ведливо как для быстрых колебаний (период колебаний меньше скинового времени), так и для медленных [7,8]. Решения, когда магнитное давление мало по сравнению с газокинетическим (электрическая дуга), возможны при $q_J \ll 1$ (фиг. 1.1, 2.1). Решения, соответствующие самосжатому разряду как оторванному от стенок (фиг. 2.4), так и разряду, часть давления плазмы в котором удерживается стенками (фиг. 1.3 и фиг. 2.3), осуществляются для данных значений температуры и плотности на оси разряда лишь при определенных величинах электрического поля. В остальных случаях решение имеет колебательный характер (на фиг. 1.2 и фиг. 2.2), однако плазменный столб с таким распределением температуры и давления неустойчив.

Найденные решения лишь иллюстрируют различные типы равновесных распределений температуры и давления для разрядов с большой плотностью. Для корректности решения задачи равновесия в разряде необходимо было бы учитывать зависимость коэффициента теплопроводности от магнитного поля [3] и перенос энергии диссоциации и ионизации [4]. Однако первое ограничение несущественно, так как качественно характер решения не зависит от вида $\varkappa\,(T,\ H)$, а второе имеет значение только в области, где температура меньше температуры ионизации.

Поступила 25 II 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. П и з Р. С. Равновесные характеристики сжатого газового разряда, охлаждаемого тормозным излучением. В кн. «Управляемые термоядерные реакции», М., Атомиздат, 1960.
2. A l f v e n H., S m a r s E. Gas insulation of a hot plasma. Nature, 1960, vol. 188, No. 4753.
3. А л и х а н о в С. Г., И в а н и я С. П. Распределение температуры и плотности в высокотемпературной стационарной дуге. Ж. техн. физ., 1960, т. 35, вып. 3.
4. V e r b o o m G. K. The energy balance of an arc discharge in hydrogen gas. Plasma physics, 1969, vol. 11, No. 11.
5. К а п л а н С. А., П и к е л ь н е р С. Б. Межзвездная среда. М., Физматгиз, 1963.
6. A l i k h a n o v S. G., K o n k a s h b a e v I. K., C h e b o t a e v P. Z. The energy balance in a dense fusion plasma contained by walls. Nuclear fusion, 1970, vol. 10, No. 1.
7. К а д о м ц е в Б. Б. Гидромагнитная устойчивость плазмы. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 2, М., Атомиздат, 1963.
8. К о н к а ш б а е в И. К. Об одном виде токовой неустойчивости плазмы конечной проводимости. ПМТФ, 1970, № 2.

УДК 533.7

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА В КНУДСЕНОВСКОМ СЛОЕ

М. М. Кузнецов

(Москва)

Известно, что определение точных граничных условий для уравнений гидродинамики связано с решением кинетического уравнения Больцмана в кнудсеновском слое [1–4].

В этом слое функцию распределения можно искать в виде суперпозиции энскоговой функции и функции, удовлетворяющей линеаризованному уравнению Больцмана [4].

Покажем это, используя метод сращиваемых асимптотических разложений [5].

Рассмотрим течение в пограничном слое [6]. Безразмерное уравнение Больцмана имеет следующий вид:

$$\sqrt{K}\, c_y \frac{\partial f}{\partial y} + K c_x \frac{\partial f}{\partial x} = J\,(f, f) \tag{1}$$

Здесь $K = l/L$ — число Кнудсена, $K \ll 1$, l — длина свободного пробега, L — характерный размер тела, **c** — скорость молекулы

$$J(f, f) = \int (f'f_1' - ff_1)\, gb\, db\, d\varepsilon\, d\mathbf{c}_1$$

В кнудсеновском слое введем преобразование нормальной координаты y

$$y_1 = y/\sqrt{K} \tag{2}$$

Тогда получим

$$c_y \frac{\partial f}{\partial y_1} + Kc_x \frac{\partial f}{\partial x} = J(f, f) \tag{3}$$

Предположим, что при $y_1 = 0$ функция f удовлетворяет диффузному закону отражения молекул от стенки

$$fH(c_y) = (n_w/\pi^{3/2}) e^{-c^2} \tag{4}$$

Здесь $H(c_y)$ — функция Хэвисайда

$$H(c_y) = 1, \quad c_y > 0; \quad H(c_y) = 0, \quad c_y < 0$$

Решение в обеих областях ищем в виде рядов по $\sqrt{K}$. Внешнее разложение

$$F(x, y, \mathbf{c}) = F^{(0)} + \sqrt{K} F^{(1)} + \ldots \tag{5}$$

Внутреннее разложение

$$f(x, y_1, \mathbf{c}) = f^{(0)} + \sqrt{K} f^{(1)} + \ldots \tag{6}$$

Найдем условия сращивания для разложений (5) и (6)

$$f^{(0)}(y_1 \to \infty) = F^{(0)}(x, 0, \mathbf{c}) \tag{7}$$

$$f^{(1)}(y_1 \to \infty) = F^{(1)}(x, 0, \mathbf{c}) + y_1 (\partial F^{(0)}/\partial y) \tag{8}$$

Для функции $f^{(0)}$ получим уравнение

$$c_y (\partial f^{(0)}/\partial y_1) = J(f^{(0)}, f^{(0)}) \tag{9}$$

Это уравнение с граничными условиями (4) и (7) имеет единственное решение [7]

$$f^{(0)} = F^{(0)}(x, 0, \mathbf{c}) = (n_w/\pi^{3/2})\, e^{-c^2} \tag{10}$$

В следующем приближении для функции $f^{(1)}$ имеем

$$c_y (\partial f^{(1)}/\partial y_1) = J(f^{(0)}, f^{(1)}) + J(f^{(1)}, f^{(0)}) \tag{11}$$

Введем суперпозицию

$$f^{(1)} = F^{(1)}(x, 0, \mathbf{c}) + y_1 (\partial F^{(0)}/\partial y) + f^{(0)} \varphi(x, y_1, \mathbf{c}) \tag{12}$$

Тогда получим

$$c_y (\partial \varphi/\partial y_1) = \int f_1^{(0)} (\varphi' + \varphi_1' - \varphi - \varphi_1)\, gb\, db\, d\varepsilon\, d\mathbf{c}_1 \tag{13}$$

$$\varphi(y_1 \to \infty) = 0, \qquad f^{(0)} \varphi(x, 0, \mathbf{c})\, H(c_y) = -F^{(1)}(x, 0, \mathbf{c}) \tag{14}$$

Из уравнения второго приближения для внешнего потока получим, что

$$F^{(1)}(x, 0, \mathbf{c}) = f^{(0)} (\varphi_э(0) + n^{(1)}(0) + \mathbf{cu}^{(1)}(0)\, T^{(1)}(c^2 - 3/2)) \tag{15}$$

Здесь $\varphi_э$ — функция Энскога [8].

Линеаризованное уравнение Больцмана (13) с граничными условиями (14) имеет единственное решение [9]. Численный результат получен в [10].

Рассмотрим приближенный метод разложения функции (для течения со скольжением) по полупространственным полиномам от скоростей [11–14]

$$\varphi = \varphi^+ \left(\frac{1 + \operatorname{sign} c_y}{2} \right) + \varphi^- \left(\frac{1 - \operatorname{sign} c_y}{2} \right), \ \varphi^\pm = a_0^\pm (y_1)\, c_x + a_1^\pm (y_1)\, c_x c_y \tag{16}$$

После интегрирования уравнения (13) по скоростям получим систему уравнений с постоянными коэффициентами [14]

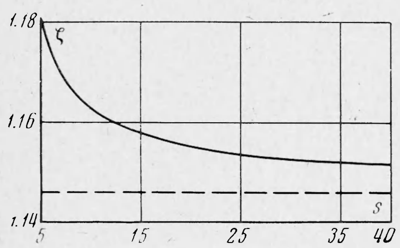
$$\pm \frac{da_0^\pm}{dy_1} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{da_1^\pm}{dy_1} = \pm (a_0^+ - a_0^-) \frac{I_1}{\pi} \pm (a_1^+ + a_1^-) \frac{I_2}{\pi} \tag{17}$$

$$\frac{da_0^\pm}{dy_1} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \pm \frac{da_1^\pm}{dy_1} = (a_0^+ - a_0^-) \frac{I_2}{\pi} + (a_1^+ + a_1^-) \frac{I_3}{\pi} \pm (a_1^+ - a_1^-) \frac{I_4}{\pi}$$

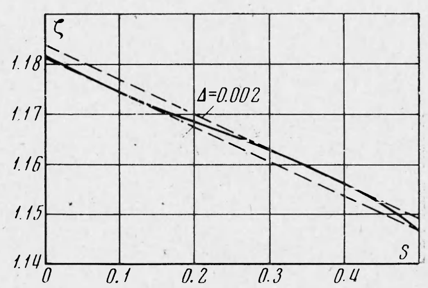
Решение системы (17), удовлетворяющее условиям (14), имеет вид

$$a_0^\pm = b_0^\pm e^{-\alpha y_1}, \qquad a_1^\pm = b_1^\pm e^{-\alpha y_1} \tag{18}$$

Постоянные $b_0^\pm$, $b_1^\pm$ определяются из граничных условий, $\alpha > 0$ находится из системы (17).



Фиг. 1



Фиг. 2

На внешней границе кнудсеновского слоя ($y_1 \to \infty$) решение непрерывно.

Это является следствием соотношения (12).

Таким образом, использование метода полупространственных моментных разложений здесь будет корректным (см. [11–13]).

Значения величин I_1 — I_4 для молекул в виде твердых сфер получены аналитически в работе [4].

Предложенный способ вычислений можно распространить на более широкий класс потенциалов.

В частности, для степенного закона взаимодействия

$$P = \varkappa / r^s \tag{19}$$

можно показать, что

$$I_j = I_j(S), \quad S = \frac{s - 5}{2(s - 1)}$$

Например

$$I_2(S) = [c_x \operatorname{sign} c_y,\ c_x c_y] = -\frac{J_2(S)}{4\sqrt{2}\,\Gamma(1 - S)} \frac{\pi}{\lambda} \tag{20}$$

$$\lambda = \frac{2\mu}{\rho V} = \frac{(kT/\varkappa)^{2/(s-1)}}{2^{S+1} n \pi A_2(s)}, \quad A_2(s) = \int_0^\infty (1 - \cos^2 \chi)\, \rho d\rho$$

Здесь Γ — гамма-функция

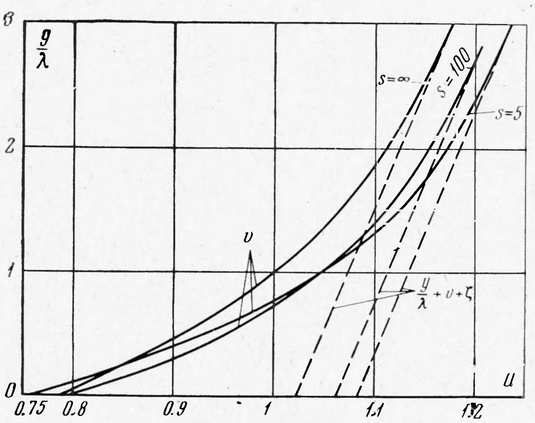
$$J_2(S) = \int_0^1 \frac{3/2 + (2 - t)(6 + 3S)}{t^S (2 - t)^{3/2}} (1 - t)^{S + 3/2}\, dt$$

Значения I_1, I_2, I_3, I_4 определялись численным интегрированием (для s = 5—100). Вид зависимости коэффициента скольжения $\zeta(s)$

$$u^{(1)} = \zeta(s)\lambda \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} \quad (21)$$

показан на фиг. 1. Расчет проведен с точностью до 0.2%.

На фиг. 2 показана зависимость $\zeta(s)$. Видно, что в пределах точности вычислений зависимость $\zeta(S)$ близка к линейной. Значения $\zeta(S)$ для $S=0$ и $S=0.5$ близки к полученным ранее результатам [11,13,14].



Фиг. 3

На фиг. 3 показан профиль скорости в кнудсеновском слое

$$U = y/\lambda + v(s)e^{-\alpha y} + \zeta(s), \quad u = U\lambda(\partial u/\partial y), \quad s = 5,\ 100,\ \infty$$

Для установления сходимости метода целесообразно рассмотреть несколько более высоких приближений для $\varphi^{\pm}$.

Значения $I_1(S) - I_4(S)$ могут быть использованы в других линейных задачах (например, течение Куэтта, Пуазейля).

Поступила 21 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Жигулев В. Н., Кузнецов В. М. Некоторые проблемы физической аэродинамики. Тр. ЦАГИ, 1969, вып. 1136, стр. 3—23.
2. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967, стр. 315—344.
3. Darrozes J. S. Approximate solutions of the Boltzman equation for flow past bodies of moderate curvature. Rarefied gas dynamics, vol. 1, New York — London, Acad. Press., 1969, pp. 111—120.
4. Дерягин Б. В., Ивченко И. Н., Яламов Ю. И. О построении решений кинетического уравнения Больцмана в слое Кнудсена. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4, стр. 167—172.
5. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967, стр. 108—133.
6. Жигулев В. Н. Об уравнениях движения неравновесной среды с учетом излучения. Инж. ж., 1964, т. 4, вып. 3, стр. 431—438.
7. Guiraud J. P. Kinetic theory and rarefied gas dynamics. Rarefied gas dynamics, vol. 1, New York — London, Acad. Press., 1967, pp. 289—314.
8. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
9. Darrozes J. S., Guiraud J. P. Theorie cinetique des gas. C. r. Acad. Sci., Ser. A, 1966, vol. 262, No. 24.
10. Горелов С. Л., Коган М. Н. Решение линейных задач динамики разреженного газа методом Монте-Карло. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6, стр. 136—139.

11. Б а к а н о в С. П., Д е р я г и н Б. В. К вопросу о состоянии газа, движущегося вблизи твердой поверхности. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 1, стр. 71.
12. Ц и р и н г С. Течение газа вблизи твердой поверхности. Ракетная техника и космонавтика, 1963, № 3, стр. 148—153.
13. И в ч е н к о И. Н., Я л а м о в Ю. И. Кинетическая теория течения газа, находящегося над твердой стенкой в поле градиента скорости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6, стр. 139—143.
14. G r o s s E. P., Z i e r i n g S. Kinetic theory of linear shear flow. Phys. Fluids, 1958, vol. 1, No. 63, p. 215.

УДК 532.54

К ВОПРОСУ О ТЕЧЕНИИ И ГИДРАВЛИЧЕСКОМ СОПРОТИВЛЕНИИ ЖИДКОСТЕЙ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

А. В. Купавцев

(Москва)

В химической, нефтеперерабатывающей и пищевой промышленностях, в медицине широко используются жидкости со структурной вязкостью, характеризуемые реологической кривой, представленной на фиг. 1. В работе [1] предлагается методика описания реологических свойств таких сред и показывается целесообразность выделения класса этих жидкостей с линейным законом текучести в области напряжений, близких к τ_1.

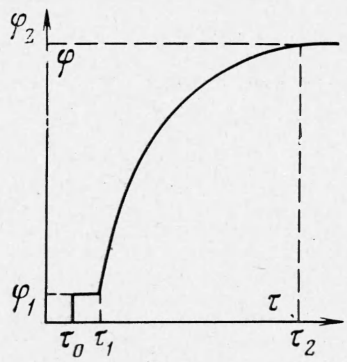
На практике также имеют место течения рассматриваемых жидкостей в области напряжений, приближающихся к τ_2, когда наблюдается постепенный переход к режиму движения среды с наибольшей практически постоянной текучестью φ_2. Так, следует ожидать подобный характер течения крови в кровеносной системе человека и животных при понижении давления и других патологических состояниях [2].

1. Обозначим через τ_2 значение напряжения сдвига такое, что при $\tau > \tau_2$ движение среды можно считать происходящим с постоянной текучестью φ_2. Аппроксимируем участок реологической кривой, примыкающий к τ_2 логарифмической функцией, являющейся обратной экспоненциальной зависимости, предложенной в [1]

$$\varphi_* = 0, \qquad \tau \geqslant \tau_2, \qquad \varphi_* = \ln \tau_*, \qquad \tau \leqslant \tau_2 \tag{1.1}$$

где τ_* и φ_* — безразмерные комплексы

$$\tau_* = \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}, \qquad \varphi_* = \frac{1}{\theta} \frac{\varphi - \varphi_2}{\tau_2 - \tau_1}$$



Фиг. 1

(θ — мера структурной устойчивости жидкости) составлены так, чтобы удовлетворить соотношению (1.1) при $\tau = \tau_2$. Поведение этих величин при $\tau \to \tau_1$ может не рассматриваться, так как предлагаемая здесь точка зрения относится к области τ_*, близких к единице.

Для структурированных жидкостей с линейным законом текучести в области τ, близких к τ_2, получаем простое реологическое уравнение $\varphi = \varphi_2 - \theta (\tau_2 - \tau)$, в которое вошли величины, характеризующие рассматриваемый верхний участок кривой течения.

2. Рассмотрим ламинарное изотермическое течение исследуемой жидкости со структурной вязкостью в цилиндрическом круговом канале радиуса R с жесткими стенками. Такой случай течения может наблюдаться, например, при движении крови в сосудах с неизменяющимся просветом (склерозированные сосуды).