

УДК 536.423

Неустойчивость Ландау при испарении жидкой пленки

Ю.Б. Зудин

Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»,
Москва

E-mail: yzudin@gmail.com

Задача Ландау об устойчивости фронта испарения обобщена на случай конечной толщины испаряющегося жидкого слоя. Проведен анализ влияния дополнительных факторов: условия непроницаемости твердой стенки и вытекающих из него пульсаций массовой скорости. Выполнены параметрические расчеты границы устойчивости при изменении толщины жидкой пленки и отношения плотностей фаз в рамках асимптотического подхода Ландау для числа Рейнольдса $Re > 1$. Проведены приближенные оценки влияния вязкости жидкости на границу устойчивости.

Ключевые слова: задача Ландау, фронт испарения, пульсации массовой скорости, асимптотический подход Ландау, граница устойчивости.

Введение

В 1944 году Ландау [1] были сформулированы и решены следующие три задачи гидродинамической неустойчивости поверхности разрыва в идеальной жидкости.

Тангенциальный разрыв. Требуется определить устойчивость поверхности раздела между двумя слоями жидкости различной плотности, скользящими друг относительно друга (решение Гельмгольца, 1868). Доказано: решение Гельмгольца абсолютно неустойчиво.

Фронт горения. Исходный газ натекает на поверхность раздела и сгорает в прилегающем к поверхности бесконечно тонком слое, превращаясь вследствие энергосвободения в продукты горения меньшей плотности. Дополнительный объем газа, порожденный тепловым расширением, толкает продукты горения по нормали к каждой локальной точке поверхности, вызывая ее искривления. Требуется определить возможность восстановления плоского вида фронта горения после внесения в газ случайных возмущений. Доказано: фронт горения абсолютно неустойчив по отношению к пространственным искривлениям любого размера.

Фронт испарения. Рассматривается предыдущая задача о фронте горения, но горение происходит на поверхности испаряющейся жидкости. Требуется определить условия устойчивости с учетом стабилизирующего влияния сил тяжести и поверхностного натяжения. Получено максимальное значение массовой скорости испарения, при которой режим горения устойчив.

Подробное описание перечисленных выше задач Ландау и методов их решения можно найти, в частности, в монографии [2]. Теория гидродинамической неустойчивости Ландау в дальнейшем использовалась при исследовании динамики процессов кипения метастабильной жидкости и испарения тонких жидких пленок.

Авторы работы [3] предложили приближенную физическую модель описания самоподдерживающегося фронта испарения (СФИ) — межфазной границы, движущейся вдоль нагревателя с постоянной скоростью. Получены расчетные и экспериментальные зависимости для определения скорости распространения СФИ в условиях нестационарного и квазистационарного законов тепловыделения. На основе теории гидродинамической неустойчивости Ландау введен критерий, позволяющий учесть развитие гидродинамических возмущений на межфазной границе при расчете скорости СФИ. В работе [4] представлены результаты экспериментального исследования динамики распространения СФИ при ступенчатом тепловыделении в условиях свободной конвекции. Получены опытные данные по скорости распространения и структуре СФИ при вскипании в недогретой и насыщенной жидкостях. Авторы работы [5] провели экспериментальное исследование влияния различных параметров на распространение СФИ при нестационарном тепловыделении в условиях свободной конвекции. Варьировались приведенное давление, геометрическая ориентация и шероховатость тепловыделяющей поверхности, недогрев жидкости, а также параметр микрогравитации. По результатам исследования было построено семейство границ гидродинамической устойчивости распространения СФИ.

Влияние наноразмерных добавок на динамику распространения СФИ исследовалось в работе [6]. Существенное увеличение скорости объясняется изменением динамических характеристик межфазной границы в условиях интенсивного испарения жидкости, содержащей добавки наноразмерных частиц. В работе [7] были получены экспериментальные данные по динамике развития теплообмена и распада жидкости в стекающих пленках при нестационарном тепловыделении. Обнаружено, что при ступенчатом законе тепловыделения кризис осушения пленки происходит в результате полного испарения жидкости в слое между гребнями крупных волн. Показано, что в области высоких тепловых нагрузок кризис теплообмена в стекающих пленках жидкости определяется динамикой распространения высокоскоростных СФИ. Авторы работы [8] провели экспериментальное исследование устойчивости поверхности пузыря, образованного в объеме термика в локально перегретой жидкости. Была получена диаграмма характерных состояний межфазной поверхности. На основе анализа механизма неустойчивости Ландау предложена модель перехода системы в неустойчивое состояние.

Цель настоящей работы — обобщение решения задачи о фронте испарения (третья задача неустойчивости Ландау) на случай конечной толщины жидкой пленки.

Постановка задачи

Следуя анализу Ландау [1], будем изучать задачу гидродинамической неустойчивости в приближении идеальной жидкости. Рассмотрим исходное невозмущенное состояние: “изотермическая поверхность–жидкая пленка толщиной h –полуограниченный массив насыщенного пара” (рис. 1). Пусть при прохождении массового потока испарения j через первоначально плоскую межфазную границу (фронт испарения) последняя начинает испытывать колебания с амплитудой ξ_0 , малой по сравнению с h .

Выберем систему координат так, чтобы невозмущенный фронт испарения в ней покоился, плоскость поверхности совместим с координатной плоскостью (y, z) , а ось x направим по нормали к ней (в сторону, заполненную паром); $x = 0$ соответствует поверхности невозмущенного фронта.

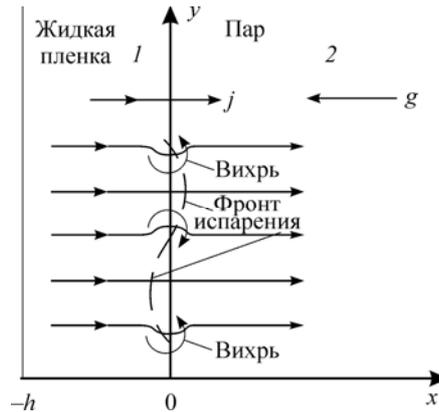
В лабораторной системе координат фронт испарения распространяется по покоящемуся пару. В системе координат, связанной с межфазной поверхностью, рассматривается движущаяся жидкость, которая подтекает к поверхности со скоростью V_1 , равной

Рис. 1. Схема развития неустойчивости фронта испарения.

нормальной скорости распространения фронта испарения; пар истекает через поверхность со скоростью V_2 .

Система уравнений Эйлера в обеих соприкасающихся фазах записывается в виде:

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + V \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned} \right\}$$



Пульсационное течение возникает в результате случайных возмущений в контактирующих средах вблизи фронта испарения. Возмущения межфазной поверхности ξ задаются в виде прогрессивной волны, распространяющейся по координате y вдоль поверхности:

$$\xi = \xi_0 \exp(iky + \omega t), \quad (2)$$

где $\xi_0 \ll h$. Будем искать решения для возмущений в виде

$$v = f_v \exp(iky + \omega t), \quad u = f_u \exp(iky + \omega t), \quad p = f_p \exp(iky + \omega t), \quad (3)$$

здесь t — время, k — волновое число, ω — инкремент возмущений (в общем случае является комплексной величиной), v , u — соответственно пульсации нормальной (по оси x) и тангенциальной (по оси y) компонент скорости, p — пульсации давления, $f_v(x)$, $f_u(x)$, $f_p(x)$ — амплитуды пульсаций. В рамках двумерной задачи выражения (3) описывают возмущения, однородные относительно поперечной координаты z . Качественный характер течения будет определяться знаком действительной части инкремента возмущений:

— при $\text{Re}(\omega) > 0$ вносимые в систему возмущения экспоненциально нарастают во времени (область неустойчивости);

— при $\text{Re}(\omega) < 0$ колебания параметров затухают (область устойчивости);

— случай $\text{Re}(\omega) = 0$ описывает границу устойчивости: частота пульсаций обращается в ноль, на поверхности разрыва существует спектр периодических пространственных неоднородностей, определяемых соответствующими волновыми числами.

Системы уравнений (1) с учетом (2), (3) решаются стандартным образом [9]. Подставляя входящие в (1) величины в виде суммы стационарных и пульсационных составляющих, осредняем полученные уравнения по периоду пульсаций и производим их линеаризацию. Затем вычитаем эти уравнения из исходных уравнений и в результате получаем систему линейных уравнений относительно пульсаций. Решение этих уравнений для области 1 (см. рис. 1), удовлетворяющее условию непроницаемости стенки ($x = -h / f_v = 0$), имеет вид:

$$(4) \quad \left. \begin{aligned} f_{1v} &= A \{ \exp(kx) - \exp[-k(2h+x)] \}, \\ f_{1u} &= iA \{ \exp(kx) + \exp[-k(2h+x)] \}, \\ f_{1p} &= -A\rho_1 \{ (\omega/k + V_1) \exp(kx) + (\omega/k - V_2) \exp[-k(2h+x)] \}. \end{aligned} \right\}$$

При $h \rightarrow \infty$ (полуограниченный массив жидкости) выражения (4) описывают асимптотическое решение Ландау. Согласно теореме Кельвина [10] исходное потенциальное течение в жидкой фазе будет сохраняться вплоть до межфазной границы. При пересечении искривленного фронта испарения вследствие скачков параметров на нем в потоке происходит вихреобразование. Потенциальная составляющая для полуограниченного массива пара (область 2 на рис. 1) имеет такой же вид, как и в [1]:

$$\left. \begin{aligned} f_{2v} &= B \exp(-kx), \\ f_{2u} &= -iB \exp(-kx), \\ f_{2p} &= B\rho_2(\omega/k - V_2) \exp(-kx). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Вихревая составляющая течения для этой области описывается системой уравнений (1), если в них положить $\partial p/\partial x = \partial p/\partial y = 0$:

$$\left. \begin{aligned} f_{2v} &= C \exp(-\omega x/V_2), \\ f_{2u} &= -\frac{iC\omega}{kV_2} \exp(-\omega x/V_2), \\ f_{2p} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Из материального баланса следует условие сохранения осредненного по периоду пульсаций массового потока вещества в обеих фазах:

$$\langle j \rangle = \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = \text{const.} \quad (7)$$

В асимптотическом случае ($h \rightarrow \infty$) равенства (7) приобретают характер тождества: $j \equiv \langle j \rangle = \text{const.}$ В общей постановке пульсации толщины жидкой пленки будут приводить к соответствующим пульсациям массовой скорости. Запишем приближенно выражение для массового потока (теплоемкостью тонкой пленки жидкости и конвективным переносом в ней пренебрегаем):

$$\langle j \rangle = \lambda_1 \Delta T / (hr), \quad (8)$$

здесь λ_1 — теплопроводность жидкости, ΔT — перегрев жидкой пленки, r — теплота фазового перехода. Из формул (7), (8) вытекают следующие выражения для пульсаций нормальных компонент скорости на фронте испарения v_j , обусловленных возмущениями массовой скорости:

$$v_{j1} = -V_1 \xi / h, \quad v_{j2} = -V_2 \xi / h. \quad (9)$$

Найдем из систем уравнений (4)–(6) с учетом (9) завихренность в области 2 (рис. 1):

$$\Omega \equiv \partial v / \partial y - \partial u / \partial x = \left[iC \left(k - \omega^2 / kV_2^2 \right) - ikV_2 \xi_0 / h \right] \exp(iky + \omega t - \omega x / V_2). \quad (10)$$

Легко показать, что производная от завихренности в паровой фазе вдоль линии тока равна нулю:

$$d\Omega/dt \equiv \partial\Omega/\partial t + V_2 (\partial\Omega/\partial x) = 0. \quad (11)$$

Из (11) следует, что в лагранжевой системе координат, связанной с выделенной индивидуальной частицей пара, возникающая на поверхности разрыва завихренность сохраняется вдоль траектории движения — $\Omega = \text{const.}$

Условия совместности

На поверхности разрыва должны выполняться следующие условия совместности: равенство тангенциальных компонент скорости —

$$u_1 + V_1 \frac{\partial \xi}{\partial y} = u_2 + V_2 \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad (12)$$

равенство нормальных компонент скорости —

$$v_1 - \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{V_1 \xi}{h} = v_2 - \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{V_2 \xi}{h} = 0, \quad (13)$$

непрерывность нормальной компоненты тензора потока импульса —

$$p_1 - p_2 = -\sigma (\partial^2 \xi / \partial y^2) + (\rho_1 - \rho_2) g \xi. \quad (14)$$

Повторим теперь вкратце основные положения теории неустойчивости Ландау. В 1868 году Гельмгольцем был найден класс решений уравнений Эйлера, описывающий взаимное скольжение двух слоев жидкости. В 1944 году Ландау показал, что разрывные решения Гельмгольца являются абсолютно неустойчивыми. Для недопущения тангенциальных разрывов при анализе устойчивости фронта пламени Ландау сформулировал дополнительное граничное условие (12). Так как теория идеальной жидкости не допускает ограничений на тангенциальную скорость, то математическое описание получается незамкнутым. Для его замыкания в работе [1] получено дополнительное вихревое решение (6) для области продуктов горения. Физической причиной вихреобразования является скачкообразное увеличение нормальной составляющей скорости на искривленной поверхности разрыва при сохранении ее касательной составляющей. Суперпозиция потенциального (5) и вихревого (6) частных решений приводит к общему решению третьей задачи неустойчивости Ландау.

На рис. 1 показаны линии тока для некоторого момента времени. Видно, что характер течения до и после поверхности разрыва качественно различен. В жидкой фазе 1 происходит монотонное расширение трубок тока на выпуклых участках фронта испарения и их монотонное сужение — на вогнутых. В отличие от этого в паровой фазе 2 линии тока ведут себя немонотонно: они сначала сужаются, а затем расширяются. Такое преломление линий тока на фронте испарения обусловлено вихреобразованием при его пересечении потоком испарения.

Анализ устойчивости

Ниже мы ограничимся практически значимым случаем сильного неравенства плотностей фаз:

$$\varepsilon \equiv \rho_2 / \rho_1 \ll 1. \quad (15)$$

С учетом условия сохранения (7) из (15) следует сильное неравенство нормальных скоростей по обе стороны от разрыва: $V_1 / V_2 \ll 1$.

Подстановка выражений для возмущений параметров в условия совместности (12)–(14) приводит к однородной системе из четырех линейных уравнений для четырех неизвестных: ξ_0, A, B, C . Разрешив эту систему, находим характеристическое уравнение для инкремента возмущений ω :

$$a_2 \omega^2 + a_1 \omega + a_0 = 0. \quad (16)$$

Коэффициенты квадратного уравнения (16) записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= FV_2, \\ a_1 &= (1+F)kV_1V_2, \\ a_0 &= \left[(1+F)\frac{kV_1}{h} - k^2V_2 + \frac{gk\rho_1 + \sigma k^3}{j} \right] V_1V_2, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где $F = \coth(kh)$.

Изменение во времени амплитуды возмущений в каждой точке межфазной границы происходит по закону $\sim \exp[\operatorname{Re}(\omega)t]$. Следовательно, устойчивость фронта испарения определяется знаком свободного члена a_0 характеристического уравнения (16). При этом возможны следующие три ситуации:

— $a_0 < 0$: $\operatorname{Re}(\omega_1) < 0$, $\operatorname{Re}(\omega_2) > 0$ (область неустойчивости) — первое решение экспоненциально затухает, второе — экспоненциально растет;

— $a_0 = 0$: $\operatorname{Re}(\omega_1) < 0$, $\operatorname{Re}(\omega_2) = 0$ (граница устойчивости) — первое решение экспоненциально затухает, второе не затухает и не растет;

— $a_0 > 0$: $\operatorname{Re}(\omega_1) < 0$, $\operatorname{Re}(\omega_2) < 0$ (область устойчивости) — первое и второе решения экспоненциально затухают.

Полагая в последнем уравнении (17) $a_0 = 0$, получаем — выражение для границы устойчивости:

$$j^2 = \frac{\rho_2 h (\sigma k^2 + \rho_1 g)}{kh - \varepsilon(1+F)}. \quad (18)$$

Для случая полуграниченного массива $h \rightarrow \infty$ из (18) следует зависимость $j(k)$:

$$j^2 = \frac{\rho_2 (\sigma k^2 + \rho_1 g)}{k}, \quad (19)$$

имеющая минимум с координатами:

$$\left. \begin{aligned} k_{\min} &= \sqrt{\frac{\rho_1 g}{\sigma}}, \\ j_{\min} &= (4\rho_2^2 \rho_1 \sigma g)^{1/4}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Соотношения (19), (20) представляют собой результаты асимптотического решения Ландау, приведенного в работе [1] на стр. 668 в конце раздела «Задача 2». В общем случае формула (18) в области $kh < \varepsilon(1+F)$ дает нефизичный результат: $j^2 < 0$. Это означает, что в длинноволновом интервале возмущений имеет место абсолютная неустойчивость. Минимально возможное значение волнового числа, при котором еще выполняется условие $j^2 > 0$, может быть аппроксимировано формулой:

$$k_* = \sqrt{\varepsilon} (1 + 0,525\sqrt{\varepsilon}) / h. \quad (21)$$

Введем следующие безразмерные величины: волновое число — $\tilde{k} = kl_0$, массовая скорость — $\tilde{j} = j/j_0$, толщина жидкой пленки (число Бонда) — $Bo = h/l_0$. Здесь $l_0 = \sqrt{\sigma/\rho_1 g}$ — масштаб длины (капиллярная постоянная), $j_0 = \sqrt{2\rho_1\rho_2 g l_0}$ — масштаб массовой скорости. С учетом принятых обозначений асимптотические соотношения (19), (20) переписутся в виде:

$$\tilde{j}^2 = (\tilde{k}^2 + 1)/(2\tilde{k}), \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{k}_{\min} &= 1, \\ \tilde{j}_{\min} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

На рис. 2 приведены кривые $\tilde{j}(\tilde{k})$, рассчитанные по формуле (18) для различных значений толщины пленки. Область длинноволновых возмущений $0 < k < k_*$ соответствует абсолютной неустойчивости; при $k = k_*$ имеем $\tilde{j} = \infty$. В пределе бесконечно тонкой пленки ($Bo \rightarrow 0$) расчетные кривые опускаются непосредственно на кривую Ландау (правые участки кривых). Для этой области можно выписать аналитические асимптотики:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{j} &\approx 1,14 \varepsilon^{1/4} / \sqrt{Bo}, \\ \tilde{k} &\approx 1,73 \sqrt{\varepsilon} / Bo. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

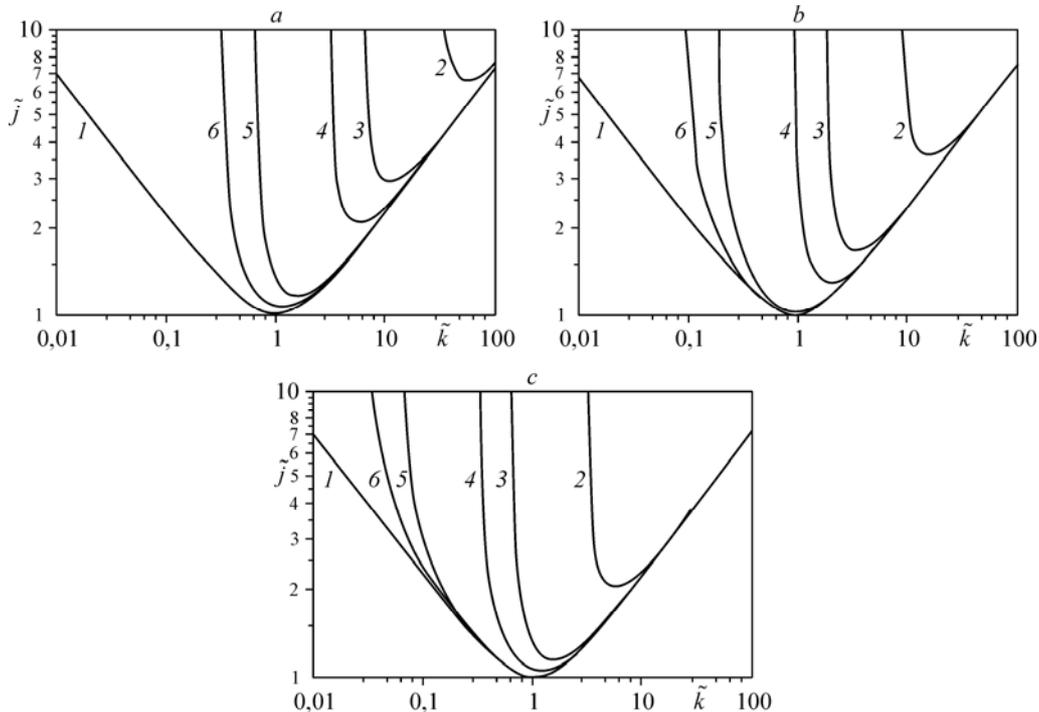


Рис. 2. Зависимость минимального массового расхода на границе устойчивости от волнового числа в безразмерном виде.

Решение Ландау (22) (1); расчет по формуле (18) при $\varepsilon = 10^{-3}$ для значений числа Бонда: $Bo^{-3} = 10^{-3}$ (2), $5 \cdot 10^{-3}$ (3), 10^{-2} (4), $5 \cdot 10^{-2}$ (5), 10^{-1} (6).

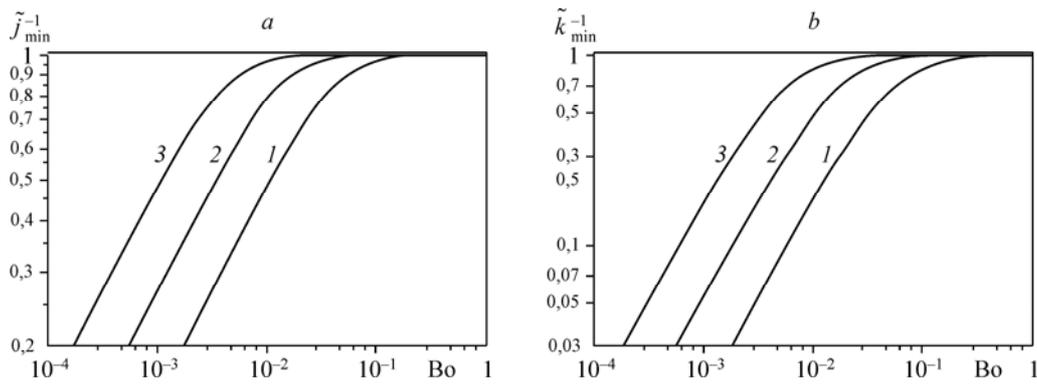
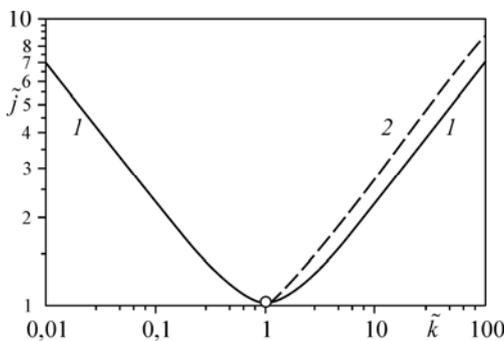


Рис. 3. Зависимости минимального массового потока испарения (а) и волнового числа (b), соответствующего минимальному массовому потоку испарения, от числа Бонда на границе устойчивости в безразмерном виде.
 $\varepsilon = 10^{-5}$ (1), 10^{-4} (2), 10^{-3} (3).

Как видно из рис. 2, при увеличении Bo кривые $\tilde{j}(\tilde{k})$ смещаются в область меньших волновых чисел, причем при уменьшении параметра ε эта тенденция усиливается. В естественной асимптотике ($Bo \rightarrow \infty$) расчетная кривая совпадает с решением Ландау, описываемым формулой (22) (правые участки кривых). Интересно отметить, что к такому же результату приводит и асимптотика при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом согласно (21) область абсолютной неустойчивости исчезает ($k_* \rightarrow 0$).

На рис. 3 отражена зависимость координат минимума кривых $\tilde{j}(\tilde{k})$ от числа Бонда. Видно, что при увеличении толщины пленки точка минимума смещается в область больших волновых чисел вдоль кривой Ландау, при этом оставаясь выше последней.

На рис. 4 приведена кривая, огибающая минимумы зависимостей $\tilde{j}(\tilde{k})$. При $\tilde{k} \gg 1$ эта огибающая проходит эквидистантно зависимости Ландау, превышая последнюю в $\sqrt{3/2} \approx 1,225$ раз. Это соотношение следует из асимптотики (24) и соответствует области $Bo \leq 1$. При увеличении толщины пленки огибающая отклоняется вниз и при $Bo \rightarrow \infty$ совпадает с предельной точкой $\tilde{k} = 1$, сливаясь таким образом с минимумом кривой Ландау. При $\varepsilon \geq 10^{-2}$ в окрестности $\tilde{k} \rightarrow 1$ наблюдается расслоение огибающих кривых, усиливающееся при росте параметра ε . Однако в рамках изначально принятого сильного неравенства $\varepsilon \ll 1$ указанная особенность может не учитываться.



Отметим, что принятое в анализе условие стационарного процесса испарения с наложенными пульсациями малой амплитуды подразумевает некоторый механизм поддержания постоянной толщины пленки при высоких значениях

Рис. 4. Решение Ландау (1) и кривая, огибающая минимумы зависимостей $\tilde{j}(\tilde{k})$ (2).

плотности теплового потока при интенсивном испарении. Здесь можно приближенно опираться на исторически первую теоретическую модель процесса кипения [11]: «Представляется естественным ввести для процесса кипения понятие своеобразного пограничного слоя на поверхности, имеющего некоторую среднюю (или эффективную) толщину, порядок которой, как и обычно, определяется из условия соизмеримости эффективных вязкостных и инерционных сил».

Оценка числа Рейнольдса

Как известно, теория Ландау имеет асимптотический характер — при стремлении к бесконечности числа Рейнольдса, построенного по нормальной скорости (для каждой из фаз) и длине волны возмущения. Из физических соображений можно предполагать, что для тонкой пленки будут проявляться эффекты вязкости жидкости, влияющие на ее периодическое перетекание вдоль координаты y . В работе [2] проведен учет влияния на границу устойчивости вязкости каждой из фаз на основе асимптотического разложения всех членов по малому параметру задачи — обратной величине числа Рейнольдса. С математической точки зрения задача о гидродинамической устойчивости является задачей теории сингулярных возмущений, включающей методы решения дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Проведенные авторами [2] расчеты показали, что вязкость обеих сред оказывает стабилизирующее влияние на фронт испарения.

Проведем расчет чисел Рейнольдса в тонкой жидкой пленке на основе полученного выше решения для модели идеальной жидкости. Для этого воспользуемся аналитическими соотношениями (24), описывающими ниспадающие ветви зависимостей, изображенные на рис. 3. Получим:

$$\text{Re}_{1\min} = V_{1\min} l_{\min} / \nu_1 \approx 5,84 (\varepsilon^{1/4} / \nu_1) \sqrt{\sigma h / \rho_1}, \quad (25)$$

где $l = 2\pi/k$ — длина волны возмущения.

Для оценок по формуле (25) привлекались данные работы [3] по исследованию самоподдерживающегося фронта испарения в азоте при атмосферном давлении. Толщины пленки рассчитывались по соотношению:

$$h \approx \lambda_1 \Delta T / q. \quad (26)$$

Подстановка в формулу (26) значений теплового потока q и перепада температур ΔT через испаряющуюся пленку для шести исследованных в работе [3] режимов дала значения толщины пленки в диапазоне $h \approx 23 \div 142$ мкм. Согласно (25) это соответствует изменению минимального числа Рейнольдса для жидкой фазы в диапазоне $\text{Re}_{\min} \approx 72 \div 108$. В соответствии с выводами работы [2] это приводит к оценке малого параметра асимптотического разложения как $1/\text{Re}_1 \sim 10^{-2}$. Этот несколько неожиданный результат является следствием особенностей асимптотических соотношений (24): малые толщины пленки компенсируются высокими нормальными скоростями; в результате имеем $\text{Re}_{\min} \gg 1$.

Оценка влияния гидродинамического граничного условия на стенке

С физической точки зрения ясно, что при рассмотрении задачи устойчивости межфазной границы при испарении с поверхности тонкой жидкой пленки могут стать существенными эффекты вязкости, определяющие профиль скорости в пленке, а также

влияющие на интенсивность подтекания жидкости к поверхности испарения. При строгой постановке задачи следует заменить уравнения Эйлера (1) на уравнения Навье–Стокса:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + V \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

В линеаризованном приближении система уравнений (27) может быть сведена к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка типа уравнения Орра–Зоммерфельда. Как указывают авторы работы [9], задача решения этого уравнения является весьма тяжелой: «Даже в тех немногих случаях, когда удастся явно выписать общее решение уравнения Орра–Зоммерфельда, например для течения Куэтта, уравнение, к которому сводится задача, лишь с огромным трудом поддается анализу». Поэтому в рамках настоящей работы ограничимся приближенными оценками, которые могут иметь достаточно грубый характер.

Решение (4) для области I (см. рис. 1) удовлетворяет условию непроницаемости стенки, но не удовлетворяет условию прилипания на стенке —

$$x = -h : f_u \neq 0, f_v = 0. \quad (28)$$

Граничное условие (28) является естественным в рамках модели идеальной жидкости. Запишем теперь следующие два искусственных решения системы уравнений Навье–Стокса (27). Первое из них

$$\left. \begin{aligned} f_{1v} &= A \exp(kx), \\ f_{1u} &= iA \exp(kx), \\ f_{1p} &= -A\rho_1 (\omega/k + V_1) \exp(kx) \end{aligned} \right\}$$

не удовлетворяет ни условию непроницаемости, ни условию прилипания —

$$x = -h : f_u \neq 0, f_v \neq 0. \quad (29)$$

Второе искусственное решение

$$\left. \begin{aligned} f_{1v} &= A \{ \exp(kx) + \exp[-k(2h+x)] \}, \\ f_{1u} &= iA \{ \exp(kx) - \exp[-k(2h+x)] \}, \\ f_{1p} &= -A\rho_1 \{ (\omega/k + V_1) \exp(kx) - (\omega/k - V_2) \exp[-k(2h+x)] \} \end{aligned} \right\}$$

удовлетворяет условию прилипания, но не удовлетворяет условию непроницаемости —

$$x = -h : f_u = 0, f_v \neq 0. \quad (30)$$

Гидродинамическим граничным условиям ((26–28)) соответствуют следующие выражения для параметра F в уравнении (18) для границы устойчивости:

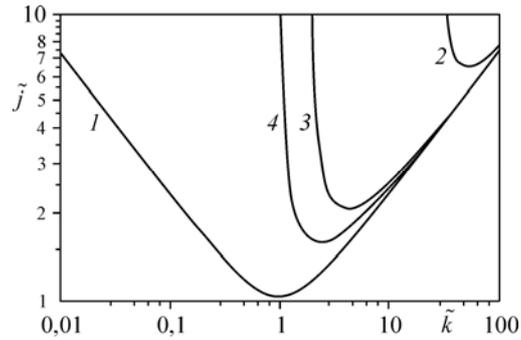
$$F = \coth(kh), \quad (31)$$

$$F = 1, \quad (32)$$

$$F = \tanh(kh). \quad (33)$$

Рис. 5. Иллюстрация влияния гидродинамического граничного условия на стенке на границу устойчивости при $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение Ландау (1); граница устойчивости для различных видов параметра F : $F = \coth(kh)$ (2), 1 (3), $\text{th}(kh)$ (4).



Подставляя выражения (31–33) в соотношение (18) и приравнявая его знаменатель нулю, получаем следующие оценки (при $\varepsilon \ll 1$) для правой границы волновых чисел, отрезающих область абсолютной неустойчивости:

$$k_* \approx \sqrt{\varepsilon}/h, \quad (34)$$

$$k_* \approx 2\varepsilon/h, \quad (35)$$

$$k_* \approx \varepsilon/h. \quad (36)$$

На рис. 5 приведены кривые зависимостей $\tilde{j}(\tilde{k})$, рассчитанных по уравнению (18) для трех видов функции F , которые определялись формулами (31)–(33). Параметром для этих кривых, описывающих зависимость массового потока испарения от волнового числа, являлось число Бонда. Как видно из рис. 5, замена условия непроницаемости (31) на условие прилипания (33) при фиксированном Bo приводит к сужению диапазона абсолютной неустойчивости. При этом «нейтральное» граничное условие (32) занимает некоторое промежуточное положение. Наблюдаемое на рис. 5 смещение вертикальной асимптотики кривых $\tilde{j}(\tilde{k})$ влево при замене естественного граничного условия (31) на искусственные граничные условия (32) и (33) иллюстрируется формулами (34)–(36). При фиксированных ε и h значение k_* для условия прилипания (36) оказывается меньшим, чем для условия непроницаемости (34). Таким образом, при последовательном переборе граничных условий область абсолютной неустойчивости $0 < k < k_*$ сужается, следовательно, устойчивость системы повышается. Эта тенденция усиливается при уменьшении параметра ε . Можно с осторожностью предполагать, что такое увеличение устойчивости качественно отражает стабилизирующее влияние вязкости жидкости, отмеченное в работе [2].

Таким образом, получены следующие оценки влияния вязкости жидкости на границу устойчивости:

— минимальное число Рейнольдса, построенное по нормальной скорости жидкости и длине волны возмущения, много больше единицы;

— замена условия непроницаемости на условие прилипания приводит к существенному увеличению устойчивости системы.

С точки зрения автора, это место является самым спорным в рамках представленного анализа и требует проведения более строгого исследования. Представляется, однако, что качественные тенденции настоящего анализа, проведенного в рамках приближения идеальной жидкости, останутся без изменения.

Заключение

Третья задача неустойчивости Ландау об устойчивости фронта испарения обобщена на случай конечной толщины испаряющегося жидкого слоя. Показано, что в общей постановке проявляется влияние дополнительных факторов: условия непроницаемости

твердой стенки и вытекающих из него пульсаций массовой скорости. Проведены параметрические расчеты границы устойчивости при изменении толщины жидкой пленки и отношения плотностей фаз в рамках асимптотического подхода Ландау для числа Рейнольдса $Re \gg 1$. Получено, что при конечной толщине пленки всегда существует конечный диапазон длинноволновых возмущений, в пределах которого система является абсолютно неустойчивой. Показано, что указанный диапазон сужается с увеличением толщины пленки и уменьшением отношения плотностей фаз. Получены аналитические асимптотические соотношения, связывающие толщину пленки, массовую скорость и волновое число возмущений на границе устойчивости. Проведены приближенные оценки влияния вязкости жидкости на границу устойчивости.

Список обозначений

Bo — число Бонда,	r — теплота фазового перехода, Дж/кг,
g — ускорение свободного падения, m/s^2 ,	t — время, с,
h — толщина пленки, м,	x — координата, нормальная к плоскому фронту испарения, м,
j — массовый поток испарения, kg/m^2s ,	y — координата вдоль плоского фронта испарения, м,
k — волновое число, $1/m$,	V — скорость невозмущенного течения, m/s ,
p — возмущенное давление, Н/м,	v — скорость возмущенного течения вдоль оси x , m/s ,
q — плотность теплового потока, Wt/m^2 ,	u — скорость возмущенного течения вдоль оси y , m/s .
Re — число Рейнольдса,	

Греческие символы

ε — отношение плотностей паровой и жидкой фаз,	ν — кинематический коэффициент вязкости, m^2/s ,
ξ — возмущения межфазной поверхности, м,	Ω — завихренность, $1/s$,
λ — коэффициент теплопроводности, $Wt/(m \cdot K)$,	ρ — плотность, kg/m^3 ,
ω — инкремент возмущений, $1/s$,	σ — коэффициент поверхностного натяжения, Н/м,
	ΔT — перегрев жидкой пленки, К.

Индексы

1 — жидкость,	* — граница абсолютной неустойчивости.
2 — граница абсолютной неустойчивости,	

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. М, Л.: ОГИЗ: Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1944. Т. III: Механика сплошных сред. Гидродинамика и теория упругости. 624 с.
2. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980. 478 с.
3. Павленко А.Н., Лель В.В. Приближенная расчетная модель самоподдерживающегося фронта испарения // Теплофизика и аэромеханика. 1999. Т. 6, № 1. С. 111–124.
4. Pavlenko A.N., Tairov E.A., Zhukov V.E., Levin A.A., Moiseev M.I. Dynamics of transient processes at liquid boiling-up in the conditions of free convection and forced flow in a channel under nonstationary heat release // J. of Engng Thermophys. 2014. Vol. 23, No. 3. P. 173–193.
5. Zhukov V.E., Pavlenko A.N., Moiseev M.I., Kuznetsov D.V. Propagation dynamics of self-sustained evaporation front and characteristics of small-scale perturbations at the interface // Proc. Of 15-th Int. Heat Transfer Conf. (IHTC-15), Kyoto, Japan, 10-15 August 2014, IHTC 2014 — Report 8766. 14 p.
6. Pavlenko A.N., Zhukov V.E., Starodubtseva I.P. Propagation of self-sustained evaporation fronts at step-wise heat generation and crisis phenomena at pool boiling // Computational Thermal Sci. 2011. Vol. 3, No. 5. P. 419–426.
7. Pavlenko A.N., Surtaev A.S., Starodubtseva I.P., Volodin O.A., Chernyavskiy A.N., Tsoy A.N., Pyatkov A.S. Decay of falling wavy liquid films at nonstationary heat release // Proc. of 14-th Int. Heat Transfer Conf. (IHTC-14), Washington, USA, 8-13 August 2010, IHTC 2010—Report 22174. 8 p.
8. Сыромятников С.Н., Павлов П.А. Неустойчивость поверхности испарения // Теплофизика высоких температур. 1998. Т. 36, No. 2. С. 298–303.
9. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 367 с.
10. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Изд. Дрофа, 2003. 840 с.
11. Лабунцов Д.А. Физические основы энергетики. Избранные труды по теплообмену, гидродинамике, термодинамике. М.: Издательство МЭИ, 2000. 388 с.

Статья поступила в редакцию 30 июня 2014 г.