УДК 532.517.4

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ ОТ МГНОВЕННОГО ЛОКАЛИЗОВАННОГО ИСТОЧНИКА В ЗОНЕ ТУРБУЛЕНТНОГО СМЕШЕНИЯ В ПИКНОКЛИНЕ

О. Ф. Воропаева, Г. Г. Черных

Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск

Выполнено численное моделирование динамики пассивной примеси от мгновенного локализованного источника в зоне турбулентного смешения в пикноклине. Источник имитируется заданием начального распределения осредненной концентрации примеси в виде финитной функции, принимающей постоянное значение в круге малого радиуса. Результаты расчетов показывают возможность ситуаций, когда распространение пассивной примеси в значительной мере определяется конвективным течением, генерируемым зоной турбулентного смешения.

Введение. Изучение эволюции областей турбулизованной жидкости — зон турбулентного смешения — в однородной и стратифицированной средах представляет интерес в связи с решением ряда задач геофизической гидродинамики [1, 2]. Развитие области турбулизованной жидкости в стратифицированной среде характеризуется первоначальным расширением зоны смешения вследствие турбулентной диффузии, последующим прекращением ее роста в вертикальном направлении под влиянием силы тяжести и активной генерацией внутренних волн. Гидродинамические аспекты этого процесса достаточно подробно рассмотрены в [3–6]. В [7] представлены результаты численного моделирования динамики пассивной примеси от произвольно расположенного мгновенного локализованного источника в зоне турбулентного смешения в однородной и линейно стратифицированной средах. Источник имитировался заданием начального распределения осредненной концентрации примеси в виде финитной функции, принимающей постоянное значение в круге малого радиуса. Продемонстрирована существенная зависимость концентрации примеси от начальных данных для этой величины. При несовпадении центров турбулизованной области и локализованного источника процесс распространения примеси характеризуется смещением положения максимума осредненной концентрации к центру турбулизованной области, однако это смещение происходит чрезвычайно медленно в сравнении с вырождением турбулентности.

В настоящей работе рассмотрена задача о динамике пассивной примеси от мгновенного локализованного источника в зоне турбулентного смешения в пикноклине. Показана возможность ситуаций, когда распространение пассивной примеси в значительной мере определяется конвективным течением, генерируемым зоной турбулентного смешения.

1. Постановка задачи. Основные уравнения. Для описания процесса распространения пассивной примеси в зоне турбулентного смешения в стратифицированной среде привлекается следующая система осредненных уравнений движения, неразрывности, несжимаемости, переноса концентрации пассивной примеси Θ, баланса энергии турбулентности e, переноса скорости диссипации ε и касательного рейнольдсова напряжения $\langle u'v'\rangle$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\,\frac{\partial U}{\partial x} + V\,\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0}\,\frac{\partial\langle p_1\rangle}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\langle u'^2\rangle - \frac{\partial}{\partial y}\,\langle u'v'\rangle,$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial V}{\partial t} + U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\langle p_1\rangle}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\langle u'v'\rangle - \frac{\partial}{\partial y}\langle v'^2\rangle - \frac{g\langle\rho_1\rangle}{\rho_0}, \\
\frac{\partial\langle\rho_1\rangle}{\partial t} + U\frac{\partial\langle\rho_1\rangle}{\partial x} + V\frac{\partial\langle\rho_1\rangle}{\partial y} + V\frac{d\rho_s}{dy} = -\frac{\partial}{\partial x}\langle u'\rho'\rangle - \frac{\partial}{\partial y}\langle v'\rho'\rangle, \\
\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial t} + U\frac{\partial\Theta}{\partial x} + V\frac{\partial\Theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}K_{\theta x}\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}K_{\theta y}\frac{\partial\Theta}{\partial y}, \\
\frac{\partial e}{\partial t} + U\frac{\partial e}{\partial x} + V\frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}K_{ex}\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}K_{ey}\frac{\partial e}{\partial y} + P + G - \varepsilon, \\
\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + U\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + V\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}K_{\varepsilon x}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}K_{\varepsilon y}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} + C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{e}(P + G) - C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{e}, \\
\frac{\partial\langle u'v'\rangle}{\partial t} + U\frac{\partial\langle u'v'\rangle}{\partial x} + V\frac{\partial\langle u'v'\rangle}{\partial y} = \\
= \frac{\partial}{\partial x}K_{ex}\frac{\partial\langle u'v'\rangle}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}K_{ey}\frac{\partial\langle u'v'\rangle}{\partial y} + (1 - C_2)P_{12} + (1 - C_3)G_{12} - C_1\frac{\varepsilon}{e}\langle u'v'\rangle.
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

В уравнениях (1.1) U, V — компоненты скорости осредненного движения в направлении осей x, y соответственно (ось x направлена горизонтально, ось y — вертикально вверх, против силы тяжести); p_1 — отклонение давления от гидростатического, обусловленного стратификацией $\rho_s(y)$; g — ускорение силы тяжести; $\langle\rho_1\rangle$ — осредненный дефект плотности: $\rho_1 = \rho - \rho_s$; $\rho_s = \rho_s(y)$ — плотность невозмущенной жидкости: $d\rho_s/dy \leqslant 0$ (устойчивая стратификация); $\rho_0 = \rho_s(Y)$ — характерное значение плотности невозмущенной жидкости, соответствующее $y = Y$; штрихом обозначены пульсационные составляющие; знак $\langle\ \rangle$ — осреднение; плотность жидкости считается линейной функцией температуры; стратификация предполагается слабой, и используется приближение Обербека — Буссинеска; слагаемые с сомножителем в виде коэффициента ламинарной вязкости или диффузии опущены в предположении малости.

Модель турбулентного движения. Нормальные рейнольдсовы напряжения $\langle u_i'^2\rangle$ ($i = 1, 2$) определяются из изотропных аппроксимаций [8]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\langle u_i'u_j'\rangle}{e} = \frac{2}{3}\delta_{ij} + \frac{1 - C_2}{C_1}\Big(\frac{P_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{P}{\varepsilon}\Big) + \frac{1 - C_3}{C_1}\Big(\frac{G_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{G}{\varepsilon}\Big); \\
P_{ij} = -\Big\{\langle u_i'u_k'\rangle\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \langle u_j'u_k'\rangle\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\Big\}, \quad G_{ij} = \frac{1}{\rho_0}\big(\langle u_i'\rho'\rangle g_j + \langle u_j'\rho'\rangle g_i\big), \\
\mathbf{g} = (0, -g, 0), \quad U_1 = U, \quad U_2 = V, \quad 2P = P_{ii}, \quad 2G = G_{ii}.
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

Для нахождения компонент вектора потоков $\langle u_i'\rho'\rangle$ ($i = 1, 2$), как и в [7], используются следствия локально-равновесного приближения:

$$
-\langle u'\rho'\rangle = K_{\rho x}\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x}, \qquad -\langle v'\rho'\rangle = K_{\rho y}\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial y}.
$$

Коэффициенты турбулентной вязкости K_{ex}, K_{ey}, $K_{\varepsilon x}$, $K_{\varepsilon y}$ и диффузии $K_{\rho x}$, $K_{\rho y}$, $K_{\theta x}$, $K_{\theta y}$ определяются из соотношений:

$$
\begin{gathered}
K_{ex} = C_s\frac{e\langle u'^2\rangle}{\varepsilon}, \quad K_{\varepsilon x} = \frac{K_{ex}}{\sigma}, \quad K_{ey} = C_s\frac{e\langle v'^2\rangle}{\varepsilon}, \quad K_{\varepsilon y} = \frac{K_{ey}}{\sigma}, \\
K_{\rho x} = K_{\theta x} = \frac{\langle u'^2\rangle e}{C_{1t}\varepsilon}, \quad K_{\rho y} = K_{\theta y} = (1/C_{1t}\varepsilon)\Big(e\langle v'^2\rangle\Big/\Big(1 - 2\frac{g}{\rho_0}\frac{1 - C_{2t}}{C_tC_{1t}}\frac{e^2}{\varepsilon^2}\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial y}\Big)\Big).
\end{gathered}
$$

Эмпирические постоянные модели полагались равными [9, 10]: $C_{\varepsilon 1} = 1{,}45$, $C_{\varepsilon 2} = 1{,}90$, $\sigma = 1{,}3$, $C_1 = 2{,}2$, $C_2 = C_3 = 0{,}55$, $C_s = 0{,}25$, $C_t = 1{,}25$, $C_{1t} = 3{,}2$, $C_{2t} = 0{,}5$.

Начальные и граничные условия. В качестве граничных и начальных условий для системы уравнений (1.1) принимались следующие:

$$U = V = \langle\rho_1\rangle = e = \varepsilon = \Theta = \langle u'v'\rangle = 0, \quad r^2 = x^2 + y^2 \to \infty, \quad t \geqslant 0,$$

$$e(0,x,y) = e_0(r), \quad \varepsilon(0,x,y) = \varepsilon_0(r), \quad \Theta(0,x,y) = \Theta_0(x,y), \quad r^2 \leqslant R^2,$$

$$e(0,x,y) = \varepsilon(0,x,y) = \Theta(0,x,y) = 0, \qquad r^2 \geqslant R^2,$$

$$\langle\rho_1\rangle = U = V = \langle u'v'\rangle = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad t = 0.$$

Здесь $e_0(r)$, $\varepsilon_0(r)$ — автомодельные распределения, соответствующие однородной жидкости (финитные колоколообразные функции); R — радиус области турбулизованной жидкости в начальный момент времени. Функция $\Theta_0(x,y)$ задавалась равной $\Theta^0 = \text{const}$ в круге Ω^0 радиуса $R_0 < R$ и нулю вне этого круга. Так имитировался мгновенный локализованный источник примеси. При численном решении задачи нулевые краевые условия, отвечающие $r \to \infty$, сносились на границы достаточно большого прямоугольника.

Распределение плотности в пикноклине задавалось формулой

$$\rho_s(y) = \rho_0(1 - a\beta \operatorname{th}((y - Y)/\beta)),$$

где a, β, Y — положительные параметры.

Обезразмеривание. Переменные задачи обезразмериваются с применением масштабов длины R, скорости $U_0 = \sqrt{e(0,0,0)}$ и осредненной концентрации Θ^0. Используется также представление $\langle\rho_1\rangle^* = \langle\rho_1\rangle/aR\rho_0$, $a = -(1/\rho_0)d\rho_s/dy$ при $y = Y$. В результате в обезразмеренных уравнениях вместо g появляется величина $4\pi^2/\mathrm{Fr}^2$, где $\mathrm{Fr} = U_0T/R$ — плотностное число Фруда; $T = 2\pi/\sqrt{ag}$ — период Вяйсяля — Брента. В дальнейшем обезразмеренные переменные помечены звездочкой $*$.

Алгоритм решения задачи и его тестирование. Конечно-разностный алгоритм основан на применении методов расщепления по пространственным переменным, имеет первый порядок аппроксимации по времени, второй — по пространственным переменным и изложен в [6].

Математическая модель данной работы отличается от модели, использованной в [7] для описания течения в случае линейно стратифицированной среды, представлениями коэффициентов турбулентной вязкости (в работе [7] они получены как следствие изотропных аппроксимаций (1.2)). Это связано с тем,что модель работы [7] дает неудовлетворительные результаты при описании волновой картины течения в пикноклине. Разработанная численная модель тестировалась на задаче об эволюции безымпульсного следа в линейно стратифицированной среде. Результаты сопоставления расчетных данных о поведении характеристик турбулентности в следе с экспериментальными данными Линя и Пао приведены в [11]. Там же показано, что рассчитанные картины внутренних волн, генерируемых следом в пикноклине, согласуются с известными экспериментальными данными [12].

2. Результаты расчетов. С целью анализа процесса турбулентной диффузии пассивной примеси от локализованного источника в зоне турбулентного смешения в пикноклине выполнена серия численных экспериментов, в которых варьировались положение источника примеси внутри турбулизованной области (параметры x_0, y_0), ширина переходного слоя пикноклина (параметр β), а также взаимное расположение турбулизованной области и слоя жидкости с максимальными вертикальными градиентами плотности (параметр Y).

Начало координат совпадает с центром турбулизованной области. По аналогии с линейной стратификацией [7] рассмотрены следующие варианты значений координат центра

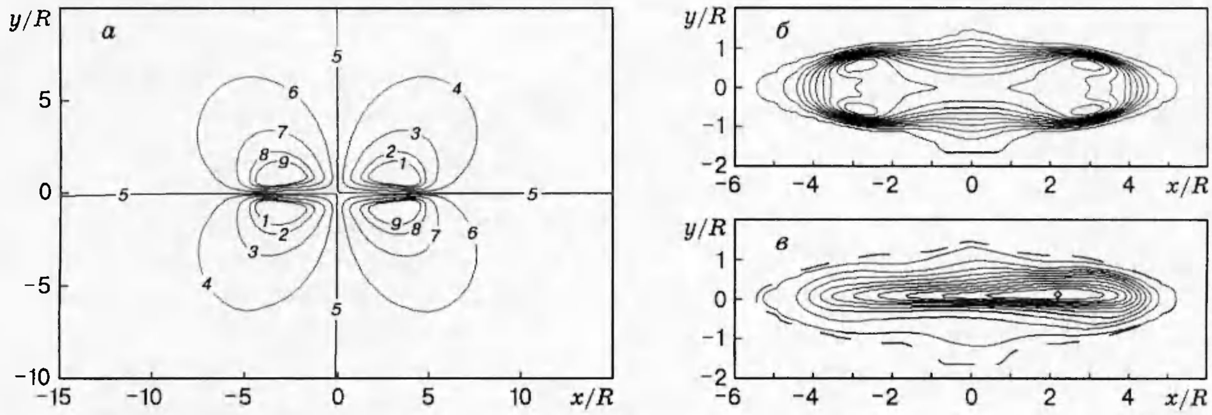

Рис. 1

круга Ω^0: 1) $x_0 = y_0 = 0$, 2) $x_0 = 0$, $y_0 = 0{,}57R$, 3) $x_0 = y_0 = 0{,}57R$, 4) $x_0 = y_0 = 0{,}28R$. Основные результаты представлены для $\mathrm{Fr} = 4{,}7$.

Расчеты проводились на неравномерных ортогональных сетках, сгущающихся в окрестности зоны турбулентного смешения и Ω^0, с числом узлов 120×100. Сеточный аналог Ω^0 при этом представлял приближенную имитацию круга диаметром шесть ячеек, $R_0 = 0{,}17R$. Для оценки точности выполнялись расчеты на сетке с количеством узлов 240×200 и вдвое меньшими горизонтальными и вертикальными размерами ячеек в окрестности зоны турбулентного смешения. Полученные отклонения не превышали 5 % в равномерной сеточной норме.

Результаты расчетов в пикноклине с $Y = 0$, $\beta = 0{,}19R$ показаны на рис. 1 ($t/T = 3$). На рис. 1,*а* изображены линии тока $\psi/(U_0R) = \mathrm{const}$; кривые *1–9* отвечают уровням $1{,}9 \cdot 10^{-3}$; $1{,}5 \cdot 10^{-3}$; $9{,}4 \cdot 10^{-4}$; $3{,}8 \cdot 10^{-4}$; 0; $-3{,}8 \cdot 10^{-4}$; $-9{,}4 \cdot 10^{-4}$; $-1{,}5 \cdot 10^{-3}$; $-1{,}9 \cdot 10^{-3}$. Изолинии энергии турбулентности $e/e_m(t) = \mathrm{const}$, $e_m(t) = \max\limits_{x,y} e(t,x,y)$ (рис. 1,*б*) представлены значениями уровней 0,01; 0,1 и далее до 0,9 с интервалом 0,1. Изолинии осредненной концентрации пассивной примеси $\Theta/\Theta_m(t) = \mathrm{const}$, $\Theta_m(t) = \max\limits_{x,y} \Theta(t,x,y)$ (рис. 1,*в*; 2) приведены для варианта 3 ($x_0 = y_0 = 0{,}57R$) начального расположения источника; при этом рис. 2, в отличие от рис. 1,*в*, соответствует пикноклину с $Y = 0{,}57R$ и $\beta = 0{,}19R$. На рис. 1,*в* и 2 знаком $\diamond$ помечен узел сеточной области, в котором осредненная концентрация достигает максимума; штриховая линия — граница турбулизованной области, определяемая соотношением $e(t,x,y) = 0{,}01e_m(t)$; значения уровней те же, что и на рис. 1,*б*. Видно, что пятно пассивной примеси, первоначально сосредоточенное в малой круговой области внутри турбулизованной зоны, со временем растекается в виде языков вдоль горизонталь-

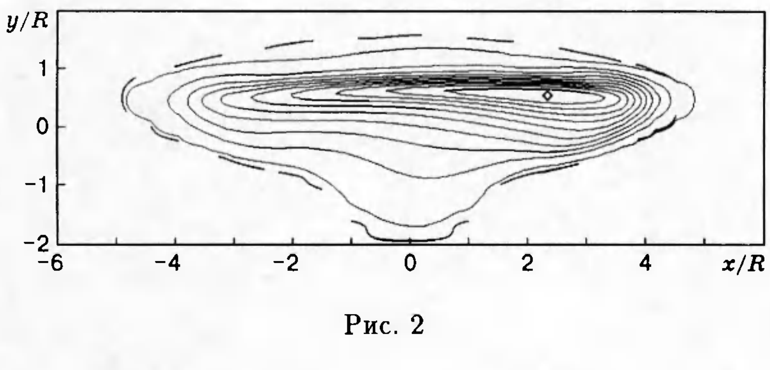

Рис. 2

ной прослойки жидкости с максимальным вертикальным градиентом плотности, повторяя форму турбулизованной области. Полученные в этих расчетах картины растекания турбулизованной области аналогичны наблюдавшимся в лабораторных экспериментах [13], в которых исследовалась динамика пятен частично перемешанной жидкости в тонкослоистой стратифицированной среде.

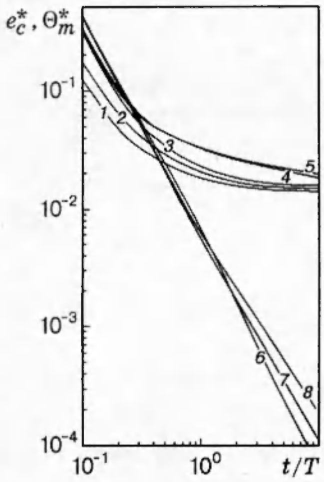

Рис. 3

На рис. 3 кривые *1–5* иллюстрируют изменение величины максимальной осредненной концентрации $\Theta_m^*(t)$ в зависимости от времени. Кривые *1–3* соответствуют расчетам в пикноклине при $Y = 0$, $\beta = 0{,}19R$ (варианты 1–3 расположения Ω^0): кривые *4*, *5* — линейной стратификации (вариант 3: $x_0 = y_0 = 0{,}57R$). Различие в поведении кривых *1–3* можно объяснить неоднородностью распределения коэффициентов турбулентной диффузии $K_{\theta x}$, $K_{\theta y}$. Кривые *6–8* описывают поведение характерной величины энергии турбулентности $e_c(t)/U_0^2 = e(t,0,0)/U_0^2 = e_c^*(t)$ в центре области турбулентного смешения для нелинейного (кривая *6*) и линейного (кривые *7*, *8*) распределений плотности невозмущенной жидкости по глубине. Здесь линии *5*, *8* получены в расчетах по модели [7]. Видно, что в случае линейной стратификации обе модели дают близкие результаты. На интервале значений времени $t/T \in [0, 10]$ энергия турбулентности уменьшается на четыре порядка.

На рис. 4 показано изменение во времени абсциссы $x_m(t)$ и ординаты $y_m(t)$ сеточного узла, в котором достигается максимум концентрации $\Theta_m^*(t) = \Theta^*(t, x_m, y_m)$. Здесь линии *1–3* получены для варианта 3 начального расположения источника примеси ($x_0 = y_0 = 0{,}57R$): *1* — линейная стратификация, *2* — пикноклин с $Y = 0$, $\beta = 0{,}57R$, *3* — «узкий» пикноклин ($Y = 0$, $\beta = 0{,}19R$). В отличие от линии *3*, линии *4*, *5* соответствуют вариантам 2, 4 координат центра Ω^0 (*4* — $x_0 = 0$, $y_0 = 0{,}57R$, *5* — $x_0 = y_0 = 0{,}28R$; $Y = 0$, $\beta = 0{,}19R$), линии *6*, *7* — новым вариантам расположения слоя жидкости с наибольшими вертикальными градиентами плотности $\rho_s(y)$ относительно центра турбулизованной области (*6* — $Y = 0{,}19R$, *7* — $Y = 0{,}57R$; $\beta = 0{,}19R$, $x_0 = y_0 = 0{,}57R$).

Значение $x_m(t)$ в случае линейной стратификации близко к постоянной на всем рассмотренном временном интервале (рис. 4,*а*, линия *1*). В случае пикноклина эта величина

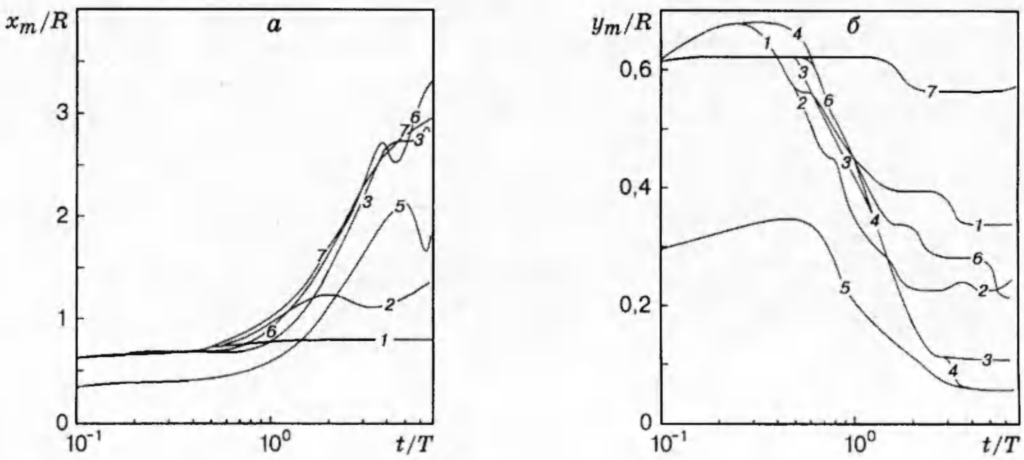

Рис. 4

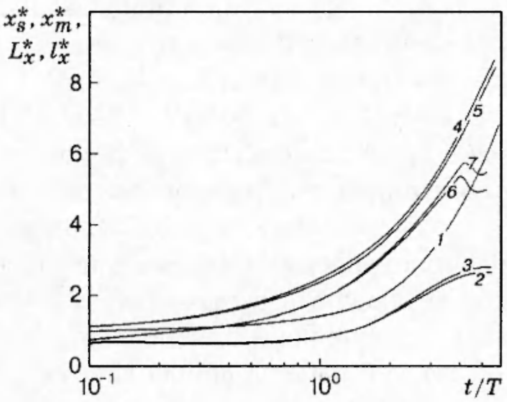

Рис. 5

интенсивно растет при всех t/T, за исключением короткой начальной стадии развития турбулизованной области, когда, как и в однородной жидкости, доминирующим является процесс турбулентной диффузии . Возрастание $x_m(t)$ связано с особенностью волновой картины течения в пикноклине [6, 12] — образованием в каждом квадранте плоскости (x, y) конвективного вихря большой интенсивности, который перемещается со временем вдоль горизонтальной оси в сторону роста $|x|$ (рис. 1,*а*). Такое поведение $x_m(t)$ характерно для всех рассмотренных вариантов расположения источника примеси (линии *3*, *5*) и значений параметра Y (линии *3*, *6*, *7*). Вместе с тем линия *2*, соответствующая пикноклину с более широким переходным слоем, близка к *1*, относящейся к линейной стратификации.

На рис. 5 в дополнение к рис. 4,*а* на примере расчета с параметрами $x_0 = y_0 = 0{,}57R$, $Y = 0$, $\beta = 0{,}19R$ сопоставляются зависимости от времени сеточных аналогов абсциссы точки максимума функции тока x_s (кривая *1*), абсциссы максимума концентрации x_m (кривые *2*, *3*) и горизонтальных размеров L_x, l_x турбулизованной области (кривые *4*–*7*). Здесь линии *4*, *5* иллюстрируют поведение горизонтального размера турбулизованной зоны, вычисляемого из соотношения $e(t, L_x, 0) = 0{,}01e(t, 0, 0)$, линии *6*, *7* получены из соотношения $e(t, l_x, 0) = 0{,}5e(t, 0, 0)$. При этом кривые *3*, *5*, *7* соответствуют расчетам на сетке 240×200. Представленные данные показывают, что турбулентная диффузия, как и в случае однородной жидкости [7], приводит к смещению положения максимума концентрации в начало координат. Конвективное течение, индуцируемое коллапсом зоны турбулентного смешения, вызывает интенсивный перенос примеси в горизонтальном направлении. Рис. 4,*а* и 5 отражают взаимодействие турбулентной диффузии и конвективного переноса. Поведение кривых *6*, *7* на рис. 5 — результат порождения энергии турбулентности конвективным течением.

Расчеты показывают, что в случае линейной стратификации координата $y_m(t)$ незначительно возрастает на начальной стадии развития турбулизованной зоны, а затем наблюдается ее убывание (рис. 4,*б*, линия *1*). Однако эта величина даже при $t/T \geqslant 4$ отлична от нуля (как и x_m при несимметричном расположении источника), что свидетельствует о «памяти» осредненной концентрации пассивной примеси особенностей своего начального распределения. Близкое к описанному поведение y_m имеет место и в пикноклине с широким переходным слоем (кривая *2*). Вместе с тем данные численных экспериментов показывают, что при эволюции турбулизованной области в пикноклине осредненная концентрация пассивной примеси при больших значениях времени достигает своего максимума в прослойках жидкости с наибольшими вертикальными градиентами плотности. В частности, в случае пикноклина с узким переходным слоем величина $y_m(t)$ при $t/T \geqslant 1$ существенно зависит от значения Y (линии *3*, *6*, *7* на рис. 4,*б*).

Таким образом, в тех случаях, когда x_0, y_0 отличны от нуля, концентрация пассивной примеси достигает максимума на значительном расстоянии от начала координат не только при небольших значениях времени, но и при $t/T \geqslant 4$.

Расчеты выполнялись также для бóльшего числа Фруда (Fr = 22,1). Полученные данные качественно согласуются с представленными здесь для Fr = 4,7, но, как и при эволюции турбулизованной области в линейно стратифицированной жидкости [7], воздействие стратификации проявляется позже, т. е. при бóльших значениях $t_* = (t/T)\mathrm{Fr} = tU_0/R$.

Эффекты памяти при распространении примеси в неизотермических свободных турбулентных течениях достаточно хорошо известны [14, 15]. Они наблюдаются и в задаче о динамике зоны турбулентного смешения в однородной и линейно стратифицированной жидкости [7]. Результаты настоящей работы демонстрируют существенную роль конвективного течения в процессе распространения пассивной примеси от локализованного источника в зоне турбулентного смешения в пикноклине.

Авторы благодарят Ю. Д. Чашечкина, совместная работа с которым привела к постановке рассмотренной задачи.

Основные результаты работы доложены на Международной конференции «Математические модели и численные методы механики сплошных сред» (Новосибирск, 1996) и Втором сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике (Новосибирск, 1996).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 95-01-00910, 98-01-00736).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тернер Дж.** Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977.
2. **Монин А. С., Озмидов Р. В.** Океанская турбулентность. Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
3. **Васильев О. Ф., Кузнецов Б. Г., Лыткин Ю. М., Черных Г. Г.** Развитие области турбулизованной жидкости в стратифицированной среде // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974. № 3. С. 45–52.
4. **Трохан А. М., Чашечкин Ю. Д.** Генерация внутренних волн в стратифицированной жидкости гидродинамически линейным источником (двумерная задача) // Теория дифракции и распространения волн: Тез. докл. VII Всесоюз. симпоз. по дифракции и распространению волн, Ростов-на-Дону, 1977. М.: Изд-во АН СССР, 1977. Т. 3. С. 186–189.
5. **Лыткин Ю. М., Черных Г. Г.** Подобие течения по плотностному числу Фруда и баланс энергии при эволюции зоны турбулентного смешения в стратифицированной среде // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1980. Вып. 47. С. 70–89.
6. **Воропаева О. Ф., Черных Г. Г.** Эволюция зоны турбулентного смешения в жидкости с нелинейной стратификацией // Моделирование в механике: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; ИТПМ. 1989. Т. 3(20), № 5. С. 3–29.
7. **Воропаева О. Ф., Чашечкин Ю. Д., Черных Г. Г.** Диффузия пассивной примеси от мгновенного локализованного источника в зоне турбулентного смешения // Докл. РАН. 1997. Т. 356, № 6. С. 759–762.
8. **Rodi W.** Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified fluids // J. Geoph. Res. 1987. V. 92, N C5. P. 5305–5328.
9. **Gibson M. M., Launder B. E.** On the calculation of horizontal, turbulent, free shear flows under gravitational influence // Trans. ASME. 1976. V. C 98, N 1. P. 81–87.

10. **Rodi W.** Turbulence Models and their Application in Hydraulics. Karlsruhe: Univ. of Karlsruhe, 1981.
11. **Воропаева О. Ф., Черных Г. Г.** Численная модель динамики безымпульсного турбулентного следа в пикноклине // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 3. С. 69–86.
12. **Gilreath H. E., Brandt A.** Experiments on the generation of internal waves in a stratified fluid // AIAA J. 1985. V. 23. P. 693–700.
13. **Попов В. А.** Развитие области частично перемешанной жидкости в тонкослоистой стратифицированной среде // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1986. Т. 22, № 4. С. 389–394.
14. **Дмитренко Ю. М., Жданов В. Л., Коловандин Б. А.** Влияние начальных условий на структуру неизотермического осесимметричного турбулентного следа. Минск, 1985 (Препр. / ИТМО АН БССР).
15. **Букреев В. И., Деменков А. Г., Костомаха В. А., Черных Г. Г.** Распространение тепла от линейного источника в плоском турбулентном следе // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 5. С. 115–126.

Поступила в редакцию 16/X 1996 г.