ПМТФ, № 2, 1969

РЕЛАКСАЦИЯ И РАЗНОСТЬ ТЕМПЕРАТУР В КВАЗИЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ С УЧЕТОМ СТОЛКНОВЕНИЙ ДЛЯ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

Г. З. Мачабели

(Тбилиси)

Получено уравнение для продольных волн в квазилинейном приближении с учетом столкновений для плазмы, помещенной в постоянное магнитное поле. Вычислен вклад в релаксацию температур двухкомпонентной плазмы вследствие взаимодействия волн с резонансными частицами. Найдена разность температур электронов и ионов в стационарном случае, а также разность перпендикулярной и параллельной по отношению к магнитному полю составляющих температур, частиц одного сорта, в электрическом поле волны.

1. Квазилинейное приближение представляет интерес для слаботурбулентных процессов и описывает эффекты, интерпретируемые как взаимодействие резонансных частиц с волной в случае, когда энергия плазменных колебаний значительно меньше хаотического движения частиц и намного больше энергии тепловых шумов на коллективных степенях свободы.

В данной работе рассматривается квазилинейное приближение для магнитоактивной плазмы с учетом столкновений заряженных частиц. На магнитное поле накладывается условие

$$H \ll 2c\,(\pi m_a n_a)^{1/2} \tag{1.1}$$

Здесь n_a — число частиц сорта a в единице объема. Условие (1.1) означает, что ларморовский радиус частиц сорта a намного превосходит дебаевский радиус частиц того же сорта. Следовательно, воздействием магнитного поля в столкновениях частиц можно пренебречь.

При рассмотрении уравнений с самосогласованным полем можно выделить две области: коротковолновую (область столкновений) и длинноволновую (область излучений) [1]. При рассмотрении квазилинейного приближения в работе [1] коротковолновой областью пренебрегалось, так как в приближении самосогласованного поля коротковолновые возбуждения быстро затухают. Однако для того чтобы учесть и самосогласованное поле и диссипативные эффекты вслед за работой [2] исходными будем брать уравнения, в которых учитывается и самосогласованное поле, и столкновения.

Для магнитоактивной плазмы имеем

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v}\,\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{q}} + e\mathbf{E}\,\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}_a} + \frac{e_a}{c}\,[\mathbf{v}\mathbf{H}]\,\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}_a} = S_a \tag{1.2}$$

Произведем разбиение функции распределения частиц

$$f_a = f_{0a} + f_{1a} \tag{1.3}$$

Здесь f_{0a} — плавноменяющаяся, а f_{1a} — быстропеременная функции распределения. Накладывая на величину среднего поля условие

$$\frac{eE}{m_a v_a \omega} \ll 1$$

и подставляя (1.3) в (1.2), получим два уравнения для «фона» и «пульсации»

$$\frac{\partial f_{0a}}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_{0a}}{\partial \mathbf{q}} + \left\langle e\mathbf{E}\frac{\partial f_{1a}}{\partial \mathbf{p}_a}\right\rangle + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]\frac{\partial f_{0a}}{\partial \mathbf{p}_a} = S_{0a} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial f_{1a}}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_{1a}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]\frac{\partial f_{1a}}{\partial \mathbf{p}_a} + e\mathbf{E}\frac{\partial f_{0a}}{\partial \mathbf{p}_a} = S_{1a} \tag{1.5}$$

(Скобки в третьем члене (1.4) означают усреднение по быстрым пульсациям.)

Здесь S_{0a} — интеграл, описывающий вклад столкновений в «фоновую» функцию распределения и для кулоновской плазмы записывается в форме Ландау, S_{1a} — интеграл столкновений для быстропеременной функции распределения, который моделируем следующим образом [2]:

$$S_{1a} = \nu_a(\mathrm{v}) f_{1a} \tag{1.6}$$

Здесь $\nu_a(\mathrm{v})$ — обратное время релаксации за счет столкновений, дающих вклад в быстропеременную часть функции распределения, $\nu_a(\mathrm{v})$ является функцией скорости, но в слабонеравновесной плазме ν_a будем считать усредненной по импульсам эффективной частотой столкновение, значение которого для холодной плазмы даны в работах [3, 4]. В случае горячей плазмы ν_a будем считать неким параметром, близким к частоте электрон-ионных столкновений.

Используя (1.6), найдем решение уравнения (1.5). Произведем преобразование Фурье найденного решения по координатам и времени. Переходя к цилиндрическим координатам ($v_x = v_\perp \cos\varphi$, $v_y = v_\perp \sin\varphi$, $v_z = v_z$; $k_x = k_\perp \cos\psi$, $k_y = k_\perp \sin\psi$, $k_z = k_z$) после некоторых преобразований, получим

$$f_{1a}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}_a) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_a}\right)\frac{e_a\Phi}{\omega - k_z v_z - n\Omega_a + i\nu_a} \times$$
$$\times\left[k_z\frac{\partial}{\partial p_{az}} + \frac{n\Omega_a}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial p_{a\perp}}\right] f_{0a} \tag{1.7}$$

Здесь $\Omega_a = eH / m_a c$, $\mathbf{E} = -i\mathbf{k}\Phi$, $J_n(k_\perp v_\perp / \Omega_a)$ — функция Бесселя, а индекс $\perp$ показывает перпендикулярное направление по отношению к магнитному полю.

Подставляя (1.7) в (1.5) и усредняя по углу φ, для изотропной «фоновой» функции имеем

$$\frac{\partial f_{0a}}{\partial t} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[k_z\frac{\partial}{\partial p_{az}} + \frac{n\Omega_a}{v_\perp}k_\perp\left(\frac{\partial}{\partial p_{a\perp}} + \frac{1}{p_\perp}\right)\right]\frac{1}{2}\frac{J_n^2(k_\perp v_\perp/\Omega_a)(e\Phi)^2\nu_a}{(\omega - k_z v_z - n\Omega_a)^2 + \nu_a^2} \times$$
$$\times\left[k_z\frac{\partial}{\partial p_{az}} + \frac{n\Omega_a}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial p_{a\perp}}\right] f_{0a} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]\frac{\partial f_{0a}}{\partial \mathbf{p}_a} = S_{0a} \tag{1.8}$$

Выражение (1.8) есть искомое уравнение для кулоновской магнитоактивной плазмы с учетом столкновений в квазилинейном приближении.

При выводе уравнений квазилинейного приближения в работах [5, 6] делается предположение о случайности фаз плазменных волн и считается, что они коррелируют друг с другом в течение времени, которое много меньше времени релаксации функции f_{0a}.

В данной работе, как и в [2], предположения о случайности фаз не делается и уравнение (1.8) получено для плоской волны.

При $H = 0$ уравнение (1.8) совпадает с уравнением, полученным в квазилинейном приближении с учетом столкновений без магнитного поля [2].

2. В работах Ландау [7] и Когана [8] рассматривалась релаксация температур в неизотермической плазме. Учитывались только парные столкновения частиц. В [9] было показано, что учет дальних взаимодействий частиц с плазменными волнами для кулоновской плазмы дает существенный вклад в скорость релаксации температуры. Учет дальних взаимодействий, как и парных, производился в [9] в интеграле столкновений и давал член, описывающий взаимодействие тепловых шумов с частицами. В данной работе в интеграле столкновений уравнения (1.8) будем учитывать только парные столкновения, а взаимодействия резонансных частиц с плазменными волнами, амплитуды поля которых не выходят за рамки квазилинейного режима, учтем в левой части уравнения. Для этого сначала получим уравнение баланса энергии из уравнения (1.8).

Зададим функцию распределения частиц сорта a в виде Максвелла

$$f_{0a} = \frac{n_a}{\pi^{3/2} v_{az} v_{a\perp}^2} \exp\left(-\frac{v_z^2}{v_{az}^2} - \frac{v_\perp^2}{v_{a\perp}^2}\right) \tag{2.1}$$

где v_a — тепловая скорость частицы.

Умножим уравнение (1.8) на $^1/_2 m_a v_z^2$, подставим (2.1) и проинтегрируем по $d\mathbf{v}$. Получим

$$\frac{1}{2} n_a \frac{dT_{az}}{dt} - n_a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{k_\perp^2 v_{a\perp}^2}{2\Omega_a^2}\right) I_n\left(\frac{k_\perp^2 v_{a\perp}^2}{2\Omega_a^2}\right) \times$$
$$\times \frac{(e\Phi)^2}{m_a}\left\{\frac{\nu_a}{v_{a\perp}^2}\left(1 - \pi^{1/2}\left[2x_a \operatorname{Im} W(z_a) - \frac{x_a^2 - y_a^2}{y_a} \operatorname{Re} W(z_a)\right]\right) + \right.$$
$$\left. + \pi^{1/2} \frac{n\Omega_a}{v_{a\perp}^2}(x_a \operatorname{Re} W(z_a) - y_a \operatorname{Im} W(z_a))\right\} = \int {}^1/_2 m_a v_{az}^2 S_{0a}\, d\mathbf{v} \tag{2.2}$$

Здесь

$$T_{az} = \int \frac{1}{2} m_a v_z^2 f_{0a}\, d\mathbf{v}$$

— температура частиц сорта a,

$$W(z_a) = \exp(-z^2)\left[1 + \frac{2i}{\pi^{1/2}} \int_0^z \exp(t^2)\, dt\right]$$

— интеграл вероятности,

$$z_a = x_a + y_a, \quad x_a = \frac{\omega - n\Omega_a}{k_z v_{az}}, \quad y_a = \frac{\nu_a}{k_z v_{az}}, \quad I_n\left(\frac{k_\perp^2 v_{a\perp}^2}{2\Omega_a^2}\right)$$

— модифицированная функция Бесселя.

В дальнейшем рассмотрим два предельных случая холодной и горячей плазмы.

а. Рассмотрим случай холодной плазмы, когда справедливо неравенство

$$\frac{(\omega - n\Omega_a)^2}{k_z^2 v_{az}^2} \gg 1 \tag{2.3}$$

и условие достаточно большого магнитного поля

$$\frac{k_\perp^2 v_{a\perp}^2}{2\Omega_a^2} \ll 1 \tag{2.4}$$

Условие (2.4) дает возможность ограничиться в разложении функции Бесселя членами с $n=0$. Ролью резонансов на обертонах $n=\pm 1$, ± 2, ... пренебрегаем.

В случае двухкомпонентной электрон-ионной плазмы, когда $T_e \neq T_i$ и $T_{az} = T_{a\perp}$ $(a = e, i)$, производя асимптотическое разложение интеграла вероятности при большом аргументе и учитывая неравенство (2.4), из (2.2) получим

$$\frac{3}{2}\frac{dT_e}{dt} = \frac{(e\Phi)^2 k_z^2}{2m_e\omega^2}\nu_e - \frac{3}{2}\frac{T_e - T_i}{\tau_{ei}^T} \qquad (2.5)$$

Здесь τ^T_{ei} — время релаксации температур из-за столкновений электронов с ионами.

При выводе (2.5) пренебрегалось ν_a^2 по сравнению с ω^2.

Первый член правой части (2.5) описывает вклад в изменение температуры вследствие взаимодействия волны с резонансными частицами, а второй — вследствие кулоновских столкновений пары (электрон-ионные столкновения).

Для ионов имеем уравнение, аналогичное (2.5). Однако в уравнении для ионов квазилинейный член в m_e / m_i раз меньше аналогичного члена из (2.5). Пренебрегая этим членом, имеем

$$\frac{3}{2}\frac{dT_i}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{T_i - T_e}{\tau_{ei}^T} \qquad (2.6)$$

Так как декремент затухания квазилинейной теории мал по сравнению с частотой волны, то амплитуду поля волны будем считать независящей от времени. При этом условии из (2.5) и (2.6), внося обозначение $\Delta T(t) = T_e(t) - T_i(t)$ для релаксации электрон-ионных температур, получим

$$\Delta T(t) = \Delta T(t=0)\exp\left(-\frac{t}{\tau_{ei}^T}\right) + \frac{(e\Phi)^2 k_z^2 \nu_e \tau_{ei}^T}{3m_e\omega^2}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{ei}^T}\right)\right) \qquad (2.7)$$

Легко видеть, что вклад из-за взаимодействия волны с частицами в (2.7) препятствует релаксации температур. Это обусловлено тем, что волна активно взаимодействует с электронами плазмы, тогда как передача энергии волной ионам затрудняется из-за большой массы последних.

При наличии постоянного источника, возбуждающего высокочастотные волны, плазма релаксирует к стационарному состоянию, в котором происходит нагрев электронов. В стационарном состоянии имеем

$$T_e - T_i = \frac{(e\Phi)^2 k_z^2 \tau_{ei}^T}{3m_e\omega^2} \qquad (2.8)$$

Выражение (2.8) совпадает с соответствующим выражением работы [10], полученным для незамагниченной плазмы. Это объясняется тем, что магнитное поле вдоль своего направления влияния не оказывает.

б. В случае горячей плазмы, когда удовлетворяется условие

$$k_z v_i \ll \omega \ll k_z v_{ez} \qquad (2.9)$$

(индекс i приписан к величинам, относящимся к ионам плазмы), в плазме могут распространяться низкочастотные волны, удовлетворяющие условию (2.4). Для них имеем

$$\frac{3}{2}\frac{dT_e}{dt} = \pi^{1/2}\frac{k_z^2(e\Phi)^2\omega^2}{m_e k_z^3 v_{ez}^3} - \frac{3}{2}\frac{T_e - T_i}{\tau_{ei}^T}$$

$$\frac{3}{2}\frac{dT_i}{dt} = \frac{k_z^2(e\Phi)^2\nu_i}{2m_i\omega^2} - \frac{3}{2}\frac{T_i - T_e}{\tau_{ei}^T} \qquad (2.10)$$

Уравнения (2.10) для релаксации электрон-ионных температур дают

$$\Delta T(t) = \Delta T(t=0)\exp\left(-\frac{t}{\tau_{ei}^T}\right) +$$

$$+\frac{2}{3}\left(\pi^{1/2}\frac{\omega^2}{m_e k_z^3 v_{ez}^3} + \frac{\nu_i}{2m_i\omega^2}\right) k_z^2 (e\Phi)^2 \tau_{ei}^T\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau_{ei}^T}\right)\right) \qquad (2.11)$$

Таким образом, для волн, удовлетворяющих условию (2.9), плазма релаксирует к стационарному состоянию с эффективной электронной температурой

$$T_e = T_i + \frac{2}{3}\left(\frac{\pi^{1/2}\omega^2}{m_e k_z^3 v_{ez}^3} + \frac{\nu_i}{2m_i\omega^2}\right) k_z^2 (e\Phi)^2 \tau_{ei}^T \qquad (2.12)$$

В случае неизотропного распределения температур, когда $T_{az} \neq T_{a\perp}$, $T_e = T_i = T$, для высокочастотных волн, удовлетворяющих (2.3), (2.4), предполагая $|T_\perp - T_z| \ll T$, получим

$$T_z - T_\perp = \frac{(e\Phi)^2 k_z^2 \nu_e \tau}{m_e \omega^2}, \qquad \tau = \frac{4}{5}\left(\frac{m_e T^3}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{e^4 L} \qquad (2.13)$$

Отсюда следует, что происходит нагрев z-ой составляющей температуры. Рост $T_\perp$ обусловлен малым параметром (2.4) и им пренебрегаем.

Существенно, что учет влияния столкновений, дающих вклад в быстропеременную часть функции распределения электронов, значительно проявляется только для высокочастотного случая.

В заключение благодарю Ю. Л. Климонтовича за предложенную тему, Л. М. Горбунова, В. В. Логвинова и Р. Р. Рамазашвили — за замечания и интерес к работе.

Поступила 21 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Климонтович Ю. Л. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. М., Изд-во МГУ, 1964.
2. Klimontovich Y. L. The statistical theory of non-equilibrium processes in a plasma. Internat. Ser. Monogr. Natural Philos. Pergamon Press, Oxford — London — New York — Sydney — Paris — Braunschweig, 1967.
3. Силин В. П. О высокочастотной диэлектрической проницаемости плазмы. ЖЭТФ, 1963, т. 41, вып. 3 (9).
4. Логвинов В. В. О релаксации в кулоновской квазиравновесной плазме. Вестн. МГУ, Физика, Астрономия, 1967, № 1.
5. Веденов А. А., Велихов Е. П. Квазилинейное приближение в кинетике разряженной плазмы. ЖЭТФ, 1962, т. 43. вып. 3 (9).
6. Веденов А. А. Квазилинейная теория плазмы. Атомн. энергия, 1962, т. 13, № 1, стр. 5—24.
7. Ландау Л. Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия. ЖЭТФ, 1937, т. 7, вып. 2.
8. Коган В. Н. О скорости выравнивания температур заряженных частиц в плазме. В сб.: «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». М., Изд-во АН СССР, 1958, т. I.
9. Рамазашвили Р. Р., Рухадзе, А. А., Силин В. П. О скорости выравнивания температуры заряженных частиц в плазме. ЖЭТФ, 1962, т. 43, вып. 4 (10)
10. Климонтович Ю. Л., Логвинов В. В. Стационарные решения уравнений квазилинейного приближения в плазме со столкновениями. ПМТФ, 1967, т. 2, стр. 35.