

7. Andrews G. E., Herath P., Phylaktor H. N. The influence of flow blockage on the rate of pressure rise in large L/D cylindrical closed vessel explosions // *Ibid.* — N 3. — P. 291—302.
8. Phylaktor H. N., Andrews G. E. The acceleration of flame propagation in a tube an obstacle // *Combust. Flame.* — 1991. — 85, N 3/4. — P. 363—379.
9. Абинов А. Г., Плотников В. М., Шебеко Ю. Н. и др. Исследование формирования ударных волн при распространении пламени по газозвоздушной смеси в трубах // *ФГВ.* — 1987. — 23, № 1. — С. 41—46.
10. Tennankore K. N., Locfortune J. F. Flame propagation in a closed tube // *Heat transfer, 1986: Proc. 8th Int. Conf. in San Francisco, 17—22 Aug. 1986.* — Washington, 1986. — P. 843—848.
11. Al-Khishali K. J., Bladley D., Hall S. F. Turbulent combustion of near-limit hydrogen-air mixtures // *Combust. Flame.* — 1983. — 54, N 1—3. — P. 61—70.

143900, г. Балашиха, 6,
ВНИИПО

Поступила в редакцию 10/VIII 1992,
после доработки — 15/II 1993

УДК 536.46:532.59

С. С. Минаев, Е. А. Пирогов, О. В. Шарыпов

СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛАМЕНИ ПРИ РАЗВИТИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

В работе на основе теоретического анализа и численных расчетов показано, что динамику поверхности пламени в условиях гидродинамической неустойчивости можно представить как взаимодействие конечного набора нелинейных конфигураций фронта пламени. Их число определяется физическими размерами системы, в которой распространяется пламя. Показано, что эволюция изначально плоского фронта приводит к стационарному режиму, при котором скорость распространения искривленного пламени асимптотически стремится к своему предельному значению, не зависящему от размера системы, в которой происходит горение. Этот вывод получен на основе точного решения нелинейного уравнения, моделирующего гидродинамическую неустойчивость пламени.

Известно, что одним из способов описания гидродинамической неустойчивости пламени является представление его поверхностью, распространяющейся вдоль своей нормали со скоростью S и разделяющей два газа с разной плотностью: свежую смесь и продукты горения. Скорость распространения вдоль нормали зависит от кривизны в данной точке поверхности. Эту зависимость, которая получается при грубом учете тепловой структуры фронта пламени, можно записать в виде [1]

$$S = S_0 (1 + \sigma \partial^2 f / \partial x^2).$$

Здесь σ — константа Маркштейна, пропорциональная тепловой толщине пламени, $z = f(x, t)$ — уравнение поверхности пламени. В дальнейшем будем считать $\sigma > 0$, что соответствует устойчивости фронта пламени с точки зрения теории диффузионно-тепловой устойчивости [2].

Несмотря на эти упрощающие предположения о структуре фронта пламени задача остается сложной, поскольку искривления поверхности вызывают изменения скорости и давления в свежей смеси и продуктах горения. В случае малого коэффициента расширения газа $E - 1 = \epsilon \ll 1$, где $E = \rho_1 / \rho_2$ — отношение плотности свежего газа к плотности продуктов горения, задача существенно упрощается. В слабо нелинейном приближении ($\partial f / \partial x \ll 1$) вместо решения полной системы уравнений достаточно рассмотреть одно уравнение, описывающее эволюцию возмущений поверхности пламени [3, 4]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + S_0 \frac{\epsilon}{2} \{Kf\} - \sigma S_0 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{S_0}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 = 0, \quad (1)$$

$$\{Kf\} = \frac{1}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{z^2 + (x - \eta)^2} f(\eta) d\eta.$$

Интегральный член $\{Kf\}$ может быть записан также и в виде оператора Гильберта с интегралом в смысле главного значения [5]:

$$\{Kf\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \frac{1}{(x-\eta)} d\eta.$$

Уравнение (1) записано в системе координат плоского пламени, распространяющегося вдоль оси z со скоростью S_0 , и некоторые его члены могут быть получены из простых геометрических соображений. Поверхность, каждый элементарный участок которой движется вдоль своей нормали со скоростью S_0 , описывается уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} - S_0 - V_z + V_x \frac{\partial f}{\partial x} = S_0 \left(1 + \sigma \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2}. \quad (2)$$

Здесь V_x, V_z — возмущения компонент скорости свежего газа, вызванные искривлениями плоского фронта пламени. Как показано в [4], возмущения скорости V_z в первом приближении связаны с отклонениями поверхности пламени от плоскости следующим образом:

$$V_z = -\{Kf\} S_0 \epsilon / 2.$$

Учитывая этот факт и оставляя в (2) члены не выше второго порядка малости по параметру $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \ll 1$, легко получить уравнение (1).

Численные расчеты [1] показали, что поверхность пламени обычно имеет вид ячеек, находящихся в постоянном взаимодействии: крупные ячейки делятся, мелкие поглощаются более крупными и т. д. В то же время упомянутые расчеты не дают ответа на вопрос о зависимости скорости распространения искривленного пламени и амплитуды ячеек от времени, что связано с трудностями численного моделирования развития поверхности пламени на продолжительном интервале времени. Ответ на этот вопрос, по-видимому, получен в данной работе. В дальнейшем под скоростью распространения искривленного пламени будем понимать величину $c(t)$ (аналог турбулентной скорости), определяемую следующим образом:

$$f(x, t) = c(t)t + p(x, t), \quad p(x, t) < \text{const},$$

c задает скорость движения плоской поверхности, отклонения от которой описываются функцией $p(x, t)$. В случае неограниченного пространства такое представление требует дополнительного обоснования ограниченности p . Если размер физической системы по поперечным координатам (x и y) ограничен, то, как показано ниже, такое представление справедливо. Более того, в широком диапазоне размеров физической системы зависимость $c(t)$ при $t \rightarrow \infty$ асимптотически стремится к постоянному значению. Интересно, что предельное значение скорости распространения определяется максимальным значением скорости роста возмущений и может быть рассчитана по линейной теории.

Опишем метод, позволяющий построить точные решения уравнения (1), имеющее в безразмерных переменных вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\epsilon}{2} \{Kf\} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 = 0. \quad (3)$$

За единицу времени принята величина σ/S_0 , а длины — σ . Рассмотрим свойства оператора $\{Kf\}$. Прежде всего заметим, что функция $\Phi(x, z)$ является решением уравнения Лапласа в полупространстве $z > 0$ с граничным условием $\Phi(x, 0) = f(x)$:

$$\Phi(x, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{z^2 + (x-\eta)^2} f(\eta) d\eta.$$

Поэтому для вычисления $\{Kf\}$ необходимо найти функцию $\Phi(x, z)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа с граничным условием $\Phi(x, 0) = f(x)$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial z} \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, а затем — искомый интеграл из условия

$$\{Kf\} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Точные решения (3) ищем в виде

$$f(x, t) = 2 \ln (FF^+),$$

$$F = \alpha_0 + \alpha_1 \exp(i\kappa x) + \dots + \alpha_N \exp(iN\kappa x), \quad (4)$$

где коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$ зависят от времени и для простоты выбраны действительными, а функция F^+ является комплексно сопряженной относительно F . Решения можно записать в форме

$$f(x, t) = 2 \ln \left\{ c_0(t) + \sum_{n=1}^N 2c_n(t) \cos(n\kappa x) \right\},$$

именуемой здесь набором нелинейных конфигураций фронта пламени. Тогда коэффициенты c_n при $\cos(n\kappa x)$ будут связаны с α_l алгебраическими соотношениями

$$c_n = \sum_{l=0}^{N-n} \alpha_l \alpha_{n+l}.$$

Поскольку функция

$$\Phi(x, z) = 4 \operatorname{Ln} \left\{ \sum_{n=0}^N \alpha_n \exp[in\kappa(x + iz)] \right\}$$

аналитическая и на границе $z = 0$ ее реальная часть совпадает с (4), то, используя свойства аналитических функций, легко вычислить

$$\{Kf\} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial \operatorname{Re} \Phi(x, z)}{\partial z} = - \frac{\partial \operatorname{Im} \Phi(x, 0)}{\partial x} = -2 \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arctg} \left(\frac{F - F^+}{F + F^+} \right).$$

Отсюда $\{Kf\} = \frac{-i}{FF^+} \left(\frac{\partial F}{\partial x} F^+ - F \frac{\partial F^+}{\partial x} \right)$, и (3) после подстановки в него решения (4) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (FF^+) - \frac{i\kappa}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} F^+ - F \frac{\partial F^+}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 (FF^+)}{\partial x^2} = 0.$$

Подставляя в последнее уравнение решение, имеющее вид конечного ряда (4) из $N + 1$ слагаемого и приравнявая к нулю выражения при $\cos(n\kappa x)$, получим систему из $N + 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений для α_l ; n -е уравнение имеет вид

$$\sum_{l=0}^{N-n} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_l \alpha_{n+l}) - \omega_{n+l, l} \alpha_l \alpha_{n+l} \right] = 0, \quad (5)$$

где $\omega_{n+l, l} = (2l + n) \varepsilon \kappa / 2 - n^2 \kappa^2$.

Последнее уравнение ($n = N$) в системе (5) имеет простую форму

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_0 \alpha_N) - \omega_{N, 0} \alpha_0 \alpha_N = 0, \quad \omega_{N, 0} = \frac{\varepsilon N \kappa}{2} - (N \kappa)^2.$$

Решение этого уравнения очевидно: $\alpha_0 \alpha_N = \exp(\omega_{N, 0} t)$. При $N \kappa > \varepsilon / 2$ получаем $\omega_{N, 0} < 0$, т. е. величина $\alpha_0 \alpha_N$ экспоненциально уменьшается со временем.

Поскольку $2\alpha_0 \alpha_N$ есть коэффициент при высшей гармонике в разложении (4), то очевидно, что число уравнений, описывающих асимптотическое поведение поверхности пламени при $t \rightarrow \infty$, будет конечным (в отличие от подхода [6]) и определяется из условия

$$N = \frac{\varepsilon}{2\kappa}. \quad (6)$$

Решение задачи об эволюции фронта пламени, распространяющегося в системе размером L , можно найти следующим образом. Пусть $f_0(x)$ задает слабо возмущенную плоскую поверхность пламени при $t = 0$. Тогда, разлагая в ряд Фурье функцию $\exp [f_0(x)/2]$, можно вычислить начальные значения коэффициентов α_l в (5). Далее, при заданных периодических граничных условиях решается эволюционная задача, причем количество слагаемых в представлении (4) ограничено выражением (6), поскольку коэффициенты при высших гармониках (α_l , $l > N$) экспоненциально затухают со временем. Величина κ (волновое число низшей гармоники) определяется размером физической системы, где происходит горение, $\kappa = 2\pi/L$. Таким образом, описание эволюции фронта пламени можно свести к задаче о взаимодействии конечного числа членов нелинейного функционального ряда, коэффициенты при которых зависят от времени, согласно (5).

Опишем теперь некоторые свойства уравнений (5). Эта система имеет частные решения

$$\alpha_0 \sim \alpha_1 \sim \dots \sim \alpha_l \sim \alpha_N \sim \exp \left(\frac{1}{2} \omega_{N,0} t \right).$$

Последние описывают стационарные рельефы поверхности пламени, распространяющиеся с постоянной скоростью $c = 2\omega_{N,0}$ (в сопровождающей системе координат). Максимальному значению инкремента $\omega_{N,0}$ соответствует наибольшая скорость $c_* = \epsilon^2/8$.

Для $N = 1$ нетрудно убедиться, что при любых начальных величинах коэффициентов из области $|\alpha_0| > |\alpha_1|$ (данное неравенство не накладывает ограничений на вид $f_0(x)$) поверхность пламени стремится к своему стационарному состоянию, описываемому частными решениями, приведенными выше.

Так, если $N = 1$, то система (5) после подстановки в нее решений вида

$$\alpha_0 = \beta_0(t) \exp \left(\frac{\omega_{1,0} t}{2} \right), \quad \alpha_1 = \beta_1(t) \exp \left(\frac{\omega_{1,1} t}{2} \right)$$

приобретает форму

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\beta_0^2 + \beta_1^2) &= -\omega_{1,0} \beta_0^2 + (\omega_{1,1} - \omega_{1,0}) \beta_1^2, \\ \beta_0 \beta_1 &= \text{const}, \quad (\omega_{1,0} = \frac{\epsilon \kappa}{2} - \kappa^2, \quad \omega_{1,1} = \epsilon \kappa). \end{aligned} \quad (7)$$

Систему (7) можно легко проинтегрировать, но доказательство устойчивости стационарного состояния $\{\omega_{1,0} \beta_0^2 = (\omega_{1,1} - \omega_{1,0}) \beta_1^2, \beta_0 \beta_1 = \text{const}\}$ еще легче получить геометрически. Последнее уравнение в плоскости переменных (β_0, β_1) задает гиперболу. Стационарные значения β_0, β_1 можно найти, вычислив точку пересечения этой гиперболы с прямой, описываемой первым уравнением. Если начальные значения β_0, β_1 расположены ниже (выше) этой прямой, что соответствует отрицательному (положительному) значению правой части первого уравнения в (7), то в процессе эволюции расстояние от начала координат до гиперболы уменьшается (увеличивается) до тех пор, пока значения β_0, β_1 не достигнут своих стационарных величин.

Следует отметить, что при $N = 1$ или 2 существуют два устойчивых стационарных решения $\bar{f}(x)$, отличающихся сдвигом фазы на π и реализующихся при различных начальных данных.

Не останавливаясь на анализе устойчивости стационарных состояний для случаев с произвольным числом гармоник, приведем зависимости коэффициентов при членах ряда и скорости распространения пламени от времени, полученные из численного решения системы (5) для случая $N = 15$, $\epsilon = 2$. На рис. 1 приведены зависимости коэффициентов $b_l(t)$ ($l = 1, \dots, N$) для точного решения $f(x, t)$, представленного в форме:

$$f(x, t) = c(t)t + 2 \ln \{1 + b_1 \cos(\kappa x) + \dots + b_N \cos(N\kappa x)\}.$$

Согласно линейной теории, при $\epsilon = 2$ и $\kappa = 0,07$ наиболее быстро растущей гармонике соответствует номер $n_* = 7$. Из рис. 1 видно, что в про-

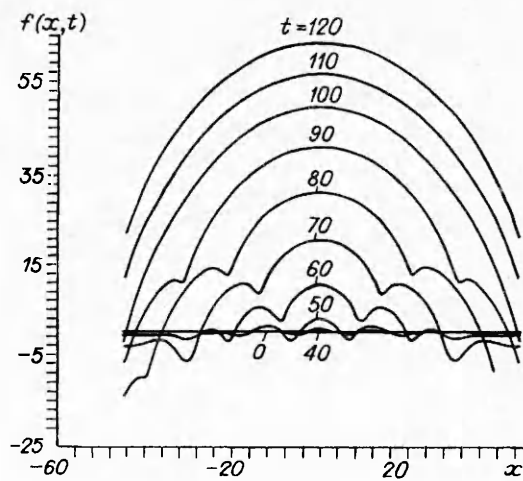
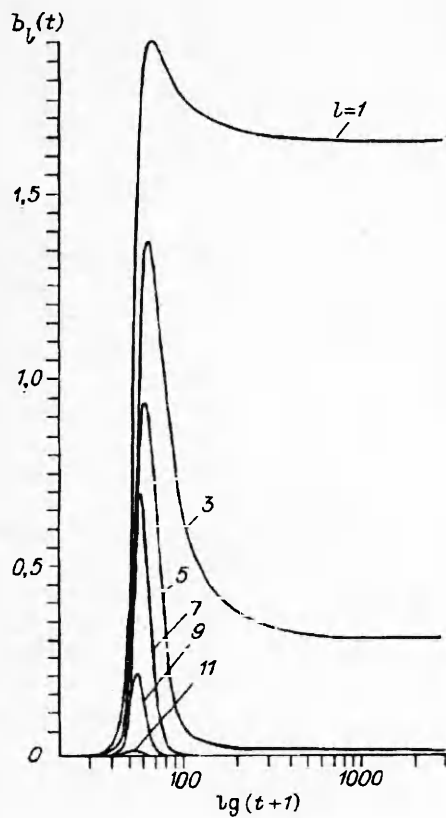


Рис. 2. Решение $f(x, t)$ (начальные условия аналогичны рис. 1).

Рис. 1. Зависимость $b_l(t)$ для случая слабозмущенного тривиального начального условия: $\alpha_0 = 1, \alpha_l = 10^{-6} (l = 1, \dots, 15)$.

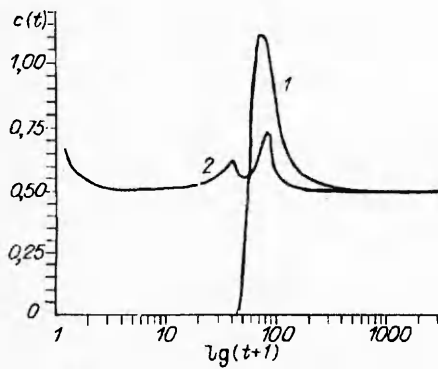


Рис. 3. Зависимость $c(t)$ в случае начальных данных ($\alpha_0 = 1$): 1 — $\alpha_l = 10^{-6} (l = 1, \dots, 15)$; 2 — $\alpha_6 = 0,2, \alpha_7 = 0,7, \alpha_l = 10^{-6} (l = 1, \dots, 5, 8, \dots, 15)$.

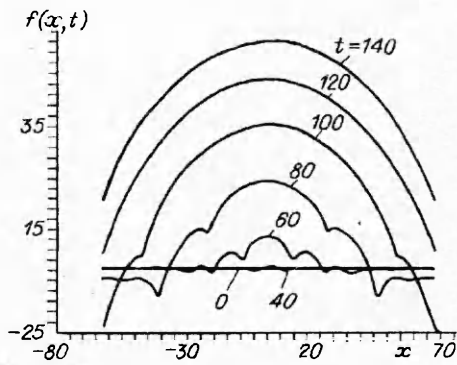


Рис. 4. Решение $f(x, t)$, начальные данные: $\alpha_0 = 1, \alpha_l = 10^{-6} (l = 1, \dots, 20)$.

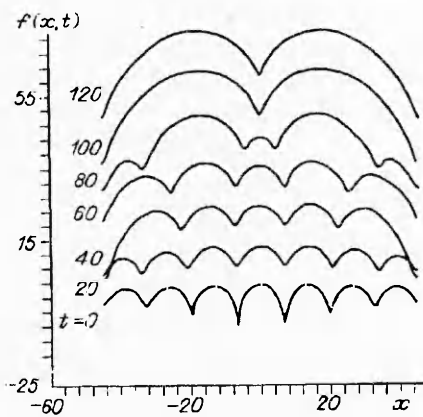


Рис. 5. Решение $f(x, t)$, начальные данные: $\alpha_0 = 1, \alpha_6 = 0,2, \alpha_7 = 0,7, \alpha_l = 10^{-6} (l = 1, \dots, 5, 8, \dots, 15)$.

цессе эволюции коэффициенты при высших членах ряда стремятся к нулю ($b_l(t)|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0, l > n_*$), а остальные коэффициенты стремятся к ненулевым стационарным значениям ($b_l(t)|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow b_l, l \leq n_*$). Можно сделать вывод о том, что для построения установившегося решения $\bar{f}(x)$ достаточно учитывать лишь $(1 + n_*)$ низших членов в представлении (4).

Динамика развития поверхности пламени показана на рис. 2. Видно, что стационарная форма пламени представляет собой одну ячейку (cusp-like configuration), полученную ранее в численных расчетах [7].

Из выполненных численных расчетов следует, что сценарий развития поверхности пламени представляет собой постоянное слияние мелких ячеек и образование более крупных. На начальном (линейном) этапе плоский фронт покрывается ячейками с характерной длиной волны λ_* , обеспечивающей максимальную скорость роста малых возмущений:

$$\lambda_* = \frac{2\pi}{kn_*} \approx \frac{8\pi}{\varepsilon}.$$

В процессе эволюции устанавливается стационарное состояние, имеющее вид одной ячейки, распространяющейся по свежей смеси со скоростью \bar{c} в системе координат, в которой плоский фронт покоится (рис. 3). Величина \bar{c} стремится к c_* в случае приближения к непрерывному спектру.

При увеличении размера системы L (увеличении n_*) рельеф поверхности пламени в стационарном состоянии также представляет собой единственную ячейку с максимально возможной длиной волны ($\lambda = L$), движущуюся со скоростью \bar{c} (рис. 4). Однако время установления стационарного состояния увеличивается с ростом n_* (с увеличением размера системы). Объяснением здесь, очевидно, служит то, что на линейной стадии эволюции в большей области возникает большее число неоднородностей (с длиной волны λ_*), и необходимо большее время для их слияния в одну ячейку с размером L . К аналогичному выводу ранее привели результаты непосредственного численного моделирования решения уравнения (1), полученные на основе сочетания спектрального и конечно-разностного методов.

Следует отметить, что на сферическом или цилиндрическом пламени динамика развития поверхности иная. Для сферического пламени (которое можно рассматривать как систему с постоянно изменяющимся размером) стационарное состояние, по-видимому, не достигается. Этим можно объяснить наблюдаемую в экспериментах динамическую ячеистую структуру пламени [8].

На рис. 3 показаны зависимости скорости распространения пламени $c(t)$ от времени для двух существенно различных начальных состояний поверхности пламени. В моменты времени, когда в решении доминируют гармоники с $\lambda \approx \lambda_*$, скорость распространения пламени заметно возрастает. По-видимому, из этого факта можно сделать вывод о резонансном воздействии внешних возмущений на пламя. Так, если пламя проходит через ряд решеток, то можно ожидать, что скорость распространения волны горения существенно увеличится, когда размер решеток близок к критической длине волны для этой системы. Заметим, что при больших временах (несмотря на существенное различие начальных условий) значения скоростей (см. рис. 3) асимптотически совпадают. Хотя установившиеся профили могут различаться (см. рис. 2, 5). Этим, в частности, ставится под сомнение вывод, сделанный в [6], о единственности стационарного решения уравнения (1) при произвольных начальных данных.

Авторы выражают признательность сотрудникам лаборатории физической оптики кафедры общей физики Новосибирского государственного университета за содействие при проведении численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нестационарное распространение пламени/Под ред. Дж. Г. Маркштейна. — М.: Мир, 1968. — 430 с.
2. Истратов А. Г., Либрович В. Б. О влиянии процессов переноса на устойчивость плоского фронта пламени // ПММ.— 1966.— 30, № 3.— С. 451—466.

3. Sivashinsky G. I. Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames. Pt I. Derivation of basic equations/Acta Astronautica.— 1977.— 4.— P. 1177—1206.
4. Минаев С. С. Набор стационарных решений, описывающих ячеистое пламя в случае гидродинамической неустойчивости // ФГВ.— 1992.— 28, № 1.— С. 35—39.
5. Renardy M. // Physica 28D.— 1987.— P. 155—167.
6. Thual O., Frish U., Henon M. Application of pole decomposition to an equation governing the dynamics of wrinkled flame fronts/J. Physique.— 1985.— 46.— P. 1485—1494.
7. Michelson D. M., Sivashinsky G. I. Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames, Pt II. Numerical experiments // Acta Astronautica.— 1977.— 4.— P. 1207—1221.
8. Groff E. G. The cellular nature of confined spherical propane-air flames/Combust. Flame.— 1982.— 48, № 1.— P. 51—52.

630090, г. Новосибирск,
Институт теплофизики
СО РАН

Поступила в редакцию 26/IV 1993

УДК 536.46

К. О. Сабденов, С. Н. Постников

К ТЕОРИИ ЛАМИНАРНОГО ПЛАМЕНИ

(сообщение III)

Изложена заключительная часть теории ламинарного пламени, опирающаяся на представление о минимуме производства энтропии в слабонераспределенных системах. Внесена поправка в формулу Зельдовича—Франк-Камменского—Ландау для скорости ламинарного пламени при больших числах Льюиса. Если вычисленное в работе значение скорости пламени соответствует устойчивому режиму распространения фронта, то рассматриваемая задача становится аналогичной задаче Колмогорова—Петровского—Пискунова. При достаточно больших порядках реакции ширина температурно-диффузионного пограничного слоя растет по логарифмическому закону.

Слабонераспределенные системы характеризуются тем, что производство энтропии dS/dt в них минимально [1]. Для ламинарного пламени это означает, что физически наблюдаемая скорость пламени должна быть наименьшей, если установлено, что процесс слабонераспределенный. Это легко видеть из следующих рассуждений. Производство энтропии в единице объема (стационарное пламя)

$$\frac{dS_V}{dt} = v \frac{dS_V}{dx} = v \left(\frac{\partial S_V}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dx} = v \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dx}.$$

Используя уравнение состояния идеального газа, имеем

$$v \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dx} = j \frac{Rc_p}{p} \frac{dT}{dx},$$

где $j = \rho v$ — поток, постоянный во всем пространстве. Тогда полное производство энтропии $\dot{S} = dS/dt$ в неограниченном объеме с единичной площадью находится из выражения

$$\dot{S} = \int_{-\infty}^{+\infty} j \frac{Rc_p}{p} \frac{dT}{dx} dx = j \frac{Rc_p}{p} (T_b - T_0) = j \frac{a_0 R Q}{p}.$$

Здесь Q — тепловой эффект химических реакций; a_0 — начальная концентрация реагента; R — универсальная газовая постоянная; p — давление. Названные величины в теории ламинарного горения являются внешними параметрами, а поток j определяется самим процессом горения при заданных внешних параметрах. Тогда производство энтропии минимально, если минимален поток j . Требование минимальности \dot{S} вполне законно, так как уравнения ламинарного пламени (1) и (2) сформулированы в рамках слабо неравновесной термодинамики (используются законы Фурье и Фика).