а схема с шаблоном на рис. 2 является устойчивой при числе Куранта от 0 до 1.

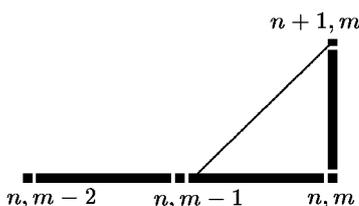


Рис. 1. Шаблон разностной схемы с квадратичной интерполяцией. Вариант 1

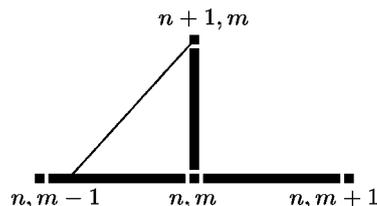


Рис. 2. Шаблон разностной схемы с квадратичной интерполяцией. Вариант 2

Для интерполяции третьего порядка выражения (9)–(12) в одномерном случае эквивалентны чередованию схем, шаблоны которых изображены на рис. 3–5. Схема с шаблоном на рис. 3 является устойчивой при числе Куранта от 1 до 2, схема с шаблоном на рис. 4 исследовалась в [24] и является устойчивой при числе Куранта от 0 до 1. Схема с шаблоном на рис. 5 является неустойчивой.

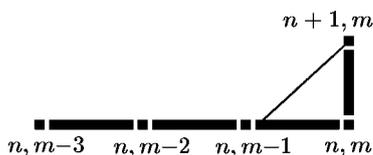


Рис. 3. Шаблон разностной схемы с кубической интерполяцией. Вариант 1

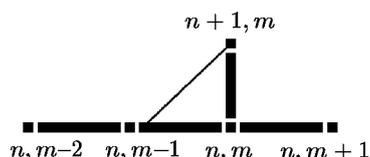


Рис. 4. Шаблон разностной схемы с кубической интерполяцией. Вариант 2

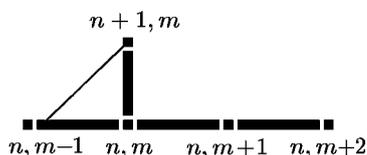


Рис. 5. Шаблон разностной схемы с кубической интерполяцией. Вариант 3



Рис. 6. Шаблон разностной схемы с интерполяцией четвертого порядка. Вариант 1

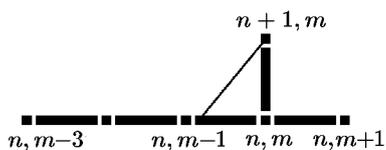


Рис. 7. Шаблон разностной схемы с интерполяцией четвертого порядка. Вариант 2

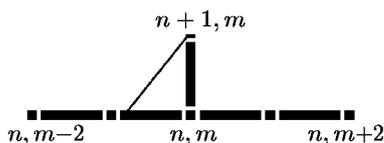


Рис. 8. Шаблон разностной схемы с интерполяцией четвертого порядка. Вариант 3

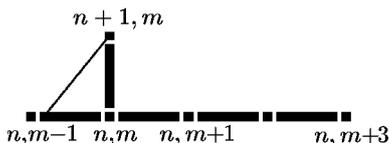


Рис. 9. Шаблон разностной схемы с интерполяцией четвертого порядка. Вариант 4

Для интерполяции четвертого порядка выражения (9)–(12) в одномерном случае эквивалентны чередованию схем, шаблоны которых приведены на рис. 6–9. Схема с шаблоном на рис. 6 является устойчивой при числе Куранта от 1 до 3. Схема с шаблоном на рис. 7 является устойчивой при числе Куранта от 0 до 2. Схема с шаблоном на рис. 8 является устойчивой при числе Куранта от 0 до 1. Схема с шаблоном на рис. 9 является неустойчивой.

Для интерполяции пятого порядка выражения (9)–(12) в одномерном случае эквивалентны чередованию схем, шаблоны которых приведены на рис. 10–14. Схема с шаблоном на рис. 10 является устойчивой при числе Куранта от 2 до 3. Схема с шаблоном на рис. 11 является устойчивой при числе Куранта от 1 до 2. Схема с шаблоном на рис. 12 является устойчивой при числе Куранта от 0 до 1. Схемы с шаблонами на рис. 13, 14 являются неустойчивыми.

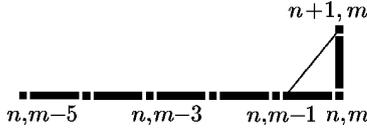


Рис. 10. Шаблон разностной схемы с интерполяцией пятого порядка. Вариант 1

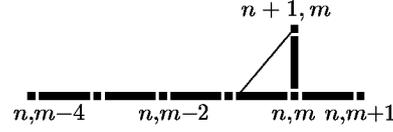


Рис. 11. Шаблон разностной схемы с интерполяцией пятого порядка. Вариант 2

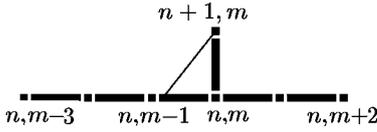


Рис. 12. Шаблон разностной схемы с интерполяцией пятого порядка. Вариант 3

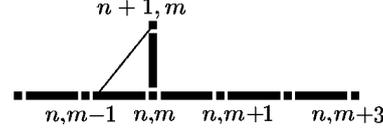


Рис. 13. Шаблон разностной схемы с интерполяцией пятого порядка. Вариант 4

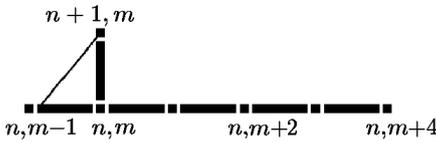


Рис. 14. Шаблон разностной схемы с интерполяцией пятого порядка. Вариант 5

Приведем пример исследования на устойчивость с помощью спектрального признака устойчивости [25] схемы с шаблоном на рис. 10.

Для уравнения переноса

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} + a \frac{\partial p(t, x)}{\partial x} = 0, \tag{15}$$

где a — положительный коэффициент, а за $\frac{\partial p(t, x)}{\partial t}$ обозначена производная по t поля $p(t, x)$, разностная схема с шаблоном на рис. 10 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} p_m^{n+1} = p_m^n + a\tau & \frac{12p_{m-5}^n - 75p_{m-4}^n + 200p_{m-3}^n - 300p_{m-2}^n + 300p_{m-1}^n - 137p_m^n}{60h} + \\ & \frac{(a\tau)^2}{2} \frac{45p_m^n - 154p_{m-1}^n + 214p_{m-2}^n - 156p_{m-3}^n + 61p_{m-4}^n - 10p_{m-5}^n}{12h^2} + \\ & \frac{(a\tau)^3}{6} \frac{35p_{m-5}^n - 205p_{m-4}^n + 490p_{m-3}^n - 590p_{m-2}^n + 355p_{m-1}^n - 85p_m^n}{20h^3} + \\ & \frac{(a\tau)^4}{24} \frac{3p_m^n - 14p_{m-1}^n + 26p_{m-2}^n - 24p_{m-3}^n + 11p_{m-4}^n - 2p_{m-5}^n}{h^4} + \\ & \frac{(a\tau)^5}{120} \frac{p_{m-5}^n - 5p_{m-4}^n + 10p_{m-3}^n - 10p_{m-2}^n + 5p_{m-1}^n - p_m^n}{h^5}. \end{aligned} \tag{16}$$

Выражение для реальной части спектра оператора имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\lambda = 1 + \frac{a\tau}{60h} & \left(-137 + 300 \cos(\alpha) - 300 \cos(2\alpha) + 200 \cos(3\alpha) - 75 \cos(4\alpha) + 12 \cos(5\alpha) \right) + \\ & \frac{(a\tau)^2}{24h^2} \left(45 - 154 \cos(\alpha) + 214 \cos(2\alpha) - 156 \cos(3\alpha) + 61 \cos(4\alpha) - 10 \cos(5\alpha) \right) + \\ & \frac{(a\tau)^3}{120h^3} \left(-85 + 355 \cos(\alpha) - 590 \cos(2\alpha) + 490 \cos(3\alpha) - 205 \cos(4\alpha) + 35 \cos(5\alpha) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(a\tau)^4}{24h^4} \left(3 - 14 \cos(\alpha) + 26 \cos(2\alpha) - 24 \cos(3\alpha) + 11 \cos(4\alpha) - 2 \cos(5\alpha) \right) + \\ & \frac{(a\tau)^5}{120h^5} \left(-1 + 5 \cos(\alpha) - 10 \cos(2\alpha) + 10 \cos(3\alpha) - 5 \cos(4\alpha) + \cos(5\alpha) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

А выражение для мнимой части спектра оператора записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\lambda = & \frac{a\tau}{60h} \left(-300 \sin(\alpha) + 300 \sin(2\alpha) - 200 \sin(3\alpha) + 75 \sin(4\alpha) - 12 \sin(5\alpha) \right) + \\ & \frac{(a\tau)^2}{24h^2} \left(154 \sin(\alpha) - 214 \sin(2\alpha) + 156 \sin(3\alpha) - 61 \sin(4\alpha) + 10 \sin(5\alpha) \right) + \\ & \frac{(a\tau)^3}{120h^3} \left(-355 \sin(\alpha) + 590 \sin(2\alpha) - 490 \sin(3\alpha) + 205 \sin(4\alpha) - 35 \sin(5\alpha) \right) + \\ & \frac{(a\tau)^4}{24h^4} \left(14 \sin(\alpha) - 26 \sin(2\alpha) + 24 \sin(3\alpha) - 11 \sin(4\alpha) + 2 \sin(5\alpha) \right) + \\ & \frac{(a\tau)^5}{120h^5} \left(-5 \sin(\alpha) + 10 \sin(2\alpha) - 10 \sin(3\alpha) + 5 \sin(4\alpha) - \sin(5\alpha) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

В (16), (17) α лежит в пределах от 0 до π . Исследуя

$$|\lambda| = \sqrt{(\operatorname{Re}\lambda)^2 + (\operatorname{Im}\lambda)^2} \quad (19)$$

для каждого конкретного значения числа Куранта $\frac{a\tau}{h}$, получаем, что $|\lambda| \leq 1$ при значениях $\frac{a\tau}{h}$ в пределах от 2 до 3.

На рис. 1–14 наклонной чертой отмечена характеристика, исходящая из точки m , $n + 1$. Для определенности все схемы приведены для положительных собственных значений. На основе проведенных исследований можно сделать вывод о целесообразности применения ограничителей и гибридных схем и о преимуществах использования интерполяции четвертого порядка по сравнению с интерполяцией пятого порядка.

6. Заключение

Проведено исследование сеточно-характеристических методов повышенных порядков на неструктурированных сетках. Проведено исследование на аппроксимацию двумерных и трехмерных разностных схем, соответствующих сеточно-характеристическому методу на треугольных и тетраэдральных сетках с интерполяцией от первого до пятого порядков включительно. Выявлены группы одномерных разностных схем, соответствующие сеточно-характеристическому методу на треугольных и тетраэдральных сетках с интерполяцией от первого до пятого порядков включительно. Проведено исследование данных схем на устойчивость.

Литература

1. Шерифф Р., Гелдарт Л. Сейсморазведка. — М.: Мир, 1987.
2. Петров И.Б., Фаворская А.В., Васюков А.В., Ермаков А.С., Беклемышева К.А., Казаков А.О., Новиков А.В. О численном моделировании волновых процессов в анизотропных средах // ДАН. — 2014. — Т. 495, № 3. — С. 285–287.

3. **Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.** Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
4. **Магомедов К.М., Холодов А.С.** Сеточно-характеристические численные методы. — М.: Наука, 1988.
5. **Холодов А.С.** Численные методы решения уравнений и систем гиперболического типа // Энциклопедия низкотемпературной плазмы (серия “Б”). — Т. VII-1, ч. 2: Математическое моделирование в низкотемпературной плазме. — М.: Изд-во “ЯНУС-К”, 2009. — С. 141–174.
6. **Иванов В.Д., Кондауров В.И., Петров И.Б., Холодов А.С.** Расчет динамического деформирования и разрушения упругопластических тел сеточно-характеристическими методами // Математическое моделирование. — 1990. — Т. 2, № 1. — С. 11–29.
7. **Петров И.Б., Тормасов А.Г., Холодов А.С.** Об использовании гибридизированных сеточно-характеристических схем для численного решения трехмерных задач динамики деформируемого твердого тела // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1990. — Т. 30, № 8. — С. 1237–1244.
8. **Квасов И.Е., Петров И.Б.** Численное моделирование волновых процессов в геологических средах в задачах сейсморазведки на высокопроизводительных ЭВМ // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2012. — Т. 52, № 2. — С. 330–341.
9. **Muratov M.V., Petrov I.B., Sannikov A.V., and Favorskaya A.V.** Grid characteristic method on unstructured tetrahedral meshes // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2014. — Vol. 54, № 5. — P. 837–847.
10. **Новацкий В.К.** Теория упругости. — М.: Мир, 1975.
11. **Shu C.W.** Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // ICASE Report. — 1997. — № 97–65. — P. 1–79.
12. **Balsara D.S., Shu C.W.** Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy // J. of Computational Physics. — 2000. — № 160. — P. 405–452.
13. **Титарев В.А.** Неявный численный метод расчета пространственных течений разреженного газа на неструктурированных сетках // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2010. — Т. 50, № 10. — С. 1811–1826.
14. **Dumbser M., Kaser M., Titarev V.A., and Toro E.F.** Quadrature-free non-oscillatory finite volume schemes on unstructured meshes for nonlinear hyperbolic systems // J. of Computational Physics. — 2007. — № 226. — P. 204–243.
15. **Tsoutsanis P., Titarev V.A., and Drikakis D.** WENO schemes on arbitrary mixed-element un-structured meshes in three space dimensions // J. of Computational Physics. — 2011. — № 230. — P. 1585–1601.
16. **Толстых А.И.** Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. — М.: Наука, 1990.
17. **Толстых А.И.** О построении схем заданного порядка с линейными комбинациями операторов // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2000. — Т. 40, № 8. — С. 1206–1220.
18. **Рогов Б.В., Михайловская М.Н.** Бикомпактные схемы четвертого порядка аппроксимации для гиперболических уравнений // ДАН. — 2010. — Т. 430. — № 4. — С. 1–5.
19. **Рогов Б.В., Михайловская М.Н.** Монотонные компактные схемы бегущего счета для систем уравнений гиперболического типа // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2012. — Т. 32, № 4. — С. 672–695.
20. **Холодов А.С.** О построении разностных схем повышенного порядка точности для уравнений гиперболического типа // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1980. — Т. 20, № 6. — С. 1601–1620.

21. **Холодов А.С., Холодов Я.А.** О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2006. — Т. 46, № 9. — С. 1638–1667.
22. **Петров И.Б., Фаворская А.В.** Библиотека по интерполяции высоких порядков на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках // Журн. информационные технологии. — 2011. — № 9. — С. 30–32.
23. **Самарский А.А.** Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971.
24. **Шокин Ю.И., Яненко Н.Н.** Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. — Новосибирск: Наука, 1985.
25. **Годунов С.К., Рябенький В.С.** Разностные схемы. Введение в теорию. — М.: Наука, 1977.

*Поступила в редакцию 6 февраля 2015 г.,
в окончательном варианте 13 мая 2015 г.*

Литература в транслитерации

1. **Sheriff R., Geldart L.** Seysmorazvedka. — М.: Mir, 1987.
2. **Petrov I.B., Favorskaya A.V., Vasyukov A.V., Ermakov A.S., Beklemysheva K.A., Kazakov A.O., Novikov A.V.** O chislennom modelirovanii volnovykh protsessov v anizotropnykh sredah // DAN. — 2014. — Т. 495, № 3. — С. 285–287.
3. **Kulikovskiy A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu.** Matematicheskie voprosy chislenного resheniya giperbolicheskikh sistem uravneniy. — М.: FIZMATLIT, 2001.
4. **Magomedov K.M., Holodov A.S.** Setochno-harakteristicheskie chislennye metody. — М.: Nauka, 1988.
5. **Holodov A.S.** Chislennye metody resheniya uravneniy i sistem giperbolicheskogo tipa // Entsiklopediya nizkotemperaturnoy plazmy (seriya “B”). — Т. VII-1, ch. 2: Matematicheskoe modelirovanie v nizkotemperaturnoy plazme. — М.: Izd-vo “YANUS-K”, 2009. — С. 141–174.
6. **Ivanov V.D., Kondaurov V.I., Petrov I.B., Holodov A.S.** Raschet dinamicheskogo deformirovaniya i razrusheniya uprugoplasticheskikh tel setochno-harakteristicheskimi metodami // Matematicheskoe modelirovanie. — 1990. — Т. 2, № 1. — С. 11–29.
7. **Petrov I.B., Tormasov A.G., Holodov A.S.** Ob ispol'zovanii gibridizirovannykh setochno-harakteristicheskikh skhem dlya chislenного resheniya trekhmernykh zadach dinamiki deformiruemogo tverdogo tela // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1990. — Т. 30, № 8. — С. 1237–1244.
8. **Kvasov I.E., Petrov I.B.** Chislennoe modelirovanie volnovykh protsessov v geologicheskikh sredah v zadachah seysmorazvedki na vysokoproizvoditel'nykh EVM // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2012. — Т. 52, № 2. — С. 330–341.
9. **Muratov M.V., Petrov I.B., Sannikov A.V., and Favorskaya A.V.** Grid characteristic method on unstructured tetrahedral meshes // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2014. — Vol. 54, № 5. — P. 837–847.
10. **Novatskiy V.K.** Teoriya uprugosti. — М.: Mir, 1975.
11. **Shu C.W.** Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // ICASE Report. — 1997. — № 97-65. — P. 1–79.
12. **Balsara D.S., Shu C.W.** Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy // J. of Computational Physics. — 2000. — № 160. — P. 405–452.

13. **Titarev V.A.** Neyavnyy chislennyy metod rascheta prostranstvennykh techeniy razrezhennogo gaza na nestruturovannykh setkah // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2010. — T. 50, № 10. — S. 1811–1826.
14. **Dumbser M., Kaser M., Titarev V.A., and Toro E.F.** Quadrature-free non-oscillatory finite volume schemes on unstructured meshes for nonlinear hyperbolic systems // J. of Computational Physics. — 2007. — № 226. — P. 204–243.
15. **Tsoutsanis P., Titarev V.A., and Drikakis D.** WENO schemes on arbitrary mixed-element un-structured meshes in three space dimensions // J. of Computational Physics. — 2011. — № 230. — P. 1585–1601.
16. **Tolstyh A.I.** Kompaktnye raznostnye skhemy i ih primeneniye v zadachah aerogidro-dinamiki. — M.: Nauka, 1990.
17. **Tolstyh A.I.** O postroenii skhem zadannogo poryadka s lineynymi kombinatsiyami operatorov // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2000. — T. 40, № 8. — S. 1206–1220.
18. **Rogov B.V., Mihaylovskaya M.N.** Bikompaktnye skhemy chetvertogo poryadka approximationsii dlya giperbolicheskikh uravneniy // DAN. — 2010. — T. 430. — № 4. — S. 1–5.
19. **Rogov B.V., Mihaylovskaya M.N.** Monotonnye kompaktnye skhemy begushchego scheta dlya sistem uravneniy giperbolicheskogo tipa // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2012. — T. 32, № 4. — S. 672–695.
20. **Holodov A.S.** O postroenii raznostnykh skhem povyshennogo poryadka tochnosti dlya uravneniy giperbolicheskogo tipa // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1980. — T. 20, № 6. — S. 1601–1620.
21. **Holodov A.S., Holodov Ya.A.** O kriteriyah monotonnosti raznostnykh skhem dlya uravneniy giperbolicheskogo tipa // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2006. — T. 46, № 9. — S. 1638–1667.
22. **Petrov I.B., Favorskaya A.V.** Biblioteka po interpolyatsii vysokikh poryadkov na nestruturovannykh treugol'nykh i tetraedral'nykh setkah // Zhurn. informatsionnye tekhnologii. — 2011. — № 9. — S. 30–32.
23. **SamarSKIY A.A.** Vvedeniye v teoriyu raznostnykh skhem. — M.: Nauka, 1971.
24. **Shokin YU.I., Yanenko N.N.** Metod differentsial'nogo priblizheniya. Primeneniye k gazovoy dinamike. — Novosibirsk: Nauka, 1985.
25. **Godunov S.K., Ryaben'kiy V.S.** Raznostnye skhemy. Vvedeniye v teoriyu. — M.: Nauka, 1977.

