

**РАЗРУШЕНИЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В СРЕДЕ
С БЕЗЫНЕРЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ**

В. Е. Захаров, В. В. Соболев, В. С. Сынах

(Новосибирск)

Проводится теоретическое рассмотрение и численное моделирование нелинейной стадии неустойчивости монохроматической волны в среде с безынерционной нелинейностью. Показано, что если имеют место одновременно продольная и поперечная неустойчивость, то происходит разбиение волны на трехмерные сгустки, внутри которых образуются особенности амплитуды. В результате происходит «разрушение» монохроматической волны, сопровождающееся значительным уширением ее спектра и увеличением угловой расходимости.

1. В некоторых экспериментах по самофокусировке света [1-3] наблюдалось значительное уширение прежде очень узкой спектральной линии. Данная работа ставит своей целью изучить конкретный механизм уширения спектра в среде с безынерционной нелинейностью. Таким механизмом может быть одновременное развитие продольной и поперечной неустойчивости световой волны [4-6], приводящее к разбиению ее на «коллагсирующие» за конечное время трехмерные сгустки. Это явление можно назвать разрушением монохроматической волны. Явление разрушения волны не специфично для света и может иметь место также и в других нелинейных средах с дисперсией; поэтому целесообразно изучать его с общей точки зрения.

2. Рассмотрим изотропную нелинейную среду. При слабой нелинейности среды в ней может распространяться монохроматическая волна

$$\varphi(r, t) = \varphi_0 \cos(\omega t - kz), \quad \omega = \omega_k + q |\varphi_0|^2$$

Здесь ω_k — закон дисперсии волн, q — величина, характеризующая нелинейность среды.

Рассмотрим теперь волну, близкую к монохроматической, и введем для нее комплексную огибающую ψ

$$\varphi(r, t) = \text{Re} [\psi(r, t) \exp(-i\omega_k t + ikr)]$$

Огибающая $\psi(r, t)$ подчиняется уравнению [5-9]

$$i \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + V_* \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\omega_k''}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{V_*}{2k} \Delta_{\perp} \psi = q |\psi|^2 \psi \quad (2.1)$$

Здесь V_* — групповая скорость.

Для монохроматической волны имеем

$$\psi = \varphi_0 \exp(-iq |\varphi_0|^2 t) \quad (2.2)$$

В безынерционном диэлектрике со скалярным механизмом нелинейности, когда показатель преломления имеет вид

$$n = n_0(\omega) + \delta n_* |E|^2$$

уравнение (2.1) справедливо при любой эллиптической поляризации волны [10]. При этом

$$\omega_k'' = -\frac{1}{V_*^2} \frac{d^2(\omega n_0)}{d\omega^2}, \quad q = -\frac{V_*}{k} \frac{\delta n_*}{n_0}, \quad V_* = \frac{C}{(\omega n_0)'}_0$$

Линеаризуя уравнение (2.1) относительно решения (2.2) и полагая для возмущения $\delta\psi$

$$\delta\psi \sim \exp(-iq|\varphi_0|^2 t - i\Omega t + ipr)$$

получим

$$\Omega = V_* p_z \pm \sqrt{q|\varphi_0|^2 \left(\omega_k'' p_z^2 + \frac{V_*}{k} p_\perp^2 \right) + \frac{1}{4} \left(\omega_k'' p_z^2 + \frac{V_*}{k} p_\perp^2 \right)^2} \quad (2.3)$$

Если $q > 0$ и $\omega_k'' > 0$, то монохроматическая волна устойчива; в остальных случаях имеет место неустойчивость. При $q < 0$ имеет место поперечная неустойчивость, приводящая к самофокусировке волны. Если при этом $\omega_k'' > 0$, то имеет место также и продольная неустойчивость. В дальнейшем будет рассматриваться только этот случай.

Заметим еще, что уравнение (2.1) имеет инварианты

$$\begin{aligned} J_1 &= \int |\psi|^2 dr \\ J_2 &= \frac{1}{2} \int \left(\omega_k'' \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|^2 + \frac{V_*}{k} |\nabla_\perp \psi|^2 + q |\psi|^4 \right) dr \\ p_\perp &= \frac{iV_*}{k} \int (\psi^* \nabla_\perp \psi - \psi \nabla_\perp \psi^*) dr \\ p_z &= i\omega_k'' \int \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) dr \end{aligned} \quad (2.4)$$

3. Совершив переход к безразмерным переменным

$$\tau = V_* kt, \quad r_\perp = kr, \quad z' = k \left(\frac{V_*}{k\omega_k''} \right)^{1/2} (z - V_* t)$$

$$u = \left(\frac{|q|}{2kV_*} \right)^{1/2} \psi$$

получим уравнение

$$2i \frac{\partial u}{\partial \tau} + \Delta u + |u|^2 u = 0 \quad (3.1)$$

с интегралами движения

$$\begin{aligned} I_1 &= \int |u|^2 dr \\ I_2 &= \int (|\nabla u|^2 - 1/2 |u|^4) dr \\ S &= i \int (u^* \nabla u - u \nabla u^*) dr \end{aligned}$$

Здесь Δ — трехмерный лапласиан в переменных r_\perp, z' .

Ограничимся рассмотрением сферически-симметричного случая. Тогда

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}$$

Введем в рассмотрение величины

$$A = \int_0^{\infty} r^4 |u|^2 dr$$

$$B = i \int_0^{\infty} r^3 \left(u^* \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial u^*}{\partial r} \right) dr$$

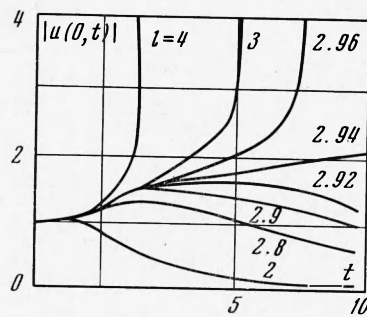
Из уравнения (5) получаем

$$\frac{\partial A}{\partial t} + B = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial t} + 2I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} r^2 |u|^4 dr$$

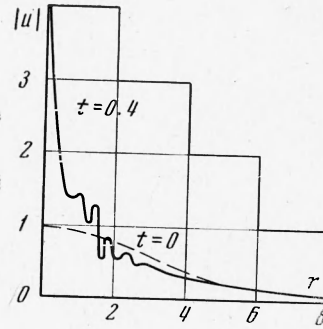
Отсюда имеем неравенство

$$A < I_2 t^2 + B(0)t + A(0) \quad (3.2)$$

В среде без нелинейности, когда $q = 0$, интеграл J_2 всегда положителен. В нелинейной среде возможны распределения $u(r, t)$, для которых $J_2 < 0$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Покажем, что развитие каждого из таких распределений приводит за конечное время к образованию особенности.

Действительно

$$I_2 = 0.25q \left(\frac{k}{V_*^3 \omega_k^n} \right)^{1/2} J_2$$

и также отрицательно при $J_2 < 0$. Из (3.2) следует, что через конечное время A также должно стать отрицательным, с другой стороны, A — существенно положительная величина. Это противоречие указывает на разрушение решения уравнения (2.4) за конечное время t_0 при $J_2 < 0$.

4. Уравнение (3.1) изучалось численно на машине БЭСМ-6 ВЦ СО АН СССР. В качестве начального условия выбиралось гауссово распределение

$$u(r, 0) = a_0 \exp(-r^2 / l^2)$$

а граничные условия

$$\frac{\partial u}{\partial r}(0, t) = 0, \quad u(\infty, t) = 0$$

Уравнение (3.1) (со сферическим лапласианом) аппроксимировалось неявной разностной схемой с переменным шагом по радиусу. Шаг по радиусу увеличивался от центра к периферии более чем в 10^3 раз, это по-

зволюило взять достаточно большой интервал численного интегрирования по r (более чем в 20 раз превышающий начальную полуширину распределения). Контроль точности вычислений производился по сохранению инвариантов I_1, I_2 . Поведение амплитуды $|u(0, t)|$ для $a_0 = 1$ при разных значениях I_2 приведено на фиг. 1. Как видно из фигуры, при достаточно малых значениях I_2 за конечное время происходит образование особенности — «схлопывание». Как показывает машинный эксперимент, достаточно для схлопывания требование отрицательности I_2 не является необходимым — фактически схлопывание происходит уже при $I_2 < 0.675$. Типичная картина — появление особенности — изображена на фиг. 2 (для $l = 4$). Видно, что особенность охватывает область весьма малых радиусов.

Фактически удавалось проследить схлопывание до $|u(0, t)| \approx 6.3$. После этого из-за высоких градиентов вблизи оси происходило разрушение интеграла движения I_2 . Однако интеграл I_1 и в этот и в последующие моменты времени сохранился с точностью $\Delta I_1 / I_1 \sim 10^{-5}$. Это дает основание полагать, что дальнейший счет некорректен лишь в непосредственной близости к особенности, и продолжать изучение эволюции остального профиля.

При $t \rightarrow t_0$ на всем профиле возникает «рябь», которую можно интерпретировать как появление расходящихся из центральной области волн. Эти волны уносят положительное значение интеграла I_2 ; вблизи особенности плотность I_2 стремится к $-\infty$.

Численно решалась также задача о стационарных решениях уравнения (5) вида $u = e^{it/2} \varphi(r)$. Для них

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi - \varphi^3 = 0, \quad \varphi_r(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = 0 \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) имеет бесчисленное множество решений; графики первых трех из них изображены на фиг. 3. Амплитуды $\varphi(0)$ и значения интеграла I_1 для первых семи состояний приведены ниже

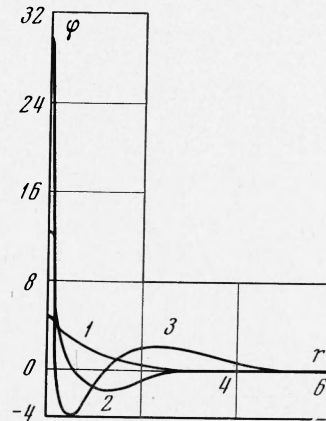
	1	2	3	4	5	6	7
$\varphi(0)$	4.34	14.06	28.68	46.87	65.45	81.38	94.39
I_1	1.50	9.47	28.72	64.09	121.02	205.68	324.18

Умножая уравнение (4.1) на $r^2 \varphi$ и интегрируя по r от 0 до ∞ , имеем

$$-\int_0^{\infty} r^2 \varphi_r^2 dr - \int_0^{\infty} r^2 \varphi^2 dr + \int_0^{\infty} r^2 \varphi^4 dr = 0$$

Далее, умножая на $r^3 \varphi_r$ и интегрируя, имеем

$$-\frac{1}{2} \int_0^{\infty} r^2 \varphi_r^2 dr - \frac{3}{2} \int_0^{\infty} r^2 \varphi^2 dr + \frac{3}{2} \int_0^{\infty} r^2 \varphi^4 dr = 0$$



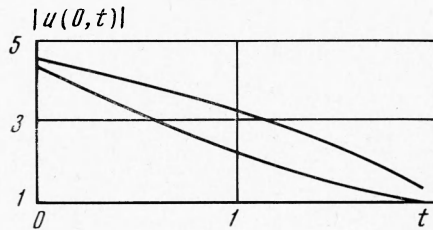
Фиг. 3

Отсюда получаем

$$I_2 = \int_0^{\infty} r^2 \varphi_r^2 dr - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} r^2 \varphi^4 dr = \int_0^{\infty} r^2 \varphi^2 dr = I_1 > 0$$

Для всех стационарных решений интеграл I_2 положителен и равен I_1 . Этот результат с высокой точностью (5—7 знаков) подтверждается счетом и служит дополнительным доказательством корректности вычислений.

Численно изучалась также устойчивость первого стационарного состояния, которое возмущалось гауссовой добавкой к амплитуде, дающей относительный вклад в интеграл $\delta I_1 / I_1 \sim 10^{-2}$. Как при отрицательных, так и при положительных добавках стационарное состояние расплывалось.



Фиг. 4

График поведения модуля амплитуды при $r = 0$ как функция времени приведен на фиг. 4.

5. Физически картину разрушения волны можно представить следующим образом. При $\omega_k'' = 0$ волновой пучок представляет собой совокупность бесконечно тонких поперечных «слоев», не взаимодействующих

один с другим. В каждом слое развивается поперечная неустойчивость, приводящая к разбиению его на области размером порядка

$$l_1 \sim \frac{1}{k} \left(\frac{V_*}{k |\psi|^2} \right)^{1/2}$$

В аксиально-симметричном случае эти области представляют собой кольцевые зоны. Области повышения интенсивности коллапсируют, образуя фокусы; при плавном изменении формы импульса эти фокусы движутся вдоль оси z (см. [11]). Амплитуда поля в фокусе ограничивается либо многофотонным поглощением, либо насыщением нелинейности.

При конечном $\omega_k'' > 0$ возникает взаимодействие между слоями, приводящее к перераспределению энергии между ними. На начальном этапе это взаимодействие приводит к нарастанию продольной модуляции с характерным размером $l_{||} \sim l_{\perp} (k \omega_k'' / V_*)^{1/2}$

Одновременно возникает поперечная неустойчивость на размере l_{\perp} , так что волна разбивается на трехмерные сгустки. За конечное время внутри каждого такого сгустка «прорастает» особенность амплитуды волны; область вблизи особенности излучает в широком диапазоне частот и углов. Возникающая при этом сильная продольная модуляция волны объясняет уширение спектра.

При отсутствии диссипативных механизмов прорастание особенности происходит до тех пор, пока ее размер не сравнивается по порядку величины с длиной волны. В этом случае происходит наиболее сильное уширение линии — $\Delta \omega \sim \omega$. В других случаях рост особенности ограничивается насыщением нелинейности, многоквантовым поглощением или конечным временем релаксации нелинейности среды τ^* . В последнем случае уширение линии происходит только до величины $\Delta \omega \sim 1 / \tau^*$. При достаточно большом времени релаксации

$$\tau^* \gg \frac{1}{\omega} \left(\frac{\omega_k''}{q |\psi|^2} \right)^{1/2} \sim \frac{1}{\omega} \left(\frac{V_*}{\delta n_* |E|^2} \frac{k \omega_k''}{V_*} \right)^{1/2}$$

Картина разрушения волны полностью «смазывается» релаксацией нелинейности. Заметим, еще, что для разрушения волны не обязательно, чтобы весь механизм нелинейности был безынерционным—инерционный механизм нелинейности, если он присутствует, формирует квазистационарный волновод, внутри которого происходит разрушение волны.

Условие $J_2 < 0$, достаточное для разрушения волны, означает требование, чтобы амплитуда и фаза волны не менялись слишком сильно на размерах l_{\perp} , l_{\parallel} . Это означает одновременно, что интенсивность волнового пучка должна существенно превышать критическую, а время импульса — величину $l_{\parallel}' V_*$. При экспериментах с лазерными импульсами в нелинейных диэлектриках эти условия легко выполняются.

Поскольку образующиеся особенности интегрируемы, фактически в них «захватывается» малое количество энергии волны. Тем не менее развитие продольно-поперечной неустойчивости приводит к интенсивной «турбулизации» первоначально монохроматической волны. Характерный поперечный масштаб турбулентности — l_{\perp} , продольный — l_{\parallel} . Турбулентность сильная, так как на этих масштабах линейные члены в уравнении (2.1) имеют один порядок с нелинейными. Турбулизация волны происходит на длине $l^* \sim V_* / q |\psi_0|^2$. Если в среду входит плоскопараллельный волновой пучок, то на длине $l \sim l^*$ он превратится в «турбулентную струю», расходящуюся под углом $\theta \sim (q |\psi_0|^2 / \omega \hbar)^{1/2}$.

Поступила 28 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Shimizu F. Frequency broadening of liquids by a small light pulse. Phys. Rev. Letters, 1967, vol. 19, No. 19.
2. Polloni R., Sacchi C. A., Svelto O. Self-trapping with picosecond pulses and «rocking» of molecules. Phys. Rev. Letters, 1969, vol. 23, No. 13.
3. Grieneisen H. P. H., Sacchi C. A. Frequency broadening of trapped light in small filaments. Bull. Amer. Phys. Soc., 1967, vol. 12, No. 5.
4. Власов С. Н., Петрищев В. А., Таланов В. И. Усредненное описание волновых пучков в нелинейных (кубичных) средах. Аннотации докладов, представленных на V Всесоюзную конференцию по нелинейной оптике, Кишинев, 1970, М., Изд-во МГУ, 1970.
5. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. Новосибирск, Новосиб. гос. ун-т, 1968.
6. Литвак А. Г., Таланов В. И. Применение параболического уравнения к расчету полей в диспергирующих нелинейных средах. Изв. вузов, Радиофизика, 1967, т. 10, вып. 4.
7. Захаров В. Е. О неустойчивости самофокусировки света. ЖЭТФ, 1967, т. 53, вып. 5.
8. Захаров В. Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости. ПМТФ, 1968, № 2.
9. Карпман В. И., Крушкаль Е. М. О модулированных волнах в нелинейных диспергирующих средах. ЖЭТФ, 1968, т. 55, вып. 2.
10. Берхоер А. Л., Захаров В. Е. Самовоздействие волн с различной поляризацией в нелинейных средах. ЖЭТФ, 1970, т. 58, вып. 3.
11. Луговой В. Н., Прохоров А. М. О возможном объяснении мелкомасштабных нитей самофокусировки. Письма ЖЭТФ, 1968, т. 7, вып. 5.