

УДК 539.3

О РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБАХ РЕКОНСТРУКЦИИ ПОЛОСТИ В ОРТОТРОПНОМ СЛОЕ

А. О. Ватульян, О. А. Беляк

Южный федеральный университет, 344090 Ростов-на-Дону

E-mail: olya_suvorova@mail.ru

Рассмотрены прямые и обратные задачи о колебаниях анизотропного слоя с цилиндрической полостью произвольного поперечного сечения под действием нагрузки, приложенной на поверхности слоя. Предложен асимптотический подход к решению рассматриваемых задач в случае полостей малого относительного размера. Представлены численные результаты решения прямых и обратных задач.

Ключевые слова: колебания полуограниченных тел с полостями, асимптотика, граничные интегральные уравнения.

Введение. Задачи о колебаниях полуограниченных упругих тел с дефектами различной природы (полости, включения, трещины) представляют собой важный класс динамических задач теории упругости. Одним из наиболее эффективных методов решения задач теории упругости для областей с дефектами является сведение исходных задач к системам граничных интегральных уравнений с помощью функций Грина, что позволяет понизить размерность исследуемой задачи на единицу. На основе решения таких задач может быть выполнен расчет волновых полей в слое.

С математической точки зрения определение дефектов в упругой среде по измеренному полю перемещений на границе тела является достаточно сложной и малоизученной обратной геометрической задачей [1–4], для решения которой используются различные подходы. В настоящей работе применен подход, основанный на определении различными способами характеристик волнового поля в волноводе с дефектом.

Постановка задачи. Рассмотрим установившиеся колебания с частотой ω ортотропного упругого слоя толщиной h с цилиндрической полостью, не выходящей на границы слоя, направляющая которой представляет собой гладкую замкнутую кривую l_0 с образующей, параллельной оси Ox_2 . Нижняя грань слоя жестко закреплена и совпадает с осью Ox_1 , ось Ox_3 направлена вертикально вверх. Оси упругой симметрии ортотропного материала совпадают с осями системы координат. Колебания в слое вызваны нагрузкой $p_i(x_1)$ ($i = 1, 2, 3$), приложенной к верхней границе слоя.

После отделения временного множителя краевая задача имеет вид

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0; \quad (1)$$

$$u_i|_{x_3=0} = 0, \quad \sigma_{i3}|_{x_3=h} = p_i, \quad \sigma_{ij}n_j|_{l_0} = 0, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Здесь ρ — плотность среды; C_{ijkl} — компоненты тензора упругих постоянных материала, удовлетворяющие известным соотношениям симметрии и условию положительной опреде-

ленности; n_j — компоненты единичного вектора нормали к кривой l_0 , внешнего по отношению к области, занятой упругой средой. Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечности, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения [5].

В зависимости от способа приложения нагрузки исходная задача (1), (2) распадается на две: задача 1 — задача об антиплоских колебаниях ортотропного слоя с цилиндрической полостью (отличной от нуля является компонента $u_2(x_1, x_3)$, в краевой задаче (1), (2) $i = 2, j = 1, 3$); задача 2 — плоская задача о колебаниях слоя с полостью (отличными от нуля являются компоненты $u_1(x_1, x_3), u_3(x_1, x_3)$, в краевой задаче (1), (2) $i, j = 1, 3$).

Решение прямых задач. Основным способом исследования краевой задачи (1), (2) является предварительное сведение ее к интегральному уравнению с нерегулярным ядром с использованием теории потенциала [6–11]. Решения прямых задач строятся с помощью функций Грина для слоя $U_i^{(m)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ ($i, m = 1, 2, 3$) и обобщенной теоремы взаимности [12]. Функции Грина [6, 12] для слоя представляются в виде однократного интеграла по контуру σ в комплексной плоскости и в начале координат имеют логарифмическую особенность.

В задаче 1 представление поля перемещений в слое под действием поверхностной касательной нагрузки с носителем на отрезке $[a, b]$ имеет вид

$$u_2(\boldsymbol{\xi}) = u_2^*(\boldsymbol{\xi}) - \int_{l_0} \sigma_{2j}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j(\mathbf{x}) u_2(\mathbf{x}) dl_x, \quad j = 1, 3, \quad (3)$$

$$u_2^*(\boldsymbol{\xi}) = \int_a^b p_2(x_1) U_2^{(2)}(x_1, h, \boldsymbol{\xi}) dx_1,$$

причем подынтегральная функция представима в виде

$$K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sigma_{2j}^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{e^{i\alpha_1(x_1 - \xi_1)}}{\lambda} \left(g_1(\alpha_1, \mathbf{x}, \xi_3) e^{-\lambda|x_3 - \xi_3|} + \right. \\ \left. + \frac{g_2(\alpha_1, \mathbf{x}) \operatorname{sh}(\lambda\xi_3) e^{\lambda(x_3 - h)} - g_3(\alpha_1, \mathbf{x}) \operatorname{ch}(\lambda(h - \xi_3)) e^{-\lambda x_3}}{\operatorname{ch}(\lambda h)} \right) d\alpha_1, \quad (4)$$

где

$$g_1(\alpha_1, \mathbf{x}, \xi_3) = i\nu n_1(\mathbf{x})\alpha_1 - \operatorname{sign}(x_3 - \xi_3)\lambda n_3(\mathbf{x}), \\ g_2(\alpha_1, \mathbf{x}) = i\nu n_1(\mathbf{x})\alpha_1 + \lambda n_3(\mathbf{x}), \quad g_3(\alpha_1, \mathbf{x}) = i\nu n_1(\mathbf{x})\alpha_1 - \lambda n_3(\mathbf{x}), \\ \lambda^2 = \nu\alpha_1^2 - k^2, \quad \nu = C_{66}/C_{44}, \quad k^2 = \rho\omega^2/C_{44}.$$

В случае плоской деформации (задача 2) волновые поля в слое под действием нормальной нагрузки, приложенной на отрезке $[a, b]$ поверхности слоя $x_3 = h$, имеют вид

$$u_m(\boldsymbol{\xi}) = u_m^*(\boldsymbol{\xi}) - \int_{l_0} [P_{m1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})u_1(\mathbf{x}) + P_{m3}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})u_3(\mathbf{x})] dl_x, \quad m = 1, 3, \quad (5)$$

где

$$u_m^*(\boldsymbol{\xi}) = \int_a^b p_3(x_1) U_3^{(m)}(x_1, h, \boldsymbol{\xi}) dx_1, \\ P_{mk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sigma_{1k}^{(m)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_1(\mathbf{x}) + \sigma_{3k}^{(m)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_3(\mathbf{x}), \quad k = 1, 3,$$

$$\begin{aligned}
 P_{m1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} e^{i\alpha_1 x_1} \left(\frac{e^{-i\alpha_1 \xi_1}}{2C_{55}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \times \right. \\
 &\quad \times \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} [(C_{11}n_1 i\alpha_1 - C_{55}n_3 \lambda_n \operatorname{sign}(x_3 - \xi_3)) B_1^{(m)}(\alpha_1, \lambda_n, x_3, \xi_3) + \\
 &\quad \left. + (C_{55}n_3 i\alpha_1 - C_{13}n_1 \lambda_n \operatorname{sign}(x_3 - \xi_3)) B_3^{(m)}(\alpha_1, \lambda_n, x_3, \xi_3)] e^{-\lambda_n |x_3 - \xi_3|} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^4 C_k^{(m)} e^{\lambda_k x_3} [\psi_1(\lambda_k)(C_{11}n_1 i\alpha_1 + n_3 C_{55} \lambda_k) + \psi_3(\lambda_k)(C_{13}n_1 \lambda_k + C_{55}n_3 i\alpha_1)] \right) d\alpha_1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{m3}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} e^{i\alpha_1 x_1} \left(\frac{e^{-i\alpha_1 \xi_1}}{2C_{55}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \times \right. \\
 &\quad \times \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} [(C_{13}n_3 i\alpha_1 - C_{55}n_1 \lambda_n \operatorname{sign}(x_3 - \xi_3)) B_1^{(m)}(\alpha_1, \lambda_n, x_3, \xi_3) + \\
 &\quad \left. + (C_{55}n_1 i\alpha_1 - C_{33}n_3 \lambda_n \operatorname{sign}(x_3 - \xi_3)) B_3^{(m)}(\alpha_1, \lambda_n, x_3, \xi_3)] e^{-\lambda_n |x_3 - \xi_3|} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^4 C_k^{(m)} e^{\lambda_k x_3} [\psi_1(\lambda_k)(C_{55}n_1 \lambda_k + n_3 C_{13} i\alpha_1) + \psi_3(\lambda_k)(C_{55}n_1 i\alpha_1 + C_{33}n_3 \lambda_k)] \right) d\alpha_1,
 \end{aligned}$$

$$B_1^{(1)}(\alpha_1, \lambda_n, x_3, \xi_3) = (\gamma_5 \alpha_1^2 - \lambda_n^2 - k^2) / \lambda_n,$$

$$B_3^{(3)}(\alpha_1, \lambda_n, x_3, \xi_3) = (\gamma_1 \alpha_1^2 - \gamma_5 \lambda_n^2 - k^2) / \lambda_n,$$

$$B_1^{(3)}(\alpha_1, x_3, \lambda_n, \xi_3) = B_3^{(1)}(\alpha_1, x_3, \lambda_n, \xi_3) = -i\alpha_1(\gamma_5 + \gamma_7) \operatorname{sign}(x_3 - \xi_3),$$

$$\psi_1(\lambda_k) = -i\alpha_1(\gamma_7 + \gamma_5)\lambda_k, \quad \psi_3(\lambda_k) = \gamma_5 \lambda_k^2 - \gamma_1 \alpha_1^2 + k^2.$$

Здесь σ — контур в комплексной плоскости, который выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения и определенным образом огибает особенности подынтегральных функций [5]; выражения для коэффициентов $C_k^{(m)}$ не приводятся из-за их громоздкости.

В соответствии с (3), (5) поля перемещений в слое можно представить в виде суммы двух слагаемых. Первое слагаемое $u_m^*(\boldsymbol{\xi})$ представляет собой поле смещений в среде без дефекта (эталонное поле смещений) под действием заданной нагрузки, второе слагаемое обусловлено наличием полости в слое. На основе представлений (3), (5) можно рассчитать поле смещений всюду в слое, если найдено поле смещений на границе полости.

Можно предложить два наиболее эффективных метода определения поля смещений на контуре полости: 1) метод интегральных уравнений и основанный на нем метод граничных элементов, которые могут быть использованы для полостей любой конфигурации; 2) асимптотический метод для круговых полостей малого относительного радиуса.

Метод интегральных уравнений. Одним из наиболее эффективных методов определения полей перемещений на контуре полости является построение систем граничных интегральных уравнений (ГИУ) на границе дефекта l_0 на основе представлений (3)–(5)

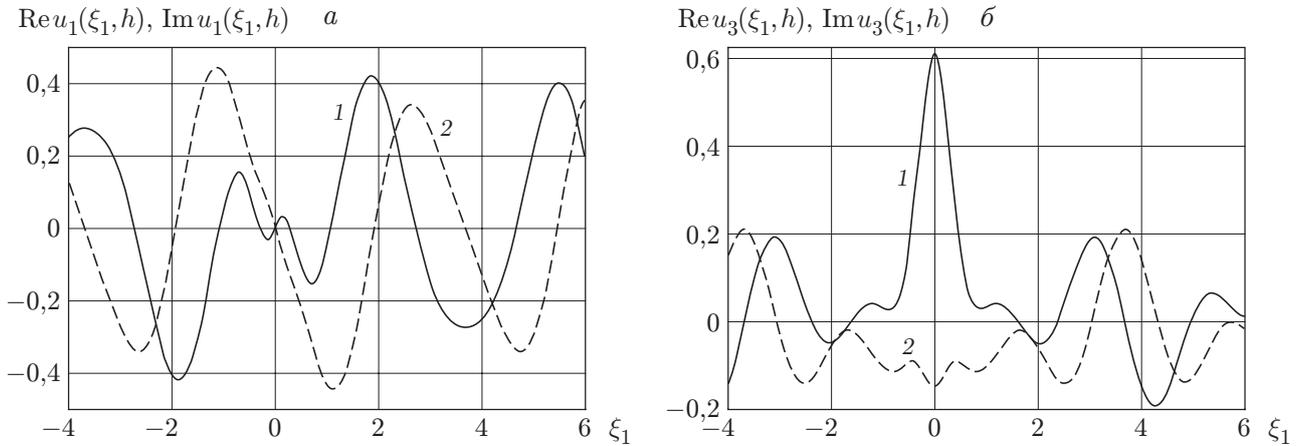


Рис. 1. Действительная (1) и мнимая (2) части компонент вектора перемещений на поверхности слоя:

a — u_1 ; b — u_3

с учетом граничных условий (2). В случае антиплоской ($j = 1, 3$; $i, m = 2$) и плоской ($i, j, m = 1, 3$) задач системы ГИУ имеют вид

$$\frac{1}{2} u_m(\mathbf{y}) = u_m^*(\mathbf{y}) - \text{v.p.} \int_{l_0} \sigma_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_j(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) dl_x, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_3) \in l_0. \quad (6)$$

Интеграл по l_0 понимается в смысле главного значения по Коши [12].

В общем случае цилиндрической полости произвольного поперечного сечения системы ГИУ (6) решены численно на основе метода граничных элементов [12, 13]. После определения полей смещений на контуре полости с использованием представлений (3) или (5) рассчитывается поле $u_m(\xi_1, h)$ ($m = 1, 2, 3$) на поверхности слоя $x_3 = h$.

Проведены серии численных экспериментов, в которых исследована зависимость полей перемещений на поверхности слоя от конфигурации полости и ее положения, а также рассмотрен ряд полостей произвольной конфигурации [6, 11].

На рис. 1 приведены действительная и мнимая части полей перемещений на поверхности слоя $u_1(\xi_1, h)$ и $u_3(\xi_1, h)$. Расчеты проведены для аустенитной стали с упругими постоянными $C_{11} = 2,627 \cdot 10^{11}$ Н/м², $C_{13} = 1,45 \cdot 10^{11}$ Н/м², $C_{33} = 2,16 \cdot 10^{11}$ Н/м², $C_{55} = 1,29 \cdot 10^{11}$ Н/м².

Колебания в слое возбуждаются нормальной сосредоточенной нагрузкой, приложенной в точке $x_0 = 0$ на его поверхности. Направляющая цилиндрической полости l_0 — трехлепестковая роза ($r = 0,1 \sin 3\varphi + 0,2$) с центром в точке $(0, h/2)$, $\varkappa = kh = 2$ (одна распространяющаяся мода). Число граничных элементов $N = 60$.

Отметим также, что процедура решения ГИУ (6) достаточно сложна и требует значительного объема вычислений. В предположении малости характерного размера круговой полости проведем асимптотический анализ задач 1, 2 с целью значительного упрощения схемы расчета волновых полей.

Асимптотический метод решения прямых задач. Асимптотический метод решения многопараметрической задачи (1), (2) о колебаниях ортотропного слоя с цилиндрической полостью, поперечное сечение которой представляет собой окружность радиусом r , реализован для области изменения безразмерных параметров $\varepsilon_1 \ll 1$, $\varepsilon_* < \varepsilon_2 < 1$, где $\varepsilon_1 = r/h$; $\varepsilon_2 = \omega r \sqrt{\rho/C}$, причем для задачи 1 $C = C_{44}$, для задачи 2 $C = C_{33}$. Обычно

решение обратной задачи идентификации строится при $\varepsilon_2 > \varepsilon_*$, что соответствует случаю малого дефекта, когда в слое имеются бегущие волны.

Рассмотрим асимптотический подход к решению задач 1, 2 на примере задачи 1.

Исследуем подынтегральное выражение (4). Выполнив параметризацию полости $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + r\boldsymbol{\eta}$, $\mathbf{x}_0 = \{x_{10}, x_{30}\}$, $\boldsymbol{\eta} = \{\cos \theta, \sin \theta\}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, подынтегральное выражение (4) представим в виде суммы двух слагаемых, первое из которых соответствует статическому случаю ($\varepsilon_2 = 0$), а второе является некоторой добавкой к первому слагаемому:

$$K(\mathbf{x}_0 + r\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = K^0(\mathbf{x}_0 + r\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + K^1(\mathbf{x}_0 + r\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}).$$

Было проведено исследование структуры функций $K^0(\mathbf{x}_0 + r\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$ и $K^1(\mathbf{x}_0 + r\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$. Показано, что имеют место следующие оценки. Если $\mathbf{x} \in l_0$, то $K^1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = O(\varepsilon_2^2)$ и $K^0(\mathbf{x}_0 + r\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \varepsilon_1^{-1}F(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) + O(\varepsilon_1)$. Осуществляя разложение в ряд поля смещений

$$u_2(\mathbf{x}_0 + r\boldsymbol{\eta}) = u_2^0(\mathbf{x}_0) + \varepsilon_1(u_{2,1}(\mathbf{x}_0) \cos \theta + u_{2,3}(\mathbf{x}_0) \sin \theta) + (\varepsilon_1^2/2)(u_{2,11}(\mathbf{x}_0) \cos^2 \theta + 2u_{2,13}(\mathbf{x}_0) \sin \theta \cos \theta + u_{2,33}(\mathbf{x}_0) \sin^2 \theta) + O(\varepsilon_1^3)$$

и подставляя полученное разложение в (3), вычислим криволинейный интеграл по контуру дефекта. В результате имеем представление поля перемещений всюду в области, занятой упругой средой:

$$u_2(\boldsymbol{\xi}) = u_2^*(\boldsymbol{\xi}) - \varepsilon_1^2 G(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) + o(\varepsilon_1^2). \quad (7)$$

Далее, выполнив предельный переход $\boldsymbol{\xi} \rightarrow \mathbf{y} \in l_0$ и полагая $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + r\boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{\zeta} = \{\cos \psi, \sin \psi\}$, $\psi \in [0, 2\pi]$, подставим полученные разложения в соотношение (7) и приравняем коэффициенты при линейно независимых функциях $1, \cos \psi, \sin \psi, \cos 2\psi, \sin 2\psi$. Определяя коэффициенты разложений, в результате получаем асимптотику для выражения поля смещений на контуре полости через эталонное поле смещений и его производные в центре полости. Например, в задаче 1 коэффициенты разложения поля смещений на контуре вычисляются аналитически, функция $G(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi})$ имеет вид

$$G(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\sqrt{\nu}}{2} \frac{(x_{10} - \xi_1)u_{2,1}(x_{10}, x_{30}) + (x_{30} - \xi_3)u_{2,3}(x_{10}, x_{30})}{(x_{10} - \xi_1)^2 + \nu(x_{30} - \xi_3)^2},$$

а поле смещений на контуре полости представляется в следующем виде:

$$u_2|_{l_0} = u_2^*(\mathbf{x}_0) + \varepsilon_1 \left(u_{2,1}^*(\mathbf{x}_0)(\sqrt{\nu} + 1) \cos \theta + u_{2,3}^*(\mathbf{x}_0) \frac{\sqrt{\nu} + 1}{\sqrt{\nu}} \sin \theta \right) + \frac{\varepsilon_1^2}{2} \left(\frac{u_{2,11}^*(\mathbf{x}_0)(\nu + \sqrt{\nu} + 1) - \sqrt{\nu}u_{2,33}^*(\mathbf{x}_0)}{\nu + 1} \cos^2 \theta + u_{2,13}^*(\mathbf{x}_0) \frac{(\sqrt{\nu} + 1)^2}{\sqrt{\nu}(\sqrt{\nu} + 2)} \sin 2\theta + \frac{-\sqrt{\nu}u_{2,11}^*(\mathbf{x}_0) + u_{2,33}^*(\mathbf{x}_0)(\nu + \sqrt{\nu} + 1)}{\nu + 1} \sin^2 \theta \right) + O(\varepsilon_1^2).$$

Таким образом, в задаче 1 получено явное представление поля смещений на контуре без использования процедуры дискретизации ГИУ (6) на основе метода граничных элементов.

На основе соотношения (3) можно построить представление поля перемещений в дальней от дефекта зоне ($\xi_1 > x_{10}$) на поверхности слоя $x_3 = h$. Вычисляя контурный интеграл в (3) с использованием теории вычетов и выделяя амплитуды поля перемещений на верхней границе в дальней зоне, получаем удобную для вычислений формулу расчета волнового поля в задаче 1:

$$u_2(\xi_1, h) = u_2^*(\xi_1, h) - \sum_{p=1}^M A_p(\mathbf{x}_0, r) e^{i\alpha_p \xi_1} + O(e^{-\gamma \xi_1}). \quad (8)$$

Множество полюсов $\{\alpha_n, n = 1, 2, \dots\}$ состоит из счетного множества чисто мнимых и конечного числа M вещественных полюсов. Вещественные полюсы α_n соответствуют бегущим волнам в слое, а остальные характеризуют неоднородные моды, амплитуды которых экспоненциально убывают.

В рамках предложенного асимптотического подхода выражения для амплитуд распространяющихся мод в слое имеют вид

$$A_p(\mathbf{x}_0, r) = (-1)^{p+1} r^2 \pi e^{-i\alpha_p x_{10}} \left[k^2 u_{2,1}^*(\mathbf{x}_0) \operatorname{sh}(\lambda_p x_{30}) / (\nu \alpha_p) + \right. \\ \left. + i u_{2,1}^*(\mathbf{x}_0) \operatorname{sh}(\lambda_p x_{30}) - u_{2,3}^*(\mathbf{x}_0) \lambda_p \operatorname{ch}(\lambda_p x_{30}) / (\nu \alpha_p) \right], \quad (9)$$

где

$$\alpha_p = \sqrt{k^2 h^2 - \pi^2 (-0,5 + p)^2 / (h \sqrt{\nu})}, \quad \lambda_p = i\pi (-0,5 + p) / h, \quad p = 1, 2, \dots, M.$$

Отметим также, что вся информация о конфигурации дефекта содержится в выражении для амплитуд бегущих волн (9), поэтому представление для расчета поля на поверхности слоя (8) далее будет использоваться при решении обратной задачи идентификации дефекта.

Проведен ряд численных экспериментов по расчету волновых полей на поверхности слоя в случае цилиндрической полости кругового сечения малого относительного размера с использованием трех подходов [8, 9]: метода граничных элементов, асимптотического подхода и приближения Борна, используемого в акустике [3]. Определена область применимости асимптотического подхода и приближения Борна при расчете волновых полей в дальней зоне $\varepsilon_1 = 0,001 \div 0,300$ при $\varepsilon_2 < 1$.

Постановка и решение обратных задач. Решение обратных задач восстановления параметров полости в случае антиплоских и плоских колебаний слоя строится на основе решения прямых задач и некоторой информации о поле перемещений на его поверхности. Построение решения таких обратных задач сводится к решению сложной нелинейной системы интегральных уравнений относительно смещений на контуре полости и самого контура [1, 11] и осуществляется с помощью некоторого итерационного процесса, причем начальное приближение находится с использованием метода регуляризации на компактных множествах. В рамках такого подхода обычно искомый контур определяется в классе простейших конфигураций (окружность, эллипс) [6, 8, 9, 11]. В настоящей работе искомый контур предлагается определять в более широком классе контуров. Для этого радиус-вектор, задающий контур полости в полярной системе координат, раскладывается в ряд Фурье с сохранением конечного числа гармоник. Таким образом, решение задач сводится к определению коэффициентов ряда Фурье a_i ($i = 0, 1, 2, 3$), b_j ($j = 1, 2, 3$) и координат центра полости. Неизвестные параметры находились из условия минимума неквадратичного функционала невязки, построенного в рамках метода позиционного зондирования:

$$\Phi(\mathbf{z}) = \sum_m \sum_{k=1}^{N_*} |f_m(\xi_{1k}) - u_m(\mathbf{z}, \xi_{1k})|^2,$$

$$\xi_{1k} \in [c, d], \quad m = 1, 2, 3, \quad \mathbf{z} = \{a_i, b_j, x_{10}, x_{30}\}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3.$$

Проведен ряд численных экспериментов по восстановлению контуров произвольной конфигурации в девятимерном евклидовом пространстве. Минимум функционала невязки определялся на основе генетического алгоритма [14]. На рис. 2 показаны искомый (сплошная линия) и восстановленный (точки) контуры полости. На рис. 2,а представлен резуль-

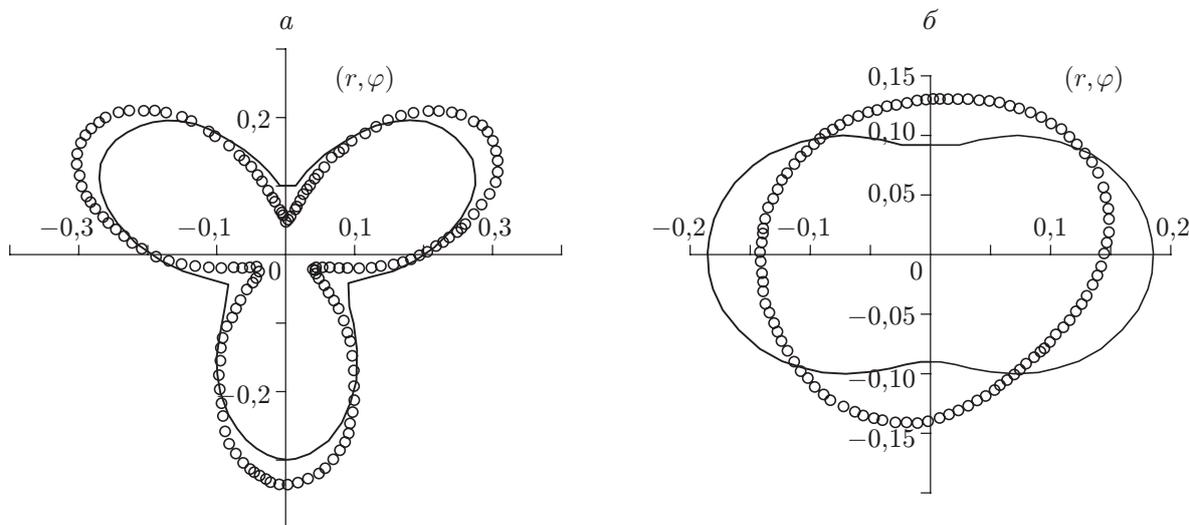


Рис. 2. Искомый (сплошная линия) и восстановленный (точки) контуры полости: *a* — трехлепестковая роза; *б* — эллипс

тат восстановления контура цилиндрической полости l_0 ($r = 0,1 \sin 3\varphi + 0,2$) с центром в точке $(0, h/2)$, на рис. 2,*б* — результат восстановления контура l_0 — эллипса с полуосями $a = 0,2$, $b = 0,1$ и с центром в точке $(0, h/2)$. Параметр $\varkappa = kh = 3,7$ соответствует трем бегущим волнам, число граничных элементов $N = 32$, а число точек зондирования $N_* = 6$.

Отметим, что итерационная процедура поиска минимума функционала невязки требует больших временных затрат, поскольку на каждом шаге решается соответствующая прямая задача, однако предложенный алгоритм решения можно значительно упростить, если использовать предположение о малости относительного размера дефекта. В этом случае в рамках асимптотического подхода предлагается определять контур дефекта в классе окружностей.

Пусть в качестве дополнительной информации используются заданные амплитудные значения A_p^* ($p = 1, 2$) поля перемещения в дальней зоне на верхней границе слоя для задачи 1. С использованием выражений для амплитуд (9) решение задачи идентификации полости можно свести к поэтапному определению ее параметров. Введем в рассмотрение функционалы невязки

$$\Phi(x_{10}, x_{30}) = \left| \frac{A_1^*}{A_2^*}(k) - \frac{A_1(x_{10}, x_{30}, k)}{A_2(x_{10}, x_{30}, k)} \right|^2; \tag{10}$$

$$\Phi(r) = \sum_{p=1}^2 |A_p^*(k) - A_p(r, k)|^2. \tag{11}$$

После минимизации функционала (10) найденные значения x_{10} , x_{30} подставлялись в функционал (11) и осуществлялась его минимизация для нахождения радиуса. Проведен ряд численных экспериментов по восстановлению контуров дефекта малого относительно размера (окружности, эллипса [8, 9] и трехлепестковой розы) с использованием асимптотического подхода. В таблице приведены результаты численных экспериментов по восстановлению контуров произвольной конфигурации в классе окружностей.

Отметим, что относительная разность площадей восстановленного и искомого поперечных сечений полости составила менее 5 % для среднезаглубленных дефектов и не превышала 11 % для приповерхностных дефектов. Координаты центра полости находились

Результаты численного эксперимента по восстановлению параметров полости

Истинные параметры полости	Восстановленные параметры окружности
Эллипс: $a = 0,02$, $b = 0,01$, $\psi = \pi/6$, $x_{10} = 1$, $x_{30} = 0,5$	$r = 0,0149$, $x_{10} = 1,044$, $x_{30} = 0,477$
Эллипс: $a = 0,025$, $b = 0,01$, $\psi = 0$, $x_{10} = 1$, $x_{30} = 0,5$	$r = 0,01532$, $x_{10} = 0,991$, $x_{30} = 0,498$
Трехлепестковая роза: $r = 0,015 \sin 3\varphi + 0,04$, $x_{10} = 1$, $x_{30} = 0,6$	$r = 0,0427$, $x_{10} = 0,974$, $x_{30} = 0,613$
Трехлепестковая роза: $r = 0,015 \sin 3\varphi + 0,04$, $x_{10} = 1$, $x_{30} = 0,85$	$r = 0,0436$, $x_{10} = 1,053$, $x_{30} = 0,899$

Примечание. ψ — угол наклона эллипса к оси Ox_1 .

с относительной погрешностью менее 6 %. Таким образом, с помощью предложенного алгоритма достаточно точно можно оценить масштаб дефекта и его положение в слое.

Анализ численных экспериментов, проведенных с использованием асимптотического подхода для решения обратных задач в случае дефекта произвольной конфигурации малого относительного размера, позволяет сделать вывод об эффективности предложенного алгоритма идентификации дефекта, а также значительно уменьшить время реконструкции параметров дефекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007.
2. Хенл Х. Теория дифракции / Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. М.: Мир, 1964.
3. Горюнов А. А. Обратные задачи рассеяния в акустике / А. А. Горюнов, А. В. Сасковец. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1989.
4. Bonnet M., Constantinescu A. Inverse problems in elasticity // Inverse Probl. 2005. N 21. P. 1–50.
5. Ворович И. И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей / И. И. Ворович, В. А. Бабешко. М.: Наука, 1979.
6. Ватульян А. О., Суворова О. А. Об обратной задаче для упругого слоя с полостью // Эколог. вестн. науч. центров черномор. сотрудничества. 2005. № 1. С. 10–16.
7. Ватульян А. О., Кацевич А. Я. Колебания упругого ортотропного слоя с полостью // ПМТФ. 1991. № 1. С. 95–97.
8. Ватульян А. О., Беляк О. А. К реконструкции малых полостей в упругом слое // Дефектоскопия. 2006. № 10. С. 33–39.
9. Ватульян А. О., Беляк О. А. Асимптотический подход к решению обратной задачи о реконструкции полости в упругом слое // Вестн. Донец. ун-та. Сер. А. Естеств. науки. 2006. Вып. 1. С. 73–79.
10. Ватульян А. О., Гусева И. А., Сюнякова И. М. О фундаментальных решениях для ортотропной среды и их применении // Изв. Сев.-Кавк. науч. центра. Сер. Естеств. науки. 1989. № 2. С. 81–85.

11. **Беляк О. А., Баранов И. В.** Обратная задача для слоя с полостью // Тр. 10-й Междунар. конф. “Современные проблемы механики сплошной среды”, Ростов-на-Дону, 5–9 дек. 2006 г. Ростов н/Д.: Центры валеологии вузов России, 2006. Т. 1. С. 56–61.
12. **Бребия К.** Методы граничных элементов / К. Бребия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. М.: Мир, 1987.
13. **Бенерджи П.** Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. М.: Мир, 1984.
14. **Баранов И. В., Ватульян А. О., Соловьев А. Н.** Об одном генетическом алгоритме и его применении в обратных задачах идентификации упругих сред // Вычисл. технологии. 2006. № 3. С. 14–26.

Поступила в редакцию 14/II 2008 г.
