Формула (11) показывает, что эффект движения жидкости по градиенту в точке $x = H$ существенно связан с наличием испарения на другом конце образца $x = 0$. Действительно, желая обнаружить эффект, следует задавать $Q(0, H) \geqslant 0$, ибо в противном случае $Q(0, H) < 0$ уменьшение влажности $u(t, H)$ может быть просто следствием откачки влаги. Но тогда при $\varphi'(x) < 0$ имеем независимо от значения параметра $a$ неравенство $\lambda > 0$, $(\delta = 0)$. Правда и в этом случае можно добиться отрицательности правой части (11) за счет специального выбора $\varphi(x)$, сохраняя, однако, неравенство $\varphi(H) < \varphi(0)$. Такая функция $\varphi(x)$ должна иметь последовательно минимум и максимум при приближении $x$ к точке $H$, что, вероятно, выполнить экспериментально довольно затруднительно. Кроме того, при больших перепадах влажности в образце предположение о постоянстве коэффициента диффузии $D$ уже физически не оправдано. Отметим, что все известные экспериментальные проверки изучаемого эффекта проводились при сильном испарении с поверхности $x = 0$.

Пусть, наконец, условие (5) не выполнено. Тогда формулы (3) и (4) сохраняются при $a < \infty$. Однако представление (2) при $a = \infty$ (диффузионная модель) приобретает другой вид

$$u(t, H) = \varphi(H) + \lambda_0 t + [f_2 - \beta\varphi(H) - D\varphi'(H)]\left(\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi D}} - \frac{\alpha t}{D^2}\right) + o(t)$$

Отсюда следует, что рост или убывание $u(t, H)$ при малых $t$ хотя и зависит по-прежнему от параметров начального распределения только в одной точке $x = H$, но происходит быстрее, чем прежде, так как $\sqrt{t} \gg t$.

В заключение можно отметить, что, зная параметры задачи (1) и измерив величину $\lambda$, можно из (3) (или (4)) определить величину коэффициента $a^{-2}$ в уравнении (1).

Поступила 1 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ромм Е. С. Фильтрационные свойства трещиноватых горных пород. М., «Недра», 1966.
2. Янгарбер В. А. О смешанной задаче для модифицированного уравнения влагопереноса, ПМТФ, 1967, № 1.

---

# ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА РАСТВОРЕНИЯ И ВЫМЫВА СОЛЕЙ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ С БОЛЬШИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ КРИТЕРИЯ ПЕКЛЕ

*В. И. Пеньковский*

*(Новосибирск)*

Если скорость фильтрации раствора значительно больше скорости диффузии растворенного вещества, то одномерная задача растворения и вымыва солей в грунтах сводится к интегрированию системы уравнений вида [1]

$$vC_x + \sigma C_t - a_1\sigma N^\alpha (C_* - C) = 0$$

$$N_t + a_1 N^\alpha (C_* - C) = 0 \qquad (0.1)$$

Здесь $v = \text{const}$ скорость фильтрации; $\sigma$ — пористость; $\alpha \geqslant 0$, $a_1 > 0$ — константы, зависящие от характера засоленности грунта; $C = C(x, t)$ — концентрация раствора; $N = N(x, t)$ — содержание солей, находящихся в твердой фазе в единице объема грунта; $C_*$ — концентрация предельного насыщения; $x$ — координата; $t$ — время.

К уравнениям, аналогичным системе (0.1), приводят при некоторых допущениях задачи о потоке суспензий в пористой среде, сопровождающемся явлениями кольматажа — суффозии [2].

Уравнения (0.1) представляют собой квазилинейную (при $\alpha \neq 0$) систему гиперболического типа с двумя семействами характеристик

$$x = \text{const}, \quad x - vt / \sigma = \text{const}$$

Переходя к безразмерным величинам

$$c = C / C_*, \quad n = N / C_*, \quad a = C_*^{\alpha} \sigma l a_1 / v$$

где $l$ — некоторый характерный линейный размер, и вводя замену независимых переменных формулами

$$x_1 = x / l, \quad x_2 = (x - vt / \sigma) / l \tag{0.2}$$

запишем (0.1) в виде

$$\frac{\partial c}{\partial x_1} - \frac{\partial n}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial n}{\partial x_2} = a(1 - c)\, n^{\alpha} \tag{0.3}$$

Заметим, что в упомянутой выше работе [1] приводятся решения некоторых задач для системы (0.1) при $\alpha = 0$, $0.5$ в предположении, что величиной $\sigma c_t$ можно пренебречь. Ниже рассмотрим аналогичные задачи, свободные от этого ограничения. При этом оставим в стороне несколько тривиальный случай $\alpha = 0$.

1. **Фильтрация пресной воды в сухой засоленный грунт**. В этом случае требуется решить систему (0.3) в области $x_1 > 0$, $x_2 < 0$ при условиях

$$c = 0, \quad x_1 = 0, \; x_2 \leqslant 0; \qquad n = F(x_1), \quad x_1 \geqslant 0, \; x_2 = 0 \tag{1.1}$$

Предположим, что $F(x_1)$ — дифференцируемая функция.

Как будет видно из дальнейшего, решения задачи (0.3) — (1.1) будут качественно различны в зависимости от того, будет ли $\alpha < 1$ или $\alpha \geqslant 1$.

а) Положим $\alpha = 1$. Определяя функцию $c$ из второго уравнения системы (0.3)

$$c = 1 - \frac{1}{a} \frac{\partial \ln n}{\partial x_2} \tag{1.2}$$

и подставляя ее в первое уравнение, найдем

$$\frac{1}{a} \frac{\partial^2 \ln n}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial n}{\partial x_2} = 0$$

Интегрируя это по $x_2$, получаем

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \ln n}{\partial x_1} + n = f_1(x_1) \tag{1.3}$$

где $f_1(x_1)$ — произвольная функция.

Легко видеть, что второе условие (1.1) дает

$$f_1(x_1) = \frac{1}{a} \frac{\partial \ln F(x_1)}{\partial x_1} + F(x_1)$$

Подставляя это выражение в (1.3) и интегрируя полученное в результате подстановки уравнение, найдем

$$\frac{n}{F - n} = f_2(x_2) \exp\left\{a \int_0^{x_1} F\, dx\right\} \tag{1.4}$$

Здесь $f_2(x_2)$ — произвольная функция.

Полагая в (1.2) $x_1 = 0$, используя условия (1.1) и интегрируя полученное выражение, найдем

$$n|_{x_1=0} = F(0) \exp(a x_2)$$

Это дает возможность определить из (1.4) функцию $f_2$

$$f_2 = [1 - \exp(a x_2)]^{-1} \exp(a x_2)$$

а с ней и искомую функцию $n(x_1, x_2)$

$$n(x_1, x_2) = F(x_1) \exp\left(a \int_0^{x_1} F\, dx\right) \left[\exp(-a x_2) + \exp\left(a \int_0^{x_1} F\, dx\right) - 1\right]^{-1} \tag{1.5}$$

Распределение концентрации раствора в каждый момент времени найдем из формулы (1.2)

$$c = \left[\exp\left(a \int_0^{x_1} F\, dx\right) - 1\right] \left[\exp(-a x_2) + \exp\left(a \int_0^{x_1} F\, dx\right) - 1\right]^{-1} \tag{1.6}$$

Подстановка (0.2) в (1.5) и (1.6) и переход к размерным величинам завершает решение исходной физической задачи.

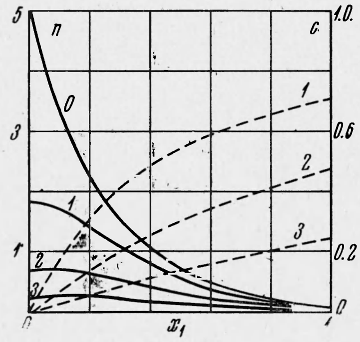
На фиг. 1 сплошной и пунктирной линиями представлены графики зависимостей (1.5) и (1.6) соответственно для случая

$$a = 1, \qquad \tau = \frac{vt}{l\sigma} = 1,\ 2,\ 3, \qquad F(x_1) = 5\exp(-4x_1)$$

б) Рассмотрим теперь случай $\alpha < 1$. Ради простоты выкладок положим $\alpha = 0.5$; $F(x_1) = n_0 = \mathrm{const}$.

Поступая аналогично предыдущему, имеем

$$\partial n / \partial x_1 = a n^{1/2}\ (n_0 - n)$$




Фиг. 1

Разделяя переменные и интегрируя, найдем

$$(n_0^{1/2} + n^{1/2})(n_0^{1/2} - n^{1/2})^{-1} = f_3(x_2)\exp(a x_1 n_0^{1/2}) \quad (1.7)$$

При $x_1 = 0$, $c = 0$ из второго уравнения системы (0.3) получаем

$$\left.\frac{\partial n}{\partial x_2}\right|_{x_1=0} = a n^{1/2}|_{x_1=0}$$

После интегрирования с учетом краевого условия отсюда найдем

$$n^{1/2}|_{x_1=0} = {}^1\!/_2 a x_2 + n_0^{1/2} \quad (1.8)$$

Полагая в формуле (1.7) $x_1 = 0$ и сравнивая с выражением (1.8), определяем функцию $f_3$

$$f_3 = -\frac{2}{ax_2}\left(2n_0^{1/2} + \frac{ax_2}{2}\right)$$

и, следовательно, формула (1.7) переписывается в виде

$$n^{1/2} = n_0^{1/2}\,\frac{n_0^{1/2} + ax_2[1 + \exp(-an_0^{1/2}x_1)]/4}{n_0^{1/2} + ax_2[1 - \exp(-an_0^{1/2}x_1)]/4} \quad (1.9)$$

а функция $c$ находится из второго уравнения системы (0.3)

$$c(x_1, x_2) = 1 - n_0\exp(-an_0^{1/2}x_1)\{n_0^{1/2} + ax_2[1 - \exp(-an_0^{1/2}x_1)]/4\}^{-2} \quad (1.10)$$

Легко видеть, что

$$n(0,\ -2n_0^{1/2}/a) = 0$$

и система (0.3) вырождается. Предположим, что существует линия $x_2 = F(x_1)$, проходящая через точку $(0,\ -2n_0^{1/2}/a)$ такая, что

$$n(x_1, x_2) = c(x_1, x_2) = 0, \qquad (x_2 = F(x_1)) \quad (1.11)$$

Обозначая через $n^+$, $c^+$ функции, определяемые формулами (1.9) и (1.10) соответственно и через $c^-$, $n^-$ искомые функции, определенные в области, ограниченной характеристикой $x_2 = -2n_0^{1/2}/a$ и линией $x_2 = F(x_1)$, согласно выражению (1.7) будем иметь

$$(n^-)^{1/2} = n_0^{1/2}[f_4(x_2) - \exp(-an_0^{1/2}x_1)][f_4(x_2) + \exp(-an_0^{1/2}x_1)]^{-1} \quad (1.12)$$

Требуя выполнения условия непрерывности функции $n$ на упомянутой характеристике, получим

$$f_4(-2n_0^{1/2}/a) = f_3(-2n_0^{1/2}/a) = 1 \quad (1.13)$$

Подставляя (1.12) во второе уравнение системы (0.3), находим

$$c = 1 - \frac{4n_0^{1/2}f_4'\exp(-an_0^{1/2}x_1)}{a[f_4 + \exp(-an_0^{1/2}x_1)]^2} \qquad \left(f_4' = \frac{df_4}{dx_2}\right)$$

Из условий (1.11), выписанных для $n^-$, $c^-$ следует, что уравнение искомой линии может быть записано в виде

$$x_1 = -\, a^{-1} n_0^{-1/2} \ln f_4$$

где функция $f_4(x_2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$f_4' \,/\, f_4 = a n_0^{-1/2}$$

Интегрируя это уравнение с учетом начального условия (1.13), найдем

$$f_4 = \exp\,(2 + a x_2 n_0^{-1/2})$$

Таким образом, искомая линия — прямая, задаваемая уравнением

$$x_1 = -\, n_0^{-1/2}\,(2 + a x_2 n_0^{-1/2}) \,/\, a$$

а окончательное решение задачи записывается в виде

$$c(x_1, x_2);\ n(x_1, x_2) = \begin{cases} c^+, \quad n^+, \quad -2n_0^{1/2}/a \leqslant x_2 \leqslant 0, \quad x_1 > 0 \\ c^-, \quad n^-, \quad -(2n_0^{1/2}/a + n_0 x_1) < x_2 \leqslant -2n_0^{1/2}/a, \quad x_1 > 0 \\ 0, \quad 0, \quad x_2 \leqslant -(2n_0^{1/2}/a + n_0 x_1), \quad x_1 > 0 \end{cases}$$

Из приведенных решений видно, что в случае $\alpha < 1$ при промывках почвенного слоя, начиная с некоторого момента времени, появится расширяющаяся зона, свободная от солей. В случае $\alpha \geqslant 1$ такой зоны не будет, хотя содержание солей в твердой фазе стремится к нулю с течением времени.

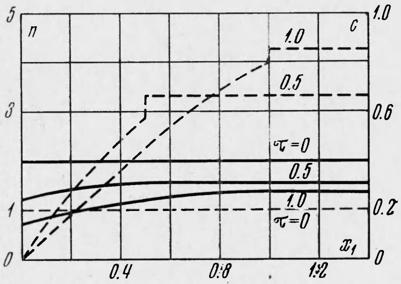
2. **Фильтрация в грунт, содержащий частично растворенные соли.** Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в порах образца грунта содержался раствор соли концентрации $c_0 = \mathrm{const} < 1$ и соль в твердой фазе с плотностью распределения $n_0 = \mathrm{const} > 0$, а при $t > 0$ на торце $x_1 = 0$ началась с постоянным расходом подача пресной воды. Пусть далее тип засоления соответствует случаю $\alpha = 1$. В плоскости переменных $x_1 x_2$, вводимых формулами (0.2), задача растворения и вымыва солей формулируется так: найти функции $c(x_1, x_2)$, $n(x_1, x_2)$, удовлетворяющие системе

$$\frac{\partial c}{\partial x_1} = \frac{\partial n}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial n}{\partial x_2} = a n (1 - c) \tag{2.1}$$

в области $x_1 > 0$, $x_2 < x_1$ кроме линии $x_2 = 0$ и условиям

$$c = c_0, \quad n = n_0, \quad x_1 = x_2 \quad (x_1 > 0)$$

$$c = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 \leqslant 0 \tag{2.2}$$




Фиг. 2

От функции $n$ потребуем непрерывности во всей области определения. Как следует из условий (2.2) и из гиперболичности системы (2.1), функция $c$ будет претерпевать разрыв первого рода вдоль характеристики $x_2 = 0$.

Обозначим через $c^+$, $n^+$ и $c^-$, $n^-$ — функции, удовлетворяющие системе (2.1) и определенные в областях $D_1 : \{0 < x_2 < x_1\}$ и $D_2 : \{x_1 > 0,\ x_2 < 0\}$ соответственно. Согласно выражениям (1.2) и (1.3) имеем

$$\frac{1}{a}\frac{\partial \ln n^\pm}{\partial x_1} + n^\pm = f_1^\pm(x_1), \qquad c^\pm = 1 - \frac{1}{a}\frac{\partial \ln n^\pm}{\partial x_2} \tag{2.3}$$

Для определения $f_1^+$ продифференцируем вдоль прямой $x_2 = x_1$ равенство $n^+|_{x_1 = x_2} = n$

$$\left[\frac{\partial n^+}{\partial x_1} + \frac{\partial n^+}{\partial x_2}\right]_{x_1 = x_2} = 0$$

Подставляя это в (2.3) и принимая во внимание условия (2.2), найдем

$$f_1^+ = c_0 + n_0 - 1$$

Пусть $c_0 + n_0 - 1 \neq 0$. Разделяя переменные и интегрируя, из первого уравнения системы (2.3) получим

$$n^+ (c_0 + n_0 - 1 - n^+)^{-1} = \exp\,[(c_0 + n_0 - 1)\, a x_1] \,/\, f_2^+(x_2)$$

Функция $f_2^+$ находится из граничного условия на линии $x_2 = x_1$

$$f_2^+ = -(1 - c_0)\exp[(c_0 + n_0 - 1)\,x_2] / n_0$$

Таким образом, в области $D_1$

$$n = n^+ = \frac{n_0(n_0 + c_0 - 1)}{n_0 - (1 - c_0)\exp[-a(c_0 + n_0 - 1)(x_1 - x_2)]}$$

$$c = c^+ = 1 - \frac{(1 - c_0)(c_0 + n_0 - 1)}{n_0 - (1 - c_0)\exp[-a(c_0 + n_0 - 1)(x_1 - x_2)]}$$

Условие непрерывности функции $n$ на характеристике $x_2 = 0$ дает

$$n^+ = n^-, \quad x_2 = 0; \qquad \frac{\partial n^+}{\partial x_1} = \frac{\partial n^-}{\partial x_1}, \quad x_2 = 0$$

Отсюда и из (2.3) следует:

$$f_1^- = f_1^+$$

$$n^-(c_0 + n_0 - 1 - n^-)^{-1} = \exp[(c_0 + n_0 - 1)\,ax_1]/f_2^-(x_2) \tag{2.4}$$

причем, произвольная функция $f_2^-$ должна удовлетворять условию

$$f_2^-(0) = f_2^+(0) = -(1 - c_0) / n_0 \tag{2.5}$$

Подставляя (2.4) во второе уравнение системы (2.3) и пользуясь условием (2.2), получаем дифференциальное уравнение

$$df_2^- / dx_2 = -a(f_2^- + 1)$$

интегралом которого при условии (2.5) будет

$$f_2^- = (c_0 + n_0 - 1)\exp(-ax_2) / n_0 - 1$$

Следовательно, в области $D_2$

$$n = n^- = \frac{n_0(c_0 + n_0 - 1)}{n_0 + [(c_0 + n_0 - 1)\exp(-ax_2) - n_0]\exp[-(c_0 + n_0 - 1)\,ax_1]}$$

$$c = c^- = n_0\,\frac{1 - \exp[-(c_0 + n_0 - 1)\,ax_1]}{n_0 + [(c_0 + n_0 - 1)\exp(-ax_2) - n_0]\exp[-(c_0 + n_0 - 1)\,ax_1]}$$

В заключение приведем решение задачи (2.1), (2.2) для случая $n_0 + c_0 = 1$:

$$\left.\begin{aligned} n &= n^+ = n_0[an_0(x_1 - x_2) + 1]^{-1} \\ c &= c^+ = 1 - n^+ \end{aligned}\right\} \quad (x_1, x_2) \in D_1$$

$$\left.\begin{aligned} n &= n^- = n_0[n_0ax_1 + \exp(-ax_2)]^{-1} \\ c &= c^- = an_0x_1[an_0x_1 + \exp(-ax_2)]^{-1} \end{aligned}\right\} \quad (x_1, x_2) \in D_2$$

На фиг. 2 представлены графики распределения солей в твердой фазе (сплошные линии) и концентрации грунтовой воды в почвенном слое (пунктирные линии) для случаев $a = 1$, $\tau = 0.5$, $1{,}0$ $n_0 = 2$, $c_0 = 0.2$.

Поступила 15 VIII 1968

## ЛИТЕРАТУРА

1. Веригин Н. Н. О растворении и вымыве солей при фильтрации воды в грунтах. Научн. докл. высш. школы, Строительство, 1958, № 2.
2. Litwiniszyn J. On suspension flow in a porous medium, Int. J. Engng Sci. 1967, vol. 5, No. 5.