

УДК 533.6.011.7

Влияние вибрации на область с газом при адиабатических и изотермических граничных условиях*

П.Т. Зубков^{1,2}, А.В. Яковенко¹

¹Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН

²Тюменский государственный университет

E-mail: annyakovenko@yandex.ru

Численно исследуется влияние вибрации на поведение совершенного вязкого газа внутри прямоугольной полости. Сравниваются процессы тепломассообмена газа в области при изотермических и адиабатических граничных условиях. Задача решается в одномерной постановке.

Ключевые слова: ударная волна, акустическая волна, совершенный газ, частота колебания, амплитуда колебания.

Введение

В различных материалах встречаются трещины, поры или пустоты, заполненные воздухом; также полости технологического происхождения обнаруживаются и в механизмах. Работа последних, как правило, сопровождается вибрацией. Вибрационное воздействие может быть также частью технологического процесса. Все это определяет актуальность детального изучения вибрационного воздействия на полости, заполненные газом. Авторами исследуется влияние вибрационного воздействия с постоянной частотой на прямоугольную полость, внутри которой находится совершенный вязкий газ. Вследствие сжимаемости среды происходит формирование акустических волн, интенсифицирующих процесс тепломассообмена [1]. Наблюдаются две доминирующие частоты колебания: заданная частота внешнего вибрационного воздействия и собственная частота системы, вызванная движением акустических волн. Возникающие колебания оказывают сильное влияние на газ, заполняющий полость. При интенсивном воздействии происходит образование ударных волн. С течением времени изменения характеристик газа выходят на установившийся режим, при котором угасает движение акустических волн, и процесс описывается только частотой внешнего воздействия. Настоящая работа посвящена в основном установившемуся режиму. При наличии теплообмена с окружающей средой установившийся режим является периодическим, условие тепловой изоляции

* Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для гос. поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-4381.2010.1).

границ рассматриваемой области приводит к неограниченному нагреву содержащегося в ней газа. Совпадение частоты акустических волн и частоты внешнего воздействия на исследуемую область ведет к возникновению резонанса, однако в данном случае рассматриваются частоты внешнего воздействия ниже резонансных.

Постановка задачи

Рассматривается область длины L с непроницаемыми границами, заполненная совершенным вязким газом с теплофизическими свойствами воздуха. Изначально газ в области находится в состоянии покоя при постоянной температуре T_0 и постоянном давлении p_0 . Система выводится из равновесия вибрационным воздействием $A \cos(\omega t)$ с постоянной частотой ω и постоянной амплитудой A . Изначально область расположена в крайнем правом положении. Термические условия на границах задаются двух типов: изотермические (случай границ, поддерживаемых при постоянной температуре T_0) и адиабатические. Коэффициенты теплопроводности, теплоемкости и вязкости считаются постоянными. Предполагается одномерность поставленной задачи.

Математическая постановка задачи

Движение газа описывается одномерной нестационарной системой уравнений гидродинамики, состоящей из законов сохранения массы, импульса и энергии в дифференциальной форме. В качестве уравнения состояния используется уравнение Клапейрона. Система уравнений записывается относительно неинерциальной системы отсчета, связанной с вибрирующей полостью. Используются следующие формулы перехода:

$$t = t', \quad x = x' - A \cos(\omega t), \quad u = u' + A \omega \sin(\omega t).$$

Здесь t, x, u — время, пространственная координата и скорость в неинерциальной системе отсчета, t', x', u' — время, пространственная координата и скорость в инерциальной системе отсчета.

С учетом вышеописанных предположений система дифференциальных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho A \omega^2 \cos(\omega t), \\ \frac{c_v \partial \rho T}{\partial t} + \frac{c_v \partial \rho u T}{\partial x} &= k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - p \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \\ p &= \rho R T. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь ρ — плотность, p — давление, T — температура, A — амплитуда вибрации, ω — частота вибрации, R — газовая постоянная, μ — коэффициент динамической вязкости, k — коэффициент теплопроводности, c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Начальные условия:

$$u|_{t=0} = 0, \quad T|_{t=0} = T_0, \quad p|_{t=0} = p_0, \quad \rho|_{t=0} = \frac{p_0}{R T_0} = \rho_0. \tag{2}$$

Граничные условия:

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=L} = 0,$$

- a) $T|_{x=0} = T_0, T|_{x=L} = T_0$ — изотермические граничные условия,
- b) $\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0} = 0, \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=L} = 0$ — адиабатические граничные условия.

Приведем систему (1)–(3) к безразмерному виду, используя следующие формулы перехода к безразмерным переменным:

$$X = \frac{x}{L}, \tau = \frac{tc_0}{L}, \tilde{p} = \frac{p}{\gamma p_0}, \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \Theta = \frac{T - T_0}{T_0}, \tilde{u} = \frac{u}{c_0}.$$

В безразмерных переменных система уравнений примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{u}}{\partial X} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{u}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{u}}{\partial X} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} + \frac{4}{3} \frac{1}{\text{Re}_a} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \tilde{\rho} \tilde{A} \Omega^2 \cos(\Omega \tau), \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tau} \Theta + \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{u} \Theta}{\partial X} &= \frac{\gamma}{\text{Pe}} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} - \gamma(\gamma - 1) \tilde{p} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{4}{3} \frac{1}{\text{Re}_a} \gamma(\gamma - 1) \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \right)^2, \\ \tilde{p} &= \frac{\tilde{\rho}(\Theta + 1)}{\gamma}. \end{aligned} \quad (4)$$

Начальные условия:

$$\tilde{u}|_{\tau=0} = 0, \Theta|_{\tau=0} = 0, \tilde{p}|_{\tau=0} = \frac{1}{\gamma}, \tilde{\rho}|_{\tau=0} = 1. \quad (5)$$

Граничные условия:

$$\tilde{u}|_{X=0} = 0, \tilde{u}|_{X=1} = 0,$$

- a) $\Theta|_{X=0} = 0, \Theta|_{X=1} = 0$ — изотермические граничные условия,

- b) $\frac{\partial \Theta}{\partial X}|_{X=0} = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial X}|_{X=1} = 0$ — адиабатические граничные условия.

Безразмерные параметры, характеризующие систему:

$\text{Re}_a = \rho_0 L c_0 / \mu$, $\text{Pe} = \rho_0 L c_p c_0 / k$, $\gamma = c_p / c_v$, $\Omega = \omega L / c_0$, $\tilde{A} = A / L$, здесь c_0 — адиабатическая скорость звука в области при температуре T_0 , Re_a — акустическое число Рейнольдса, Pe — число Пекле, γ — показатель адиабаты, Ω — безразмерная частота вибрации, \tilde{A} — безразмерная амплитуда вибрации.

Параметры расчета и численная схема

Приведем краткое описание численного метода, используемого для решения данной задачи. Схема позволяет проводить сквозной счет течений с ударными волнами. Система дифференциальных уравнений (4) с граничными и начальными условиями (5) и (6) решается путем преобразования ее в систему алгебраических уравнений (дискретных аналогов), для получения которых используется метод контрольного объема [2]. Пример контрольного объема для внутренней расчетной точки приведен на рис. 1.

Запишем систему уравнений (4) в общем виде, обозначив через $\Phi = \tilde{\rho} \tilde{u}$ поток массы,

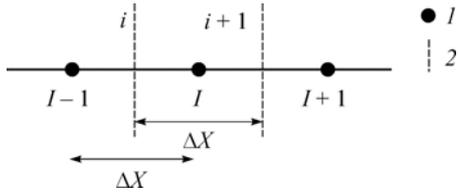


Рис. 1. Равномерная расчетная сетка.
1 — узловые точки, 2 — грань контрольного объема.

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial X} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi \tilde{u}}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) + S_{\Phi},$$

$$\frac{\partial \rho \Theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Theta \Phi}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\Gamma_{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right) + S_{\Theta},$$

$$\tilde{u} = \Phi / \tilde{\rho}, \quad \tilde{p} = \tilde{\rho}(\Theta + 1) / \gamma.$$

Переменные $\tilde{\rho}$, Θ , \tilde{p} считаются в узловых точках ($I-1, I, I+1$), а для потока массы Φ и скорости \tilde{u} используется смещенная расчетная сетка ($i-1, i, i+1$), в которой значения переменных считаются на гранях основных контрольных объемов [3]. В приведенных ниже дискретных уравнениях верхний индекс old означает, что значение переменной берется с предыдущего шага по времени.

После интегрирования уравнения движения из (4) по контрольному объему и временному интервалу будем иметь:

$$\frac{\Phi_i - \Phi_i^{\text{old}}}{\Delta \tau} \Delta X + \frac{\tilde{u}_i + \tilde{u}_{i+1}}{2} \Phi_I - \frac{\tilde{u}_{i-1} + \tilde{u}_i}{2} \Phi_{I-1} = \left(\Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_I - \left(\Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_{I-1} + (S_{\Phi})_i \Delta X.$$

Далее, применяя схему со степенным законом [3], получаем дискретный аналог уравнения движения в виде:

$$a_{\Phi} \Phi_i = b_{\Phi} \Phi_{i+1} + c_{\Phi} \Phi_{i-1} + d_{\Phi}, \quad (7)$$

здесь $a_{\Phi}, b_{\Phi}, c_{\Phi}, d_{\Phi}$ — известные числовые функции, содержащие значения переменных с предыдущей итерации.

После интегрирования по контрольному объему и временному интервалу уравнения неразрывности получаем выражение для плотности:

$$\tilde{\rho}_I = (\Phi_i - \Phi_{i+1}) \frac{\Delta \tau}{\Delta X} + \tilde{\rho}_I^{\text{old}}. \quad (8)$$

После интегрирования уравнения энергии из (4) по контрольному объему и временному интервалу будем иметь:

$$\frac{\rho_I \Theta_I - \rho_I^{\text{old}} \Theta_I^{\text{old}}}{\Delta \tau} \Delta X + \Phi_{i+1} \Theta_{i+1} - \Phi_i \Theta_i = \left(\Gamma_{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right)_{i+1} - \left(\Gamma_{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right)_i + (S_{\Theta})_I \Delta X.$$

Далее, применяя схему со степенным законом [3], получаем дискретный аналог уравнения энергии в виде:

$$a_{\Theta} \Theta_i = b_{\Theta} \Theta_{i+1} + c_{\Theta} \Theta_{i-1} + d_{\Theta}, \quad (9)$$

здесь $a_{\Theta}, b_{\Theta}, c_{\Theta}, d_{\Theta}$ — известные числовые функции, содержащие значения переменных с предыдущей итерации.

Уравнение состояния имеет вид:

$$\tilde{p}_I = \tilde{\rho}_I (\Theta_I + 1) / \gamma. \quad (10)$$

Скорость рассчитывается по формуле:

$$\tilde{u}_i = \begin{cases} \frac{\Phi_i}{\tilde{\rho}_{I-1}}, & \Phi_i > 0, \\ 0, & \Phi_i = 0, \\ \frac{\Phi_i}{\tilde{\rho}_I}, & \Phi_i < 0. \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, структура алгоритма состоит в следующем.

1. Задаются начальные значения скорости \tilde{u} , давления \tilde{p} , плотности $\tilde{\rho}$, потока массы Φ , а также необходимые граничные условия.
2. Рассчитываются коэффициенты для системы (7), далее из нее находится поле Φ с помощью метода прогонки (TDMA) [2].
3. Определяется поле плотности $\tilde{\rho}$ из (8).
4. Рассчитываются коэффициенты для системы (9), далее из нее находится поле Θ с помощью метода прогонки (TDMA) [2].
5. Определяется давление \tilde{p} с помощью уравнения состояния (10).
6. Пересчитывается скорость \tilde{u} с помощью (11).
7. Возвращение к шагу 2 до достижения полной сходимости.

Таким образом, используемый метод является неявным и консервативным, порядок аппроксимации метода за счет пересчета скорости вверх по потоку снижается до первого. Достоверность метода и его применимость для расчета движения ударных волн была проверена с помощью тестовых задач Торо [4]. Исходные данные задач Торо приведены в табл. 1, где x_0 — начальное положение разрыва, t — время. Начальные условия: в момент времени $t = 0$ при $x < x_0$ параметры газа задавались равными параметрам с индексом 1, при $x > x_0$ параметрам с индексом 2. В качестве сравнительных характеристик используются плотность ρ , скорость u , давление p и внутренняя энергия $c_v T$. Результаты расчета теста № 1 и аналитическое решение представлены на рис. 2: черной сплошной линией показано аналитическое решение, серыми кружками — численное решение в расчетных точках. Видно, что при данных начальных условиях на разрыве содержится 3–4 расчетные точки. Результаты расчетов остальных тестовых задач также показали удовлетворительное совпадение численного решения с аналитическим.

В рассматриваемой задаче вибрации осуществлялись с безразмерной амплитудой $\tilde{A} = 2$ и с безразмерными частотами $\Omega = 0,144, 0,288, 0,432, 0,576, 0,720, 0,864$. Остальные безразмерные параметры были следующими: $Re_a = 100000$, $Re = 80000$, $\gamma = 1,4$. Расчет проводился на равномерной сетке, число узлов которой подбиралось в зависимости от частоты вибрации полости. Для перечисленных частот вибрации число внутренних расчетных точек составляло 1000, 2000, 2000, 3000, 3000 и 5000 соответственно. Например, при частоте вибрационного воздействия $\Omega = 0,720$ максимальная температура достигается

Таблица 1

Исходные данные задач Торо

№	ρ_1	u_1	p_1	ρ_2	u_2	p_2	x_0	t
1	1	0,75	1	0,125	0	0,1	0,3	0,2
2	1	-2	0,4	1	2	0,4	0,5	0,15
3	1	0	1000	1	0	0,01	0,5	0,012
4	5,99924	19,5975	460,894	5,99242	-6,19633	46,095	0,4	0,035
5	1	-19,59745	1000	1	-19,59745	0,01	0,8	0,012
6	1	2	0,1	1	-2	0,1	0,5	0,8

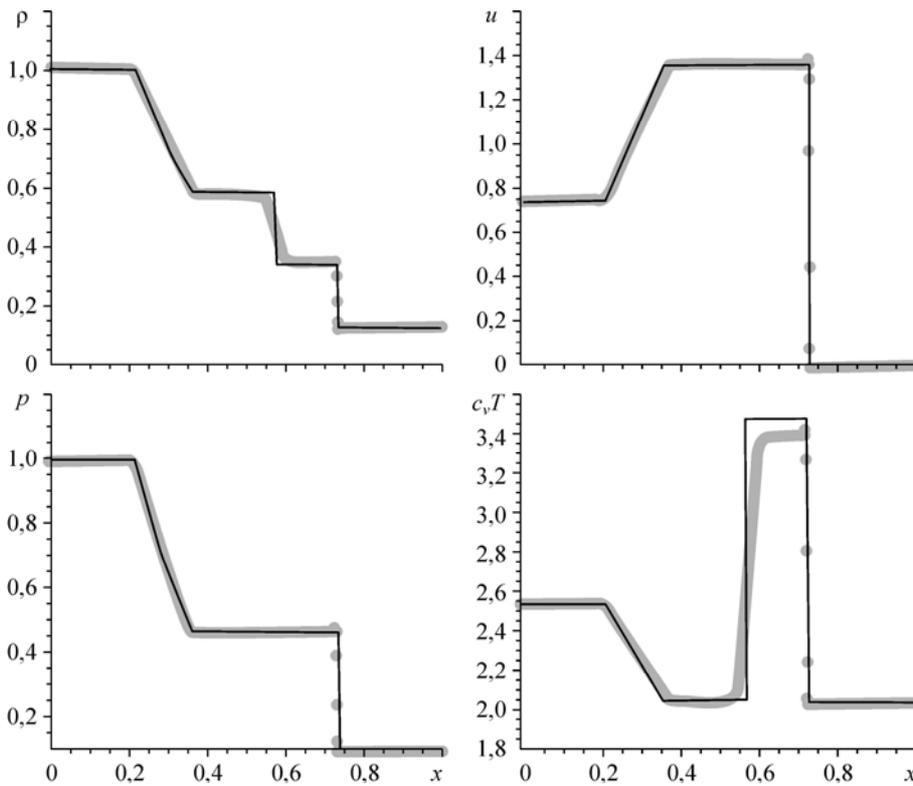


Рис. 2. Тестовый расчет.

на расстоянии 0,0005 от левой границы области. На рис. 3 показан скачок температуры в точке $X = 0,0005$ на сетках 1000 (1), 3000 (2) и 5000 (3). Сетка, состоящая из 3000 узлов, достаточна для расчета при вибрации полости с частотой $\Omega = 0,720$. Шаг по времени был взят равным $\Delta\tau = 0,1 \cdot \Delta X$ (т. е. из условия, что за время $\Delta\tau$ волна пройдет расстояние не большее ΔX , где ΔX — размер контрольного объема). В процессе счета осуществлялся контроль над соблюдением баланса массы и баланса энергии в расчетной области.

Для анализа использовались данные, выраженные в безразмерных переменных.

Анализ полученных результатов

В случае изотермических границ максимальный нагрев газа происходит в начальные моменты времени, когда в области наблюдается интенсивное волновое движение. При данных безразмерных параметрах и частотах внешнего воздействия больших, чем $\Omega = 0,432$, в области образуются ударные волны.

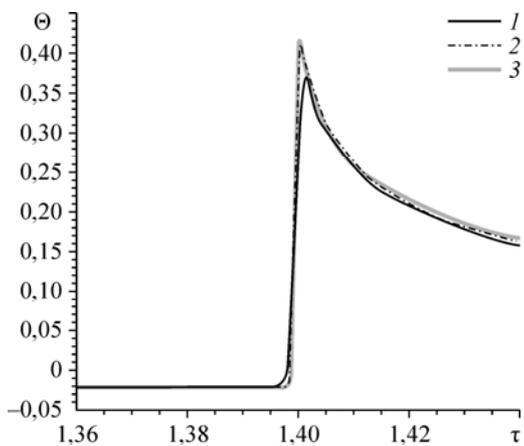


Рис. 3. Изменение температуры с течением времени при $X = 0,0005$ и $\Omega = 0,720$ на разных расчетных сетках при изотермических граничных условиях.

Рассмотрим вибрационное воздействие с частотой $\Omega = 0,720$. Полость, при $\tau = 0$ находившаяся в положении наибольшего отклонения, начинает перемещаться влево. Вследствие этого происходит приток массы к правой границе и разрежение газа у левой границы, что вызывает формирование акустических волн. Примерно через время $\tau = 1,1$ акустические волны преобразуются в ударную волну, многократно отражающуюся от границ полости. Таким образом, наблюдаются две доминирующие частоты колебания характеристик, одна из которых связана с перемещением по области акустических волн (в случае больших частот — ударных волн), другая частота вызвана внешним вибрационным воздействием. Обозначим период вибрации полости через \tilde{P}_1 , а период движения акустических волн через \tilde{P}_2 . Период вибрации полости равен $\tilde{P}_1 = 2\pi/\Omega$. Для частоты $\Omega = 0,720$ период внешней вибрации \tilde{P}_1 равен 8,72. Период колебаний акустических волн равен $\tilde{P}_2 = 2\sqrt{T_0/T_a}$, где T_a — средняя температура по области. Для обсуждаемого случая средняя температура в интересующей области мало отличается от начальной, поэтому \tilde{P}_2 приблизительно равен двум.

Представляет интерес максимальное значение температуры, наблюдающееся в рассматриваемой области. При частоте вибрации $\Omega = 0,720$ и изотермических граничных условиях максимальное значение температуры в области достигается в точке $X = 0,0005$ (третья расчетная точка) при подходе к левой границе области первой ударной волны, и равно $\Theta_{\max} = 0,414$. В табл. 2 приведены значения максимальной температуры Θ_{\max} для частот из исследуемого диапазона, время $\tau(\Theta_{\max})$ и координата $X(\Theta_{\max})$ их наблюдения. Период акустических волн \tilde{P}_2 , приведенный в табл. 2, рассчитывался как среднее значение за первый период \tilde{P}_1 движения полости. Значение \tilde{P}_2 уменьшается с увеличением частоты вибрации, поскольку повышается средняя температура в области, что приводит к увеличению средней скорости звука. Обозначим время затухания акустических волн как τ' .

На рис. 4 изображены колебания температуры в разных точках области: в близкой к границе точке $X = 0,0005$, в одной четверти области ($X = 0,25$) и в середине области ($X = 0,5$). Заметим, что амплитуда колебания температуры при $X = 0,25$ больше амплитуды колебания при $X = 0,0005$, так как на распределение температуры оказывает влияние постоянная температура границы $\Theta = 0$. Через время τ' , находящееся в диапазоне $25\tilde{P}_1 \div 30\tilde{P}_1$ (табл. 2), внутренние колебания затухают и остаются лишь колебания, соответствующие частоте внешнего воздействия. Однако должно пройти еще какое-то время до выхода процесса на периодический режим. Например, при $\Omega = 0,720$ акустические колебания затухают через время $\tau' \approx 220$, а выход на периодический режим наблюдается

Таблица 2

Сравнение частот из диапазона $0,144 \leq \Omega \leq 0,864$ при изотермических граничных условиях

Ω	Θ_{\max}	$X(\Theta_{\max})$	$\tau(\Theta_{\max})$	\tilde{P}_1	\tilde{P}_2	τ'
0,144	0,016	0,988	0,988	43,617	1,982	1100
0,288	0,062	0,989	0,955	21,809	1,960	600
0,432	0,133	0,990	0,907	14,539	1,930	450
0,576	0,224	0,992	0,851	10,904	1,900	300
0,720	0,414	0,0005	1,401	8,723	1,873	220
0,864	1,110	0,0004	1,372	7,270	1,872	190

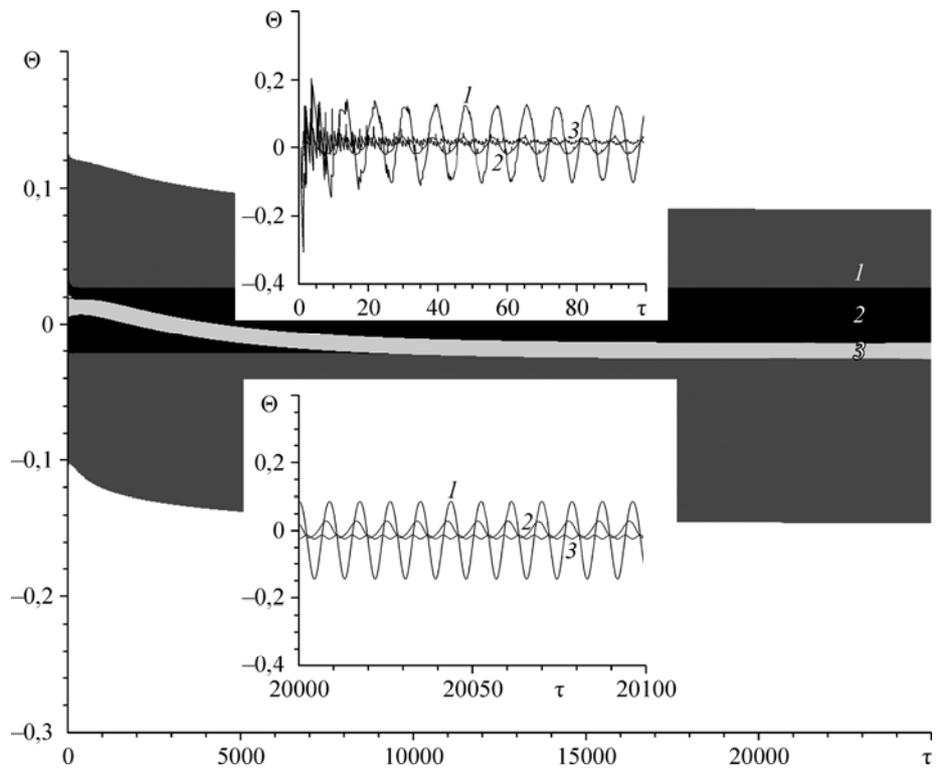


Рис. 4. Изменение температуры с течением времени при изотермических граничных условиях.
 $\Omega = 0,720$; $X = 0,25$ (1), $0,0005$ (2), $0,5$ (3).

при $\tau \approx 15000$ (рис. 4). На рис. 5 приведено изменение температуры в тех же точках области для случая теплоизолированных границ. Здесь максимальная температура достигается в ближайшей к границе расчетной точке и неограниченно растет с течением времени, так как выделяющееся за счет работы сил давления тепло не может покинуть область через границы. Таким образом, максимальная амплитуда колебания температуры (а также давления и плотности) в области при адиабатических граничных условиях наблюдается вблизи границ области и уменьшается при продвижении к ее центру. Заметим, что в установившемся режиме средние за период значения температуры в различных точках области равны (рис. 5). Акустические колебания в этом случае затухают через большее время, чем в случае изотермических границ. Например, при $\Omega = 0,720$ время затухания акустических волн $\tau' \approx 225$ (при изотермических граничных условиях $\tau' \approx 220$), при $\Omega = 0,144$ время затухания акустических волн $\tau' \approx 4500$ (при изотермических граничных условиях $\tau' \approx 1100$).

В начальные моменты времени $\tau \leq 100$ при $\Omega = 0,720$ колебания температуры практически не отличаются при изотермических и адиабатических граничных условиях, за исключением приграничных участков. Однако с течением времени температура в случае адиабатических граничных условий неограниченно растет, а в случае изотермических граничных условий ее колебания устанавливаются около некоторого значения. При меньшей же частоте $\Omega = 0,144$ отличие процессов при разных граничных условиях проявляется в более ранние моменты времени, при $\tau \approx 10$.

Рассмотрим колебания температуры в установившемся режиме при изотермических и адиабатических граничных условиях (рис. 6). Среднее значение температуры

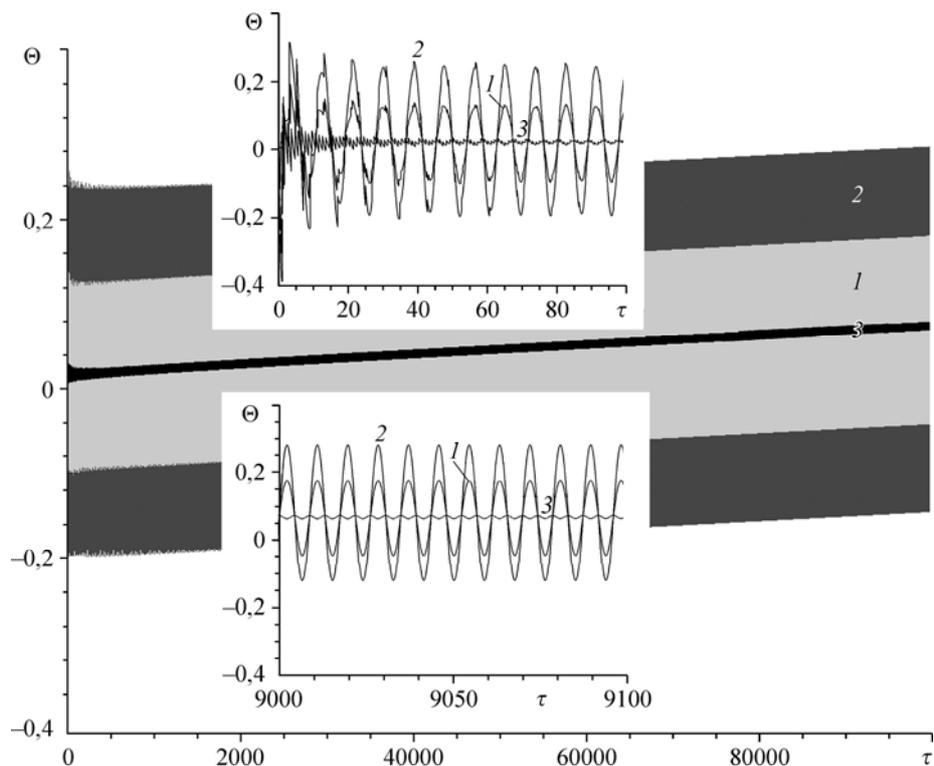


Рис. 5. Изменение температуры с течением времени при адиабатических граничных условиях.
 $\Omega = 0,720$; $X = 0,25$ (1), $0,0005$ (2), $0,5$ (3).

у границы и в центре области за период при адиабатических граничных условиях больше, чем при изотермических, и неограниченно увеличивается с течением времени. Из рис. 6 видно, что колебания температуры в центре имеют частоту, равную удвоенной частоте вибрации полости. Колебания температуры (а также давления и плотности) в расчетных точках, отдаленных от центра не более чем на $0,04$, имеют две преобладающие частоты колебания — частота внешнего воздействия и удвоенная частота внешнего воздействия (рис. 7). Колебания на расстоянии менее чем $0,4$ от границ имеют одну преобладающую частоту — частоту внешнего воздействия.

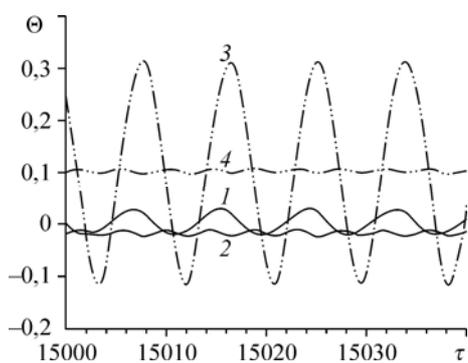


Рис. 6. Изменение температуры с течением времени в установившемся режиме.

$\Omega = 0,720$; при изотермических граничных условиях: $X = 0,0005$ (1), $0,5$ (2); при адиабатических граничных условиях: $X = 0,0005$ (3), $0,5$ (4).

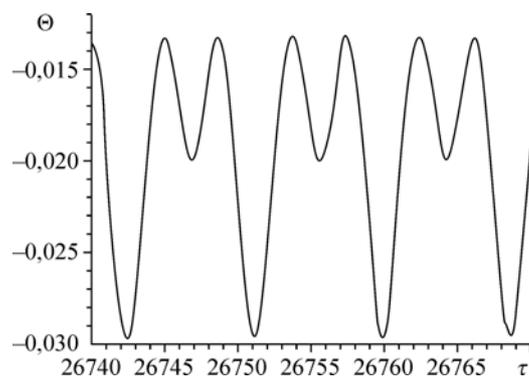


Рис. 7. Изменение температуры с течением времени при $X = 0,49$ в установившемся режиме при изотермических граничных условиях.

$\Omega = 0,720$.

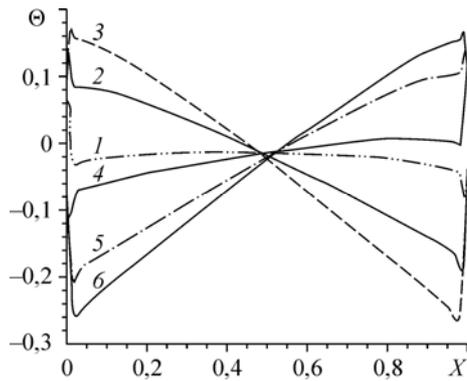


Рис. 8. Распределения температуры в зависимости от координаты в установившемся режиме при изотермических граничных условиях.

$$\Omega = 0,720; \tau = n\tilde{P}_1 \quad (1), \quad \tau = n\tilde{P}_1 + \tilde{P}_1/8 \quad (2),$$

$$\tau = n\tilde{P}_1 + \tilde{P}_1/4 \quad (3), \quad \tau = n\tilde{P}_1 + \tilde{P}_1/2 \quad (4),$$

$$\tau = n\tilde{P}_1 + 5\tilde{P}_1/8 \quad (5), \quad \tau = n\tilde{P}_1 + 3\tilde{P}_1/4 \quad (6).$$

На рис. 8 представлены распределения температуры за один период внешней вибрации в установившемся режиме. Температура в центре имеет удвоенную частоту, так как и минимум и максимум в центре области достигаются дважды за период вибрации.

Минимум достигается в моменты времени, соответствующие наибольшему скоплению массы газа у одной из границ (линии 3 и 6 на рис. 8), а максимум достигается в моменты времени, когда масса распределена по области наиболее равномерно (приблизительно отражают линии 1 и 4 на рис. 8). Колебания плотности и давления также будут иметь в центре удвоенную частоту. Причем было получено, что температура, плотность и давление изменяются синфазно.

Как показали расчеты, существует участок в центре области, в котором безразмерная температура в периодическом режиме всегда отрицательна. Для частоты $\Omega = 0,720$ температура отрицательна при $0,45 \leq X \leq 0,55$, максимальное значение температуры в периодическом режиме достигается на расстоянии $X = 0,009$ от границы области. При меньшей частоте вибрации $\Omega = 0,144$ температура отрицательна при $0,495 \leq X \leq 0,505$, максимальное значение температуры в периодическом режиме достигается на расстоянии $X = 0,025$ от границы области, т. е. ближе к центру, чем в предыдущем случае. При адиабатических граничных условиях профили температуры (плотности, давления) в установившемся режиме близки к линейным, так как не оказывает влияние постоянная температура границ.

За счет сил инерции масса относится от центра области к ее границам. Для частоты $\Omega = 0,720$ и изотермических граничных условий в установившемся режиме плотность всегда меньше начальной при $0,47 \leq X \leq 0,53$, давление всегда меньше начального при $0,46 \leq X \leq 0,54$, максимальные значения плотности и давления достигаются у границ области. На рис. 9 приведен график среднемассовой температуры Θ_b . Видно, что в случае изотермических границ есть моменты времени, когда среднемассовая температура становится меньше начальной, несмотря на то, что над газом постоянно совершается работа. На рис. 10 приведен график теплового потока Q в установившемся режиме, из которого видно, принимая во внимание приведенные ниже формулы, что среднее за период значение теплового потока через правую границу положительно, а через левую — отрицательно, это говорит о том, что в среднем за период из области выходит большее количество тепла, чем поступает через границы. Для расчета среднемассовой температуры и теплового потока в безразмерном виде использовались формулы:

$$\Theta_b = \frac{\int_0^1 \tilde{\rho} \Theta dX}{\int_0^1 \tilde{\rho} dX}, \quad Q|_{X=0} = -\frac{\gamma}{\text{Pe}} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right)_{X=0}, \quad Q|_{X=1} = -\frac{\gamma}{\text{Pe}} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right)_{X=1}.$$

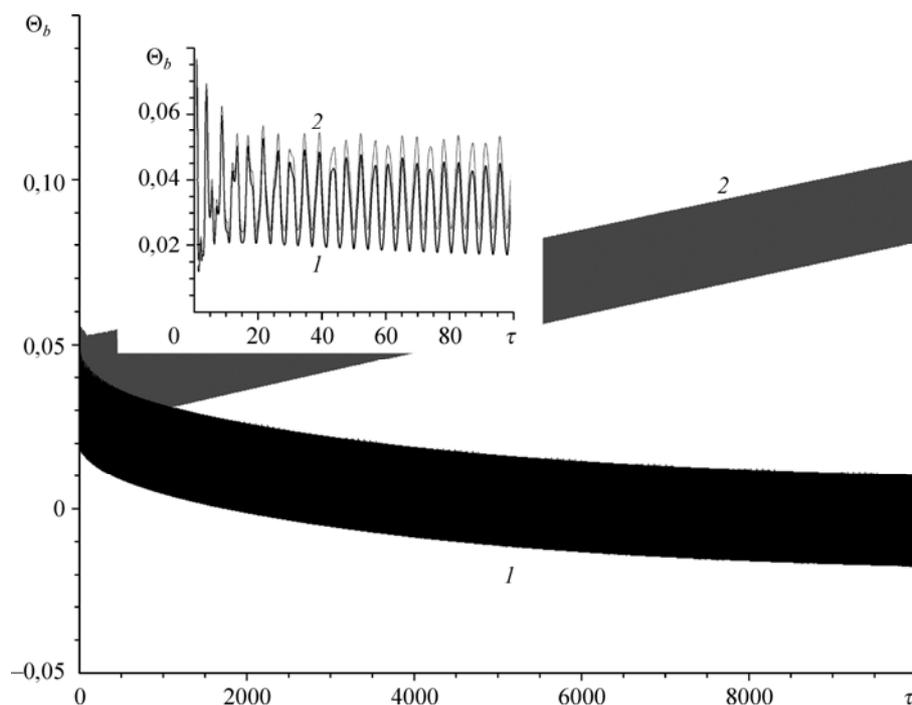


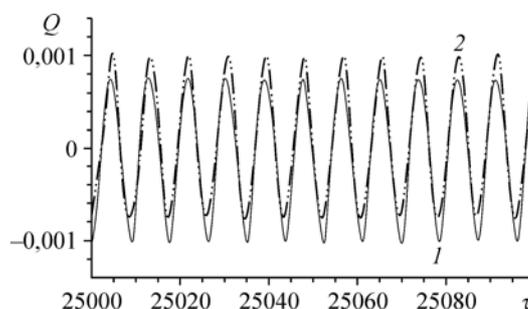
Рис. 9. Изменение среднемассовой температуры с течением времени.
 $\Omega = 0,720$; при изотермических (1) и адиабатических (2) граничных условиях.

При выходе процесса на периодический режим (в случае изотермических граничных условий) все тепло, сгенерированное в области за период, выходит через границы вместе с теплом, вошедшим в область через границы за этот период. Таким образом, суммарный прирост тепла за период в установившемся режиме в случае изотермических границ равен нулю. При адиабатических граничных условиях среднемассовая температура растет (рис. 9), так как сгенерированное тепло остается в области.

Опишем средние за период распределения характеристик газа в области. Средняя за период температура при изотермических граничных условиях положительна лишь на расстоянии $X = 0,006$ от границ области (рис. 11). Она принимает минимальные значения при $X = 0,022$ и $X = 0,978$. Средняя за период плотность меньше начальной при $0,207 < X < 0,793$ (рис. 12). Максимум средней за период плотности наблюдается у границ, также присутствуют два локальных максимума при $X = 0,019$ и $X = 0,981$. Расчеты показали, что в установившемся режиме средняя за период температура в центре на 0,19 % меньше начальной температуры, средняя за период плотность в центре меньше начальной на 2,3 %, существенно меньше начального среднее за период давление в центре — на 4,18 %. Минимальные же значения за период для температуры, плотности

Рис. 10. Изменение теплового потока с течением времени при изотермических граничных условиях в установившемся режиме.

$\Omega = 0,720$; при $X = 0$ (1), 1 (2).



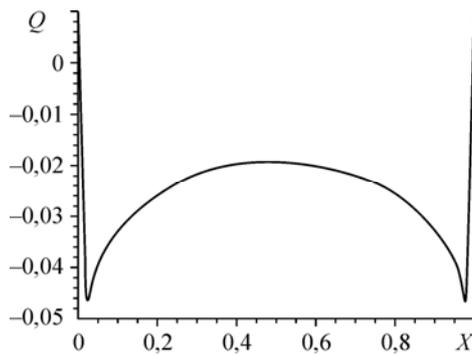


Рис. 11. Среднее за период распределение температуры в установившемся режиме при изотермических граничных условиях.

$$\Omega = 0,720.$$

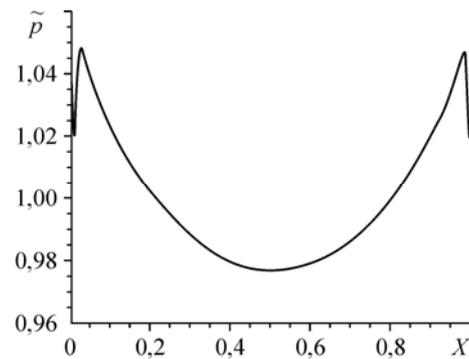


Рис. 12. Среднее за период распределение плотности в установившемся режиме при изотермических граничных условиях.

$$\Omega = 0,720.$$

и давления вблизи границ будут ниже, чем в центре области. Средняя за период скорость равна нулю.

В случае адиабатических граничных условий среднее за период распределение плотности напоминает параболу с минимумом в центре области и максимумами у границ. Средняя за период плотность в случае адиабатических границ становится меньше начальной при $0,217 < X < 0,783$. Средняя за период скорость будет так же, как и при изотермических граничных условиях, равна нулю. Средняя за период температура будет иметь максимальное значение у границ.

Как при изотермических граничных условиях, так и при адиабатических колебания скорости имеют наибольшую амплитуду в центре области. Частота колебания скорости в центре области совпадает с частотой ее колебания у границ.

Заключение

В установившемся режиме акустические колебания угасают, остаются лишь колебания, вызванные внешним воздействием. При большей частоте вибрации затухание акустических колебаний происходит раньше. В случае адиабатических граничных условий затухание акустических колебаний происходит позже, чем в случае изотермических. В установившемся режиме частота колебаний скорости совпадает с частотой вибрации; частота колебаний температуры, давления и плотности вблизи границ совпадает с частотой вибрации, а в центре области наблюдается их удвоенная частота. При изотермических граничных условиях в установившемся режиме существует участок в центре области, на котором температура, плотность и давление всегда меньше их начального значения. При адиабатических граничных условиях в центре области возникает участок, где плотность меньше ее начального значения, температура и давление во всех точках неограниченно растут.

Список литературы

1. Губайдуллин А.А., Зубков П.Т., Свиридов Е.М. Термоакустические волны, возникающие при нагреве совершенного вязкого газа // ТВТ. 2004. Т. 42, № 5. С. 753–759.
2. Патанкар С.В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах. М.: МЭИ, 2003. 312 с.
3. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 146 с.
4. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Berlin: Springer, 1999. 619 p.

Статья поступила в редакцию 16 августа 2011 г.