

УДК 539.375

ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИН В ПЕРФОРИРОВАННОМ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕМ МАССИВЕ, УПРУГИЕ СВОЙСТВА КОТОРОГО ЗАВИСЯТ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

А. Р. Вагари, В. М. Мирсалимов

Институт математики и механики НАН Азербайджана, AZ1141 Баку, Азербайджан
E-mail: mir-vagif@mail.ru

Построена математическая модель зарождения трещин в перфорированном тепловыделяющем массиве, ослабленном двоякопериодической системой охлаждающих цилиндрических каналов с круглым поперечным сечением. Решение задачи о равновесии изотропного перфорированного тепловыделяющего массива с зародышевыми трещинами, свойства которого зависят от температуры, сводится к решению систем алгебраических и нелинейных сингулярных интегральных уравнений с ядром типа ядра Коши. С использованием решения этих уравнений находятся усилия в зонах зарождения трещин. Условие появления трещины формулируется с учетом критерия предельного растяжения связей материала.

Ключевые слова: тепловыделяющий перфорированный массив, зона предразрушения, связи между берегами, зависимость упругих свойств материала от температуры.

Постановка задачи. Расчет на прочность тепловыделяющих элементов в ядерных реакторах, эксплуатируемых в сложных условиях (высокие температуры, большие мощности тепловыделения), является важной задачей механики разрушения. Тепло, выделяемое в тепловыделяющем элементе, переносится к его поверхности и отводится из него теплоносителем. Таким образом, для анализа надежности работы ядерных реакторов необходимо провести исследование напряженно-деформированного состояния и процесса разрушения тепловыделяющих элементов. В настоящее время актуальны задачи прочности твердого ядерного горючего, интерес к которым обусловлен необходимостью увеличения энерговыделения в ядерном горючем.

Основными причинами аварий в различных элементах конструкций являются дефекты типа трещин, а также недостаточное сопротивление материала зарождению и развитию в нем трещин при воздействии заданных температурно-силовых факторов. Это объясняется тем, что при изготовлении различных видов современной техники широко используются высокопрочные конструкционные материалы, склонные к хрупкому разрушению.

В работах [1–3] рассматривалась задача о термоупругом равновесии плоскости, ослабленной двоякопериодической системой отверстий, в предположении, что упругие свойства этого массива (модуль упругости E и коэффициент Пуассона материала ν) не зависят от температуры. По мере увеличения интенсивности тепловыделения q в таком массиве вокруг отверстий образуются зоны повышенных напряжений, расположение которых имеет двоякопериодический характер. В зонах повышенных напряжений могут возникнуть

поверхностные трещины. Исследование зарождения трещин в перфорированном тепловыделяющем массиве, упругие свойства которого зависят от температуры, является важной задачей механики разрушения. С увеличением тепловыделения на поверхности отверстий возникают зоны предразрушения, которые моделируются областями с ослабленными межчастичными связями в материале. Взаимодействие берегов этих областей моделируется путем введения между берегами полосы предразрушения связей с заданной диаграммой деформирования. Физическая природа таких связей и размер области предразрушения зависят от вида материала. Возникновение в рассматриваемом случае зародышевой трещины в тепловыделяющем массиве представляет собой процесс перехода области предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала. При этом размер полосы предразрушения заранее неизвестен и должен быть определен при решении задачи.

Примем следующие предположения: 1) во всем объеме массива интенсивность тепловыделения равномерна; 2) теплоотвод осуществляется только через поверхности цилиндрических каналов; 3) характеристики массива E и ν зависят от температуры; 4) на массив не действуют внешние силы, он находится под действием только внутренних термонапряжений; 5) во всех случаях напряжения, возникающие в материале массива, не превышают пределов упругости, материал является изотропным; 6) массив находится в стационарном состоянии.

Математическое описание зарождения трещин в массиве с пустотами сводится к решению плоской задачи термоупругости для перфорированного тепловыделяющего массива, когда в среде имеются полосы предразрушения, а упругие свойства зависят от температуры. Полосы предразрушения включают площадки максимальных растягивающих напряжений.

Пусть имеется тепловыделяющий массив с двоякопериодической системой круговых отверстий радиусом $\lambda < 1$ с центром в точках

$$P_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2, \quad \omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 2h e^{i\alpha}, \quad (1)$$

$$h > 0, \quad \text{Im } \omega_2 > 0 \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Здесь α — угол, образованный прямыми, соединяющими центры отверстий. Из контуров отверстий выходят симметричные прямолинейные полосы предразрушения (рис. 1). Контуров круговых отверстий (см. (1)) свободны от внешних нагрузок. Перенос тепла в твэлах осуществляется главным образом теплопроводностью, поэтому расчет температурных полей в них сводится к решению задач теории теплопроводности при наличии внутренних источников тепла [2–4].

Температура $T(x, y)$ в рассматриваемой области D , занятой материалом массива, определяется из решения уравнения теплопроводности

$$\Delta T + q/\delta = 0$$

с условием на контурах отверстий

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{h_0}{\delta} (T_0 - T).$$

Здесь Δ — оператор Лапласа; δ — теплопроводность среды; h_0 — коэффициент теплопередачи; T_0 — температура охлаждающей среды.

Вводя вместо действительных переменных x, y комплексные переменные $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, дифференциальное уравнение теории теплопроводности представим в виде

$$4 \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{q}{\delta} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, для температуры получаем выражение

$$T(x, y) = F(z) + \overline{F(z)} - qz\bar{z}/(4\delta),$$

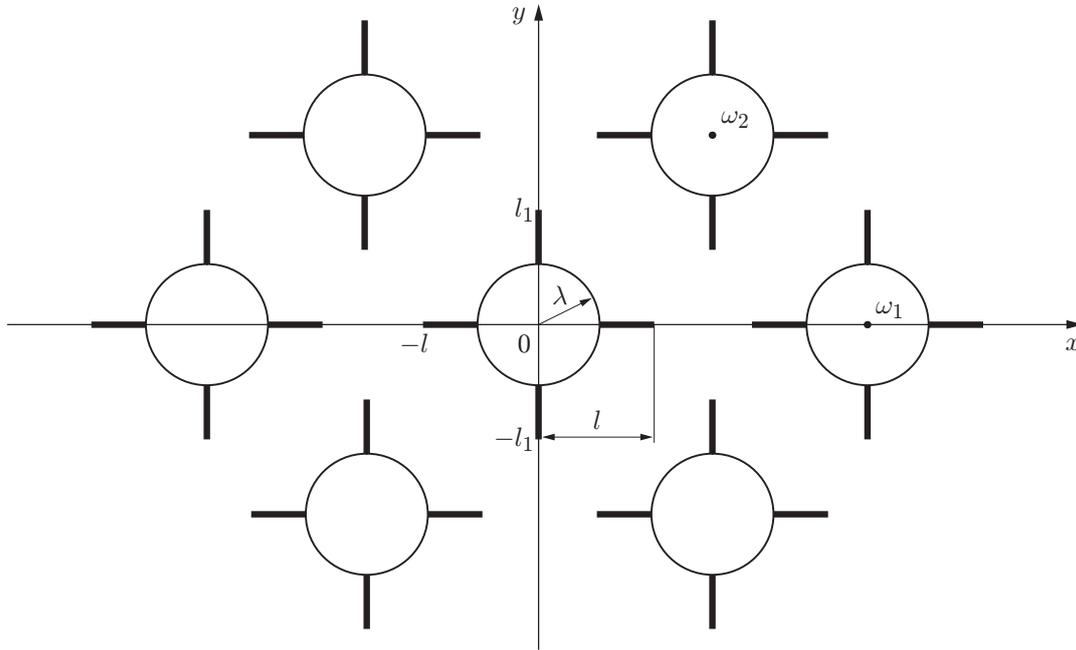


Рис. 1. Схема задачи о зарождении трещин в тепловыделяющем массиве

где $F(z)$ — аналитическая в области D функция, удовлетворяющая на контурах круговых отверстий краевому условию

$$2 \operatorname{Re} \left[e^{i\theta} \left(F'(z) - \frac{q\bar{z}}{4\delta} \right) \right] = \frac{h_0}{\delta} \left(T_0 - F(z) - \overline{F(z)} + \frac{qz\bar{z}}{4\delta} \right).$$

Аналитическую функцию будем искать в виде

$$F(z) = \beta_0 z^2 + \beta_1 \nu(z) + a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!},$$

где $\gamma(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса; $\nu(z) = - \iint \gamma(z) dz$.

Из условия симметрии относительно координатных осей получаем равенства

$$\operatorname{Im} a_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Из условий двоякопериодичности поля температур следует

$$\beta_0 = \frac{q}{16\delta\pi i} (\delta_1 \bar{\omega}_2 - \delta_2 \bar{\omega}_1), \quad \beta_1 = \frac{q}{8\delta\pi i} (\bar{\omega}_1 \omega_2 - \bar{\omega}_2 \omega_1).$$

Для определения остальных коэффициентов используется метод степенных рядов (см. [3]).

В силу симметрии граничных условий и геометрии области D , занятой материалом массива, температура и напряжения являются двоякопериодическими функциями с основными периодами ω_1 и ω_2 .

Взаимодействие берегов полосы предразрушения (связи между берегами) сдерживает зарождение трещины. Для математического описания взаимодействия берегов полосы предразрушения принимается, что между ними имеются связи, закон деформирования которых задан. При действии тепловой нагрузки на массив в связях, соединяющих берега полосы предразрушения, возникают нормальные усилия $p(x)$ и $q_x(y)$. Следовательно, к берегам полос предразрушения приложены нормальные напряжения $p(x)$ и $q_x(y)$. Эти напряжения заранее неизвестны и должны быть определены в процессе решения краевой задачи

механики разрушения с условиями на контурах отверстий и берегах полос предразрушения $L_1 = [-l, -\lambda] \cup [\lambda, l]$, $L_2 = [-l_1, -\lambda] \cup [\lambda, l_1]$ (см. рис. 1)

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_y - i\tau_{xy} = p(x) \quad \text{на } L_1, \quad \sigma_x - i\tau_{xy} = q_x(y) \quad \text{на } L_2. \quad (2)$$

Основные соотношения поставленной задачи необходимо дополнить соотношениями, связывающими раскрытие берегов полос предразрушения и усилия в связях. Эти соотношения можно представить в виде

$$v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = C(x, p)p(x) \quad \text{на } L_1, \quad u^+(0, y) - u^-(0, y) = C(y, q_x)q_x(y) \quad \text{на } L_2, \quad (3)$$

где функции $C(x, p)$ и $C(y, q_x)$ можно рассматривать как эффективные податливости связей; $v^+ - v^-$ и $u^+ - u^-$ — раскрытие берегов полос предразрушения.

Для определения предельной величины интенсивности тепловыделения, при которой происходит зарождение трещины, постановку задачи необходимо дополнить условием (критерием) появления трещины (разрыва межчастичных связей в материале). В качестве такого условия примем критерий критического раскрытия берегов полос предразрушения

$$v^+ - v^- = \delta_c \quad \text{на } L_1, \quad u^+ - u^- = \delta_c \quad \text{на } L_2, \quad (4)$$

где δ_c — характеристика сопротивления материала массива трещинообразованию.

Дополнительное условие (4) позволяет определить параметры тепловыделяющего массива, при которых появляется трещина.

Как известно, в плоской задаче теории упругости с помощью функции напряжений U условие совместности деформаций в напряжениях приводится к неоднородному дифференциальному уравнению относительно этой функции [5]. Решение краевой задачи будем искать в виде

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U_k,$$

где ε — малый физический параметр.

Используя метод возмущений [5], получаем последовательность краевых задач для U_k . Решение поставленной задачи строится по принципу суперпозиции, т. е. решение уравнений ищем в виде

$$U = U^{(1)} + U^{(2)},$$

где $U^{(1)}$ — решение задачи термоупругости для массива (без полос предразрушения) с температурным полем $T(x, y)$; $U^{(2)}$ — решение задачи в случае, когда к берегам полос предразрушения дополнительно приложены равные по величине и противоположные по знаку усилия.

Таким образом, при решении задачи о зарождении трещины в тепловыделяющем массиве сначала определяем термоупругое состояние в отсутствие полос предразрушения, вызванное наличием температурного поля, а затем находим компоненты напряжений в полосах предразрушения.

На первом этапе решения задачи с использованием принципа суперпозиции и метода возмущений получаем последовательность краевых задач для $U_k^{(1)}$

$$\begin{aligned} \Delta\Delta U_0^{(1)} &= f, \quad f = -\frac{E_0}{1-\nu_0} \alpha_* \Delta T, \quad U_0^{(1)}|_L = 0, \quad \frac{\partial U_0^{(1)}}{\partial n}\Big|_L = 0, \\ \Delta\Delta U_k^{(1)} &= \eta_{k-1}, \quad U_k^{(1)}|_L = 0, \quad \frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial n}\Big|_L = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \eta_{k-1} &= \frac{q_0}{\gamma_0} \left(\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 U_{k-1}^{(1)}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 U_{k-1}^{(1)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 U_{k-1}^{(1)}}{\partial x^2} \right) - \Delta(\mu_2 \Delta U_{k-1}^{(1)}), \end{aligned} \quad (5)$$

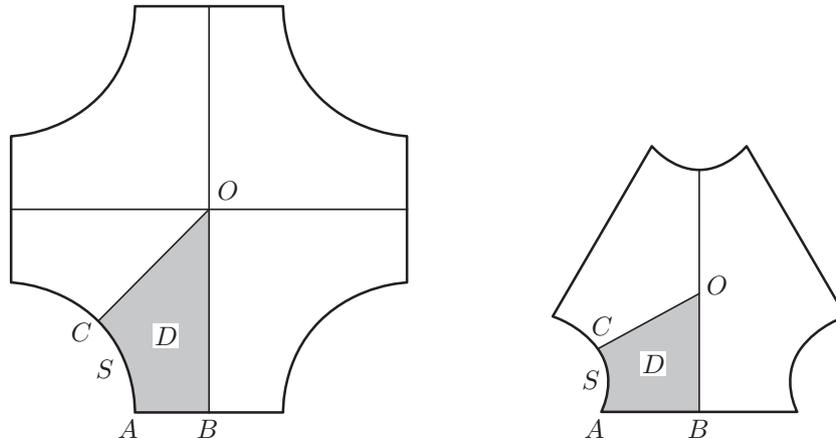


Рис. 2. Расчетные элементарные ячейки массива:
 D — рассматриваемая область

где функция η_{k-1} определена в [5]; L — контур круговых отверстий; малый параметр ε вводится с помощью соотношений

$$q_1 = q_0[1 + \varepsilon\mu_1(x, y)], \quad \gamma = \gamma_0[1 + \varepsilon\mu_2(x, y)],$$

Δ — двумерный оператор Лапласа; параметры γ , q_1 зависят от температуры и определяются соотношениями $\gamma = (1 - \nu^2)/E$, $q_1 = (1 + \nu)/E$; q_0 , γ_0 — постоянные; E_0 , ν_0 — постоянные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона; α_* — коэффициент линейного температурного расширения. Функции $\varepsilon\mu_1(x, y)$ и $\varepsilon\mu_2(x, y)$ характеризуют изменение величин q_1 и γ вследствие изменения температуры. Функции $\mu_1(x, y)$ и $\mu_2(x, y)$ нетрудно найти, зная T , $E(T)$, $\nu(T)$. Малый параметр ε имеет порядок отношения $\nu_0\beta/E_0 \ll 1$ (β — эмпирическая постоянная материала), $\nu = \nu_0(1 + \beta T)$.

Вследствие двоякопериодичности задачи определение напряжений на первом этапе сводится к решению краевой задачи для одного трансляционного элемента (рис. 2 [1]). Поскольку функция напряжений $U^{(1)}$ является двоякопериодической, можно сформулировать граничные условия для каждой элементарной ячейки. Таким образом, к уравнениям (5) добавляются следующие граничные условия:

— на дуге окружности

$$U_k^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial n} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (6)$$

— на отрезках AB , BO , OC

$$\frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial^3 U_k^{(1)}}{\partial n^3} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Следовательно, определение температурных напряжений в массиве в отсутствие полюс предразрушения сводится к решению краевых задач (5)–(7). Для решения этих задач используется вариационный метод Ритца. Приближенное решение будем искать в виде

$$U_k^{(1)} = \sum_{\nu=1}^n a_\nu^{(k)} \varphi_\nu^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где система базисных функций φ_k удовлетворяет следующим условиям:

— на дуге S

$$\varphi_\nu = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial n} = 0;$$

— функции φ_ν симметричны относительно прямолинейных границ элементарной ячейки, т. е.

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial^3 \varphi_\nu}{\partial n^3} = 0.$$

Функции φ_ν взяты из работы [1]. Для квадратной сетки отверстий функции φ_ν выбирались в виде полиномов от $\cos(2\pi x/\omega_1)$ и $\cos(2\pi y/\omega_1)$. Этим обеспечивалась четность данных функций относительно прямых $x = m\omega_1/2$ и $y = n\omega_1/2$. Кроме того, эти полиномы должны быть симметричны относительно прямой $x = y$. Для треугольной сетки отверстий выбирались тригонометрические многочлены, каждый из которых удовлетворял перечисленным выше условиям на дуге S и прямолинейных границах. Для определения постоянных $a_\nu^{(k)}$ ($\nu = \overline{1, n}$) получены системы линейных алгебраических уравнений. Найдя неизвестную функцию $U^{(1)}$, можно найти напряжения.

На втором этапе решения задачи для определения функции напряжений $U^{(2)}$ используется однородное бигармоническое уравнение. На основании формул Колосова — Мусхелишвили [6] и граничных условий (2) на контурах круговых отверстий и берегах полос предразрушения задача сводится к определению двух аналитических в области D функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ из краевых условий

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - (\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau))e^{2i\theta} = 0; \tag{8}$$

$$\Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + x\overline{\Phi'(x)} + \overline{\Psi(x)} = p(x) + f_1(x) \quad \text{на } L_1, \tag{9}$$

$$\Phi(iy) + \overline{\Phi(iy)} + iy\overline{\Phi'(iy)} + \overline{\Psi(iy)} = q_x(y) + f_2(y) \quad \text{на } L_2,$$

где $\tau = \lambda \exp(i\theta) + m\omega_1 + n\omega_2$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); x, y — аффиксы точек берегов полосы предразрушения; $f_1(x) = -\partial^2 U^{(1)}/\partial x^2$; $f_2(y) = -\partial^2 U^{(1)}/\partial y^2$.

Решение краевой задачи. Решение краевой задачи (8), (9) будем искать в виде

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \Phi_3(z), \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z) + \Psi_3(z), \tag{10}$$

где

$$\Phi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!},$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} g(x) \zeta(x-z) dx + A', \quad \Phi_3(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{L_2} g_1(y) \zeta(iy-z) dy + A'',$$

$$\Psi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} Q^{(2k)}(z)}{(2k+1)!},$$

$$\Psi_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} [\zeta(x-z) + Q(x-z) - x\gamma(x-z)] g(x) dx + B',$$

$$\Psi_3(z) = -\frac{i}{2\pi} \int_{L_2} \{ \overline{g_1(y)} \zeta(iy-z) - [Q(iy-z) + iy\gamma(iy-z)] g_1(y) \} dy + B'',$$

$\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса; $Q(z)$ — специальная мероморфная функция [7];

A, B — постоянные; $g(x), g_1(y)$ — искомые функции, характеризующие раскрытие берегов зон предразрушения:

$$g(x) = \frac{2\mu}{1+\varkappa} \frac{\partial}{\partial x} [v^+(x, 0) - v^-(x, 0)] \quad \text{на } L_1, \quad \varkappa = 3 - 4\nu,$$

$$g_1(y) = -\frac{2\mu i}{1+\varkappa} \frac{\partial}{\partial y} [u^+(0, y) - u^-(0, y)] \quad \text{на } L_2.$$

Из условий симметрии относительно координатных осей получаем равенства

$$\operatorname{Im} \alpha_{2k} = 0, \quad \operatorname{Im} \beta_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Из условий двоякопериодичности поля температур и напряжений, а также в силу самоуравновешенности задачи и периодичности главного вектора сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в области D , следует

$$(A + \bar{A})\omega_k + \bar{B}\bar{\omega}_k = (\delta_k + \bar{\delta}_k)a + (\gamma_k + \bar{\delta}_k)a + (\bar{\delta}_k - \delta_k)b + (\bar{\delta}_k - \bar{\gamma}_k)\bar{b} + \beta_2\lambda^2\delta_k + \alpha_2\lambda^2(\delta_k + \bar{\delta}_k), \quad (11)$$

где

$$a = -\frac{1}{2\pi} \int_{L_1} tg(t) dt, \quad b = -\frac{1}{2\pi} \int_{L_2} t_1g_1(t_1) dt_1, \quad A = A' + A'', \quad B = B' + B''.$$

Обозначения постоянных двоякопериодической системы те же, что и в работе [7]. Из системы (11) определяются постоянные A, B , причем эти постоянные вещественны.

Нетрудно убедиться, что общие представления (10), (11) определяют класс симметричных задач с двоякопериодическим распределением напряжений. Неизвестные функции $g(x), g_1(y)$ и постоянные α_{2k} и β_{2k} должны быть определены из краевых условий (8), (9). В силу выполнения условий двоякопериодичности система граничных условий (8) заменяется одним функциональным уравнением, например на контуре $\tau = \lambda \exp(i\theta)$, а система условий (9) — граничными условиями на L_1 и L_2 .

Для определения неизвестных коэффициентов α_{2k} и β_{2k} с использованием метода степенных рядов [7, 8] и теории вычетов находим бесконечные линейные алгебраические системы, подобные (16), (17) в [4], в которых

$$A'_0 = A_0 + B_0, \quad A_0 = -2A' - \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} g(t)f_0(t) dt, \quad f_0(t) = 2\zeta(t),$$

$$B_0 = -2A'' - \frac{i}{2\pi} \int_{L_2} g_1(t_1)\varphi_0(it_1) dt_1, \quad \varphi_0(it_1) = \zeta(it_1) - \overline{\zeta(it_1)}, \quad A'_2 = A_2 + B_2,$$

$$A_2 = -B' - \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} g(t)f_2(t) dt, \quad B_2 = B'' - \frac{i}{2\pi} \int_{L_2} g_1(t_1)\varphi_2(it_1) dt_1, \quad A'_{2k} = A_{2k} + B_{2k},$$

$$A_{2k} = -\frac{1}{2\pi} \int_{L_1} g(t)f_{2k}(t) dt, \quad k = -1, \pm 2, \dots,$$

$$B_{2k} = -\frac{i}{2\pi} \int_{L_2} g_1(t_1)\varphi_{2k}(it_1) dt_1, \quad f_2(t) = \frac{\lambda^2}{2} \gamma'(t) + t\gamma(t) - \zeta(t) - Q(t),$$

$$\begin{aligned}
 f_{2k}(t) &= \frac{(2k-1)\lambda^2}{2k!} \gamma^{(2k-1)}(t) + \frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-2)!} [\gamma^{(2k-3)}(t) - Q^{(2k-2)}(t) + t\gamma^{(2k-2)}(t)], \\
 & \quad k = 2, 3, \dots, \\
 f_{-2k}(t) &= -\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k-1)}(t), \quad k = 1, 2, \dots, \\
 \varphi_{2k}(it_1) &= \frac{\lambda^2}{2} \gamma'(it_1) + \zeta(it_1) - Q(it_1) - it_1\gamma(it_1), \\
 \varphi_{2k}(t_1) &= \frac{(2k-1)\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k-1)}(it_1) - \frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-2)!} [\gamma^{(2k-3)}(it_1) + Q^{(2k-2)}(it_1) + it_1\gamma^{(2k-2)}(it_1)], \\
 & \quad k = 2, 3, \dots, \\
 \varphi_{-2k}(t_1) &= \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \overline{\gamma^{(2k-1)}(it_1)}, \quad k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Требую, чтобы функции (10) удовлетворяли граничному условию на берегах трещины L_1 , получаем сингулярное интегральное уравнение относительно $g(x)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{L_1} g(t)K(t-x) dt + H(x) = p(x) + f_1(x) \quad \text{на } L_1, \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}
 K(x) &= 3\zeta(x) + Q(x) - x\gamma(x), \quad H(x) = A' + \bar{A}' + \bar{B}' + 2\Phi_s(x) + x\Phi'_s(x) + \Psi_s(x), \\
 \Phi_s(x) &= \Phi_1(x) + \Phi_3(x), \quad \Psi_s(x) = \Psi_1(x) + \Psi_3(x).
 \end{aligned}$$

Аналогично, требуя, чтобы функции (10) удовлетворяли граничному условию на берегах полосы предразрушения L_2 , получаем сингулярное интегральное уравнение относительно функции $g_1(y)$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{L_2} \{g_1(t_1)[i\zeta(it_1 - iy) - i\overline{\zeta(it_1 - iy)}] + \overline{g_1(t_1)} [iQ(it_1 - iy) + (it_1 - iy)\overline{\gamma(it_1 - iy)} - \\
 - i\overline{\zeta(it_1 - iy)}]\} dt_1 + N(y) = q_x(y) + f_2(y) \quad \text{на } L_2, \tag{13}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 N(y) &= A'' + \bar{A}'' + \bar{B}'' + \Phi_0(iy) + \overline{\Phi_0(iy)} + iy\overline{\Phi'_0(iy)} + \overline{\Psi_0(iy)}, \\
 \Phi_0(z) &= \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi_0(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z).
 \end{aligned}$$

Сингулярные интегральные уравнения (12), (13), а также алгебраические системы и соотношения (3) являются основными разрешающими уравнениями задачи, позволяющими определить функции $g(x)$, $g_1(y)$, коэффициенты α_{2k} , β_{2k} и усилия $p(x)$, $q_x(y)$ в связях между берегами полос предразрушения.

Методика численного решения и его анализ. В соответствии с [1] на первом этапе решения задачи было выбрано шесть базисных функций φ_ν . В расчетах использовались следующие зависимости характеристик упругости от температуры:

$$E = E_0 - \beta_1 T - \beta_2 T^2, \quad \nu = \nu_0(1 + \beta T)$$

(β_1 , β_2 , β — эмпирические постоянные, значения которых зависят от типа материала).

Линейные алгебраические системы уравнений относительно a_ν решаются методом Гаусса с выбором главного элемента. Найдя функцию напряжений, по известным формулам можно найти функции $f_1(x)$ и $f_2(y)$. Используя в основном параллелограмме периодов разложения функций $\zeta(z)$, $\gamma(z)$, $Q(z)$ и выполняя замену переменных, после ряда преобразований уравнения (12), (13) приводим к стандартному виду. Поскольку в тепловыделяющем массиве напряжения ограничены, решение каждого сингулярного интегрального уравнения (12), (13) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Используя квадратурные формулы [9, 10], каждое сингулярное интегральное уравнение можно свести к конечной системе $M + 1$ алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомых функций $g(x)$ и $g_1(y)$ в узловых точках и соотношений размеров полос предразрушения $(l - \lambda)/\lambda$ и $(l_1 - \lambda)/\lambda$. В правые части полученных конечных систем уравнений входят неизвестные значения напряжений $p(\eta_m)$, $q_x(\eta_m)$ в узловых точках, принадлежащих соответствующим полосам предразрушения. Неизвестные напряжения в связях определяются из дополнительных условий — соотношений (3). Используя полученное решение, соотношения (3) представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{1 + \varkappa} \frac{d}{dx} [C(x, p(x))p(x)] &= g(x), \\ -\frac{2\mu i}{1 + \varkappa} \frac{d}{dy} [C(y, q_x(y))q_x(y)] &= g_1(y). \end{aligned} \quad (14)$$

Требую выполнения условий (14) в узловых точках, принадлежащих полосам предразрушения, с использованием метода конечных разностей получаем еще две системы M уравнений для определения значений $p(\eta_m)$, $q_x(\eta_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$).

Поскольку размеры полос предразрушения l и l_1 неизвестны, полученная алгебраическая система уравнений является нелинейной даже в случае линейных связей. Для решения этой системы используется метод последовательных приближений [10]. В случае нелинейного закона деформирования связей для определения усилий в связях также используется итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [11]. Считается, что закон деформирования межчастичных связей в полосах предразрушения является линейным при $u^+ - u^- \leq \delta_*$ и $v^+ - v^- \leq \delta_*$.

Первый шаг итерационного процесса вычислений состоит в решении системы уравнений для линейно-упругих связей. Последующие итерации выполняются только в случаях, когда для части полос предразрушения имеют место соотношения $u^+ - u^- > \delta_*$ и $v^+ - v^- > \delta_*$. Для таких итераций решается система уравнений в каждом приближении для связей с изменяющейся вдоль берегов полос предразрушения и зависящей от величины усилий в связях эффективной податливостью, которая вычислена на предыдущем шаге расчета. Расчет эффективной податливости проводится подобно определению секундного модуля в методе переменных параметров упругости [12]. Процесс последовательных приближений заканчивается, когда усилия вдоль полос предразрушения, полученные на двух последовательных итерациях, практически не различаются.

В численных расчетах полагалось $M = 30$, что соответствует разбиению интервала интегрирования на 30 чебышевских узлов. Расчеты выполнены для правильных нормированных сеток центров отверстий. Исследовались случаи расположения отверстий в вершинах треугольной ($h = 1$, $\alpha = \pi/3$) и квадратной ($h = 1$, $\alpha = \pi/2$) сеток.

Для определения предельно равновесного состояния полос предразрушения, при котором появляется трещина, используем условие (4). С помощью полученного выше решения находим условия, определяющие предельную интенсивность внутренних источников тепла массива (параметр нагружения $q_* = \alpha_* E_0 q / [\delta(1 - \nu_0)]$, где δ — теплопроводность массива), при которой в точке $x = \pm \lambda$ или $y = \pm \lambda$ образуется трещина:

$$C(\lambda, p(\lambda))p(\lambda) = \delta_c, \quad C(\lambda, q_x(\lambda))q_x(\lambda) = \delta_c. \quad (15)$$

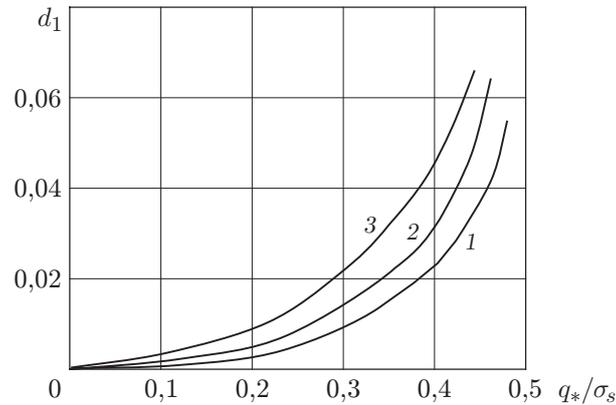


Рис. 3. Зависимость относительной длины полосы предразрушения d_1 от интенсивности тепловыделения q_*/σ_s при различных значениях радиуса отверстия: 1 — $\lambda = 0,3$; 2 — $\lambda = 0,4$; 3 — $\lambda = 0,5$

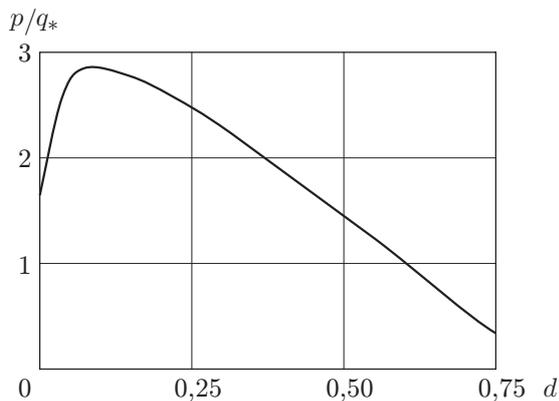


Рис. 4

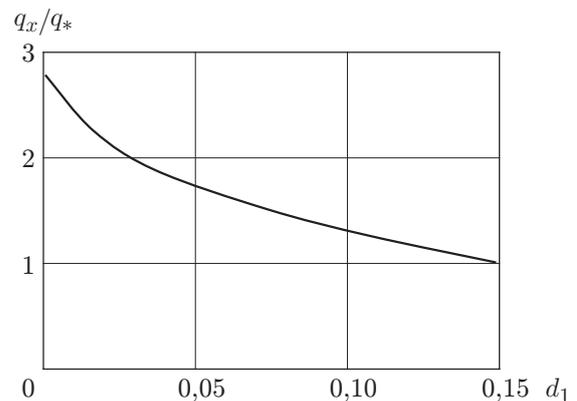


Рис. 5

Рис. 4. Зависимость усилий в связях p/q_* от относительной длины d полосы предразрушения при $\lambda = 0,5$

Рис. 5. Зависимость усилий в связях q_x/q_* от относительной длины d_1 полосы предразрушения при $\lambda = 0,5$

Решение объединенной алгебраической системы с условиями (15) позволяет определить критическое значение интенсивности внутренних источников тепла, размеры полос предразрушения и усилия в связях в состоянии предельного равновесия, при котором в массиве образуются трещины.

На рис. 3 представлена зависимость относительной длины полосы предразрушения $d_1 = (l_1 - \lambda)/\lambda$ от безразмерной величины интенсивности тепловыделения q_*/σ_s для треугольной сетки отверстий (σ_s — предел текучести материала на растяжение).

На рис. 4, 5 показаны зависимости усилий в связях p/q_* и q_x/q_* от относительных длин полосы предразрушения $d = (l - \lambda)/\lambda$, $d_1 = (l_1 - \lambda)/\lambda$ соответственно для треугольной сетки отверстий при $\lambda = 0,5$.

Анализ предельно равновесного состояния тепловыделяющего массива, при котором появляется трещина, сводится к параметрическому исследованию объединенной алгебраической системы и критерия появления трещины (15) при различных законах деформирования связей, упругих параметрах $E(T)$, $\nu(T)$ материала и геометрических характеристиках массива.

Использование модели зоны предразрушения со связями между берегами позволяет исследовать распределение усилий в связях при различных законах деформирования; провести анализ предельно-равновесного состояния полос предразрушения с учетом деформационного критерия разрушения; оценить критическую интенсивность внутренних источников тепла и трещиностойкость материала; определить условия равновесия массива и увеличения размеров полос предразрушения, а также условия зарождения трещин на основе результатов анализа предельного состояния с учетом механических параметров связей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Соболев С. Л., Мухина Г. В.** Определение термических напряжений в среде с пустотами // Атом. энергия. 1958. Т. 5, вып. 2. С. 178–181.
2. **Гольденблат И. И.** Расчеты температурных напряжений в ядерных реакторах / И. И. Гольденблат, Н. А. Николаенко. М.: Госатомиздат, 1962.
3. **Фильштинский Л. А.** Задачи теплопроводности и термоупругости для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий // Тепловые напряжения в элементах конструкций. Киев: Наук. думка, 1964. Вып. 4. С. 103–112.
4. **Мирсалимов В. М.** Зарождение трещин в перфорированном тепловыделяющем массиве // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 5. С. 121–133.
5. **Ломакин В. А.** Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1976.
6. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
7. **Григолюк Э. И.** Перфорированные пластины и оболочки / Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. М.: Наука, 1970.
8. **Мирсалимов В. М.** Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами. Баку: Элм, 1984.
9. **Панасюк В. В.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. Киев: Наук. думка, 1976.
10. **Мирсалимов В. М.** Неоднородные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987.
11. **Ильюшин А. А.** Пластичность. М.: Гостехтеоретиздат, 1948.
12. **Биргер И. А.** Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 51–73.

*Поступила в редакцию 30/XII 2010 г.,
в окончательном варианте — 27/IX 2011 г.*