

УДК 532.546.06

ЛИНЕЙНЫЙ ДРЕНАЖ В ИНФИЛЬТРАЦИОННОЙ КАЙМЕ ПРЕСНЫХ ГРУНТОВЫХ ВОД НАД СОЛЕННЫМИ

В. Н. Эмих

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: emikh@hydro.nsc.ru

В рамках краевой задачи о горизонтальном щелевом дренаже в инфильтрационной кайме пресных грунтовых вод над солеными выполнен анализ возможных вариантов течения в прямой зависимости от определяющих физических параметров.

Ключевые слова: кайма пресных вод, линейные дрены, инфильтрация, параметры отображения, критический режим течения.

В работе [1] построено решение предложенной Н. Н. Веригиным задачи о течении в инфильтрационной кайме пресных вод к системе горизонтальных щелевых дрен, называемых далее линейными, при их неполном затоплении. Аналитически установлена однозначная разрешимость системы уравнений относительно параметров отображения, связанных с годографом скорости; при расчетах выявлен критический режим течения на границе раздела между пресными и солеными грунтовыми водами. В настоящей работе раскрывается физическое содержание задачи на базе общей постановки — с полным затоплением дрен.

1. Постановка и решение задачи, параметры отображения. Исследуется плоская стационарная фильтрация в кайме пресных грунтовых вод над неподвижными солеными водами при равномерной инфильтрации интенсивности ε . Поступление в кайму компенсируется оттоком в равноудаленные, заложенные на одной глубине линейные дрены одинаковой ширины. Периодичность течения позволяет ограничиться его изучением в пределах одного полупериода (рис. 1).

В случае полного затопления дрен краевая задача, описывающая течение, состоит в нахождении его комплексного потенциала $\omega = \varphi + i\psi$ (φ — потенциал скорости фильтрации; ψ — функция тока), отнесенного к величине κL (κ — коэффициент фильтрации грунта; L — половина расстояния между серединами соседних дрен), как аналитической в области фильтрации функции комплексной координаты $z = x + iy$, отнесенной к L , при граничных условиях

$$\begin{aligned} CM: \quad x = 0, \quad \psi = 0; \quad EN: \quad x = 0, \quad \psi = \varepsilon; \quad AG: \quad x = 1, \quad \psi = \varepsilon; \\ MDN: \quad y = 0, \quad \varphi = 0; \quad AC: \quad \varphi + y = 0, \quad \psi - \varepsilon x = 0; \\ EG: \quad \varphi - \rho y = \text{const}, \quad \psi = \varepsilon \quad (\rho = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ_1, ρ_2 — плотности пресных и соленых вод соответственно. Первое условие на EG — следствие допущений о неподвижности соленых вод и непрерывности давления при переходе через этот участок. Кривая депрессии AC отмечена на рис. 1 цифрой 1.

Для решения задачи используется метод П. Я. Полубариновой-Кочкиной [2], основанный на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. Целью метода является нахождение функций $\Omega = d\omega/d\zeta$ и $Z = dz/d\zeta$, определенных в полуплоскости $\text{Im } \zeta \geq 0$ вспомогательной комплексной переменной $\zeta = \xi + i\eta$ (рис. 2). Годограф

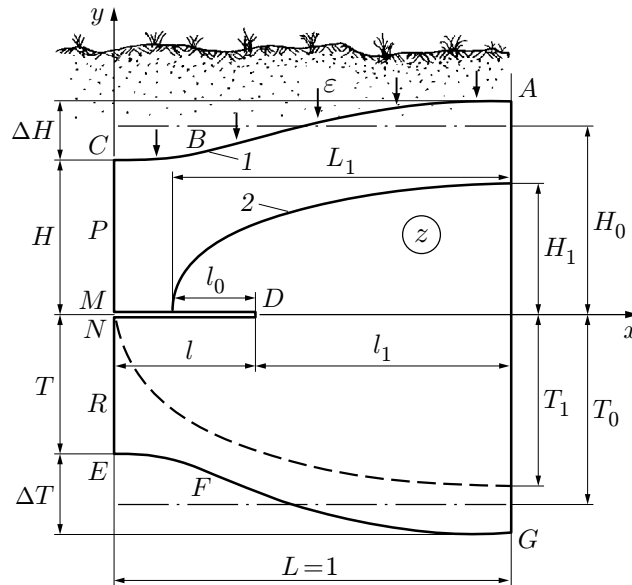


Рис. 1. Область течения в кайме пресных вод

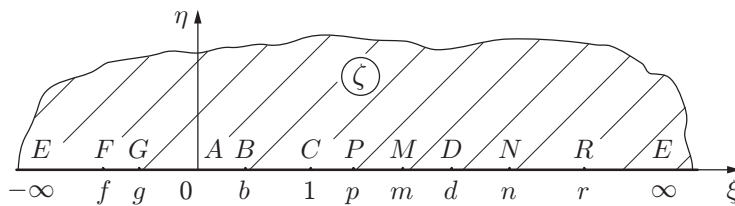


Рис. 2. Полу плоскость вспомогательной комплексной переменной

скорости $\bar{w} = w_x + iw_y$ (рис. 3) является круговым многоугольником того же вида, что и в схеме инфильтрационной каймы с трубчатым дренажем [3]. Аналогична и процедура построения решения, приводящая в итоге к следующим зависимостям:

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = 2c_1 F_1(\zeta) \lambda(\zeta), \quad \frac{dz}{d\zeta} = -ic_1 F_2(\zeta) \lambda(\zeta), \quad c_1 > 0,$$

$$F_1(\zeta) = \sigma U - \frac{1}{U}, \quad F_2(\zeta) = \alpha U + \frac{\beta}{U}, \quad U = \exp \frac{W(\zeta)}{2}, \quad (2)$$

$$\lambda(\zeta) = \sqrt{\frac{(\zeta - p)(\zeta - r)}{(\zeta - g)\zeta(\zeta - 1)(\zeta - m)(\zeta - n)}}.$$

Для функции $\lambda(\zeta)$ выбирается ветвь, положительная при $\zeta > r$.

Функция $W(\zeta)$ (рис. 4), используемая при отображении на полу плоскость $\text{Im } \zeta \geq 0$ области комплексной скорости фильтрации $w = w_x - iw_y$, определяется соотношениями

$$W(\zeta) = \ln \frac{2i + \beta w}{2i\sigma - \alpha w} = ic_0 \int_0^\zeta \Phi(u) du \quad (c_0 > 0),$$

$$\Phi(u) = \frac{(b - u)(u - f)}{(p - u)(r - u)} \Phi_0(u), \quad \Phi_0(u) = \frac{1}{\sqrt{(u - g)u(1 - u)}}, \quad (3)$$

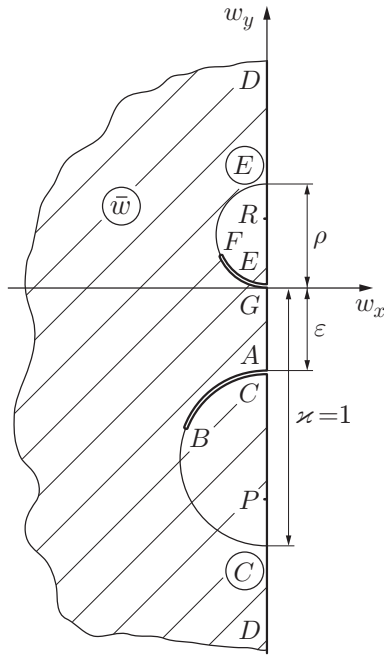


Рис. 3

Рис. 3. Годограф скорости фильтрации

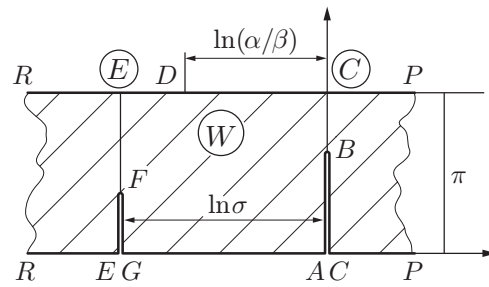


Рис. 4

Рис. 4. Промежуточная область при отображении годографа скорости на полу-плоскость

$$\sigma = \frac{\sqrt{\varepsilon + \rho} + \sqrt{\varepsilon(1 + \rho)}}{\sqrt{\varepsilon + \rho} - \sqrt{\varepsilon(1 + \rho)}}, \quad \alpha = \frac{\sigma - 1}{\varepsilon} + \sigma + 1, \quad \beta = \frac{\sigma - 1}{\varepsilon} - \sigma - 1.$$

На рис. 3, 4 буквами C, E в кружках отмечены соответствующие точки в предельных случаях, которые будут рассмотрены в п. 2.

Функция W содержит параметры отображения c_0, b, d, f, p, g, r. Как и в [3], на первом этапе ставится задача о нахождении первых пяти параметров при задании двух остальных. Приведем результаты решения этой задачи.

С использованием представления (3) и известных элементов области W составляются пять уравнений относительно искомым параметров. В ходе их преобразования вводятся вспомогательные параметры

$$k = \sqrt{-\frac{g}{1-g}}, \quad s = \sqrt{\frac{1-g}{r-g}}, \quad t = \sqrt{\frac{1-g}{p-g}}, \quad \Theta = \sqrt{\frac{1-g}{d-g}}. \quad (4)$$

В терминах (4) задание параметров g, r равнозначно заданию параметров k, s. Параметр t выражается через них с помощью следующего соотношения, в которое преобразуется одно из пяти уравнений:

$$t = [s\Delta(\tau) + \tau\Delta(s)] / (1 - k^2 s^2 \tau^2), \quad \Delta(\chi) = \sqrt{(1 - \chi^2)(1 - k^2 \chi^2)}, \quad \tau = \operatorname{sn} [\ln(\sigma K' / \pi), k], \quad K' = K(k'). \quad (5)$$

Здесь K(k') — полный эллиптический интеграл первого рода при модуле k' = sqrt(1 - k^2); sn — символ эллиптической функции Якоби [4].

Из двух других преобразованных уравнений вычисляются параметры c_0 и Θ , со вторым из которых согласно (4) связан параметр d :

$$c_0 k' = \frac{\pi}{2K'} [\Lambda_0(s, k') - \Lambda_0(t, k')] + \frac{\Delta(s)}{s} - \frac{\Delta(t)}{t}; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2K'} [\Lambda_0(t, k') - \Lambda_0(s, k')] [K - F(\Theta, k)] - K[Z(t, k) - Z(s, k)] + \\ + \frac{\Delta(s)}{s} \Pi\left(\Theta, \frac{1}{s^2}, k\right) - \frac{\Delta(t)}{t} \Pi\left(\Theta, \frac{1}{t^2}, k\right) = \ln \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь содержатся неполные эллиптические интегралы первого рода $F(\Theta, k)$ и третьего рода $\Pi(\Theta, n, k)$, а также стандартизированные лямбда-функция $\Lambda_0(\delta, k')$ и дзета-функция $Z(\delta, k)$ [4].

Параметры b и f определяются как корни квадратного уравнения

$$\begin{aligned} \Gamma(\gamma) = \gamma^2 - [p + r - a(R - P)]\gamma + pr - a(pR - rP) = 0, \\ a = c_0^{-1}, \quad P = \Phi_0^{-1}(p), \quad R = \Phi_0^{-1}(r). \end{aligned} \quad (8)$$

Аналитически устанавливается однозначная разрешимость системы уравнений (5)–(8) при следующих ограничениях на параметры k , s :

$$k_0 \leq k < 1, \quad 0 \leq s \leq s_0. \quad (9)$$

Здесь k_0 — корень уравнения

$$K(k_0)/K(k'_0) = \ln \sigma / \pi \quad (k'_0 = \sqrt{1 - k_0^2}). \quad (10)$$

Величина s_0 определяется равенством

$$s_0 = \sqrt{(1 - \tau^2)/(1 - k^2 \tau^2)}. \quad (11)$$

Коэффициент c_1 в уравнениях (2) играет роль масштабного множителя и может быть исключен из расчетных зависимостей посредством соотношения, фиксирующего величину L , к которой отнесены координаты z , и получаемого на основе зависимостей (2) и (3), преобразованных применительно к участку EG (см. рис. 1, 2, 4):

$$\begin{aligned} c_1 \frac{\alpha + \beta\sigma}{\sqrt{\sigma}} \int_{-\infty}^g \cos \frac{W_0(\zeta)}{2} |\lambda(\zeta)| d\zeta = 1, \\ W_0(\zeta) = c_0 \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{(b-u)(f-u) du}{(p-u)(r-u)\sqrt{(g-u)(-u)(1-u)}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Задавая длину l отрезков MD и ND , на основе (2) получим следующую систему уравнений относительно параметров m, n :

$$\begin{aligned} c_1 \int_m^d \left(\alpha U - \frac{\beta}{U}\right) |\lambda(\zeta)| d\zeta = l, \quad c_1 \int_d^n \left(\frac{\beta}{U} - \alpha U\right) |\lambda(\zeta)| d\zeta = l, \\ U = \exp \frac{W_1(\zeta)}{2}, \quad W_1(\zeta) = c_0 \int_1^{\zeta} \frac{(u-b)(u-f) du}{(p-u)(r-u)\sqrt{(u-g)u(u-1)}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Как и в других задачах такого рода, при составлении одного из двух уравнений относительно параметров k и s будем основываться на задании глубины T_0 исходной поверхности соленых вод, обозначенной на рис. 1 штрихпунктирной прямой. В предположении о том, что при формировании каймы объем соленых вод остается неизменным, величина T_0 равна средней ординате точек линии раздела EG . Исходя из этого получим уравнение

$$T + \frac{c_1^2(\beta^2\sigma^2 - \alpha^2)}{\sigma} \int_{\infty}^g \left(\int_{\infty}^{\zeta} \sin \frac{W_0(u)}{2} |\lambda(u)| du \right) \cos \frac{W_0(\zeta)}{2} |\lambda(\zeta)| d\zeta = T_0. \quad (14)$$

При его использовании следует предварительно вычислить величину T , выражение для которой получается на основе зависимостей (2), (3), преобразованных применительно к участку NE .

К определяющим физическим параметрам относится напор h на дрене; с приведенным потенциалом φ скорости фильтрации эта величина связана соотношением

$$\varphi = -h, \quad h = p/(\rho_1 g) + y. \quad (15)$$

Здесь p — давление в потоке.

Соответствующее уравнение получим, составляя выражение для потенциала φ в точке M , расположенной на дрене. Это выражение зависит от положения точки P (см. рис. 3, 4), в которой

$$W = \infty, \quad w_x = 0, \quad w_y = -2\sigma/\alpha > -1. \quad (16)$$

Согласно (15) на отрезке CM выполняется соотношение

$$\frac{dp}{dy} = -\rho_1 g(w_y + 1).$$

Отсюда и из неравенства в (16) заключаем, что $(dp/dy)_P < 0$: точка P находится на участке возрастания давления при движении вниз от точки C и в силу этого может располагаться на дрене только при поддержании на ней давления, превышающего атмосферное, иначе точка P принадлежит отрезку CM и делит его на два участка. В последнем случае уравнение, основанное на задании величины h_M , получим с использованием зависимостей (2) в виде

$$H - 2c_1 \left[\int_1^p \left(\sigma U - \frac{1}{U} \right) |\lambda(u)| du - \int_p^m \left(\sigma U + \frac{1}{U} \right) |\lambda(u)| du \right] = h_M. \quad (17)$$

Функция $U(\zeta)$ определена в (13).

В случае $P \in MN$ величина h_M определяется равенством

$$H - 2c_1 \int_1^m \left(\sigma U - \frac{1}{U} \right) |\lambda(u)| du = h_M. \quad (18)$$

Содержащуюся в последних уравнениях ординату H точки C следует предварительно вычислить исходя из представления (2) для $z(\zeta)$.

Запрограммированный алгоритм определения параметров отображения при заданных физических параметрах ε , ρ , h_M , l , $L = 1$ в конечном счете сводится к нахождению параметра k из уравнения (14), левая часть которого рассматривается как сложная функция указанного параметра. При каждом его значении, фиксируемом в ходе этой итерационной процедуры, осуществляется численное решение одного из уравнений (17) или (18)

относительно параметра s ; в обоих этих циклах искомые параметры подчинены ограничениям (9). Далее во внутренней части алгоритма из уравнений (5)–(8) определяются параметры c_0, b, d, f, p , а из уравнений (12), (13) — коэффициент c_1 и параметры отображения m, n . Однозначная разрешимость уравнений (13), (14) и (17) (или (18)) обеспечивается монотонностью входящих в них функций, устанавливаемой численно.

2. Предельные и частные случаи. Как и в задаче о кайме с трубчатым дренажем, вопрос о физических предпосылках формирования течения к затопленным линейным дренам связан прежде всего с ограничениями (9). Поскольку в обеих фильтрационных схемах годограф скорости один и тот же, выполненный ранее (см. [3, п. 3]) анализ предельных режимов дренирования, связанных с указанными ограничениями, полностью переносится на исследуемое течение. Приведем основные результаты этого анализа.

Случай $s = s_0$. При этом $p = b = 1$, т. е. точка B перегиба кривой депрессии и точка P участка CM совмещаются с точкой C , которая превращается в точку заострения кривой депрессии. Из годографа скорости фильтрации выпадает полукруг $|\bar{w} + i(1 + \varepsilon)/2| < (1 - \varepsilon)/2$, $\text{Re } \bar{w} \leq 0$, а из области W — полуполоса $\text{Re } W > 0$, $0 \leq \text{Im } W \leq \pi$ (см. рис. 3, 4). На участке CM имеем $dp/dy = -\rho_1 g(w_y + 1) \leq 0$, причем равенство выполняется только в точке C , во всех же других точках давление ниже атмосферного, и его дальнейшее сколь угодно малое понижение должно привести к прорыву воздуха в дренах. Это означает, что интенсивность дренирования в рассматриваемом случае является максимально допустимой и должна быть установлена предварительно, а сам критический режим течения реализуется при вакуумировании дренажа [5]. На практике встречается вакуумный трубчатый дренаж мелиоративного назначения [6], однако для линейных дренах такой режим не характерен и представляет скорее теоретический интерес.

Случай $s = 0$. В данном случае $r = -f = \infty$: точки R, F совмещаются с точкой E , которая становится точкой заострения линии раздела, причем в ней $\bar{w} = i\rho$. В результате из годографа выпадает полукруг $|\bar{w} - i\rho/2| < \rho/2$, $\text{Re } \bar{w} \leq 0$, а из области W — полуполоса $\text{Re } W < \ln \sigma$, $0 \leq \text{Im } W \leq \pi$ (см. рис. 3, 4). На участке EN , где также $\bar{w} = iw_y$, имеем $w_y \geq \rho$, $dp/dy = -\rho_1 g(w_y + 1) \leq -\rho_2 g$. При этом равенство, характеризующее гидростатическое равновесие в зоне соленых вод, выполняется только в точке E . На остальной части отрезка EN градиент гидродинамического давления превышает градиент гидростатического равновесия в области соленых вод, и дальнейшее понижение давления должно вовлечь их в поток.

Отмеченный режим возникает на грани дестабилизации границы раздела между пресными и солеными водами и поэтому также должен быть рассчитан предварительно. Вопрос заключается в том, какая из двух критических ситуаций реализуется при конкретных значениях определяющих физических параметров.

Случай $s_0 = 0$. Этот предельный случай, отмеченный впервые в работе [7] как *двойной критический режим*, совмещает описанные выше *простые критические режимы* и вместе с тем разграничивает их; именно поэтому двойной критический режим подлежит первоочередному расчету. В рассматриваемом случае из годографа выпадают оба полукруга, а область W трансформируется в прямоугольник, отображаемый на полуплоскость $\text{Im } \zeta \geq 0$ посредством зависимости

$$W(\zeta) = i \frac{\pi}{K'_0} F\left(\sqrt{\frac{\zeta}{k_0^2 + k_0'^2 \zeta^2}}, k'_0\right), \quad (19)$$

где $K'_0 = K(k'_0)$. Модули k_0 и k'_0 определяются на основе (10).

Из уравнения (7) получим

$$\Theta = \text{sn}\left(\left(K'_0/\pi\right) \ln(\beta\sigma/\alpha), k_0\right)$$

и затем из последнего равенства в (4) найдем параметр d . Значительно упрощаются также уравнения (12) и (13) относительно параметров c_1 , m , n и другие расчетные формулы. При этом $\lambda(\zeta) = 1/\sqrt{\zeta(\zeta - g)}$, а функция $W(\zeta)$ вычисляется согласно (19).

Из предшествующего анализа предельного случая $s = s_0$ следует, что одной из предпосылок возникновения двойного критического режима является вакуумирование дренажа.

Рассмотрим фильтрацию в кайме пресных вод к частично затопленным дренам. По отношению к схеме, изложенной в п. 1, этот случай является частным: кривая депрессии (кривая 2 на рис. 1) выходит на дрена ортогонально к ней, а годограф скорости имеет такой же вид, как и в предельном случае $s = s_0$, но исследуемое течение происходит в *нормальном режиме*. Соответствующие изменения следует внести в зависимости (2) и (3), представляющие решение задачи: функция $\lambda(\zeta)$ не содержит теперь множителей $\zeta - p$, $\zeta - m$, а функция $\Phi(u)$ — множителей $b - u$, $p - u$.

Определение параметров отображения по описанному выше алгоритму в конечном счете сводится к нахождению параметра k из соотношения, в которое переходит уравнение (14). При каждом значении этого параметра, фиксируемом в ходе решения уравнения в интервале $(k_0, 1)$, параметр $s = s_0$ вычисляется с использованием соотношений (11), (5), (3). Согласно (5) имеем $t = 1$, а уравнения (6) и (7) преобразуются следующим образом:

$$c_0 k' = \frac{\Delta(s)}{s} - \frac{\pi}{2K'} [1 - \Lambda_0(s, k')],$$

$$\int_{\Theta}^1 \frac{(\Delta(s)/s)u^2 - c_0 k'(u^2 - s^2)}{\Delta(u)(u^2 - s^2)} du = \ln \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

В данном случае $p = 1$, и на основе (8) получим $f = r - aR$; параметр r выражается через s на основе второго равенства в (4).

Для нахождения коэффициента c_1 и параметра n используются преобразованные уравнение (12) и второе уравнение в (13). Первое уравнение в (13) преобразуется при $m = 1$ в равенство, из которого определяется ширина l_0 затопленного участка дрена.

Единственный критический режим, возможный в рассматриваемом течении, обусловлен наличием линии раздела, дестабилизации которой способствует как усиление инфильтрации, так и уменьшение ширины дрен. В работе [1] такой режим впервые обнаружен как проявление второго из этих факторов: расширение зоны воздействия инфильтрационных вод на соленые воды может привести к “выдавливанию” последних в дрена. Годограф скорости, область функции W и все связанные с ними зависимости в этом случае те же, что и в двойном критическом режиме течения к полностью затопленной дрене, а в представлениях для функций $\omega(\zeta)$, $z(\zeta)$ и вытекающих из них формулах отсутствует множитель $\zeta - m$.

При определении глубины залегания соленых вод ключевую роль играет рассмотренная П. Я. Полубариновой-Кочиной [8] задача о дренируемой линзе пресной воды, образованной за счет равномерной инфильтрации. Это первая модель двумерной фильтрации жидкостей разной плотности, описывающая в исследуемой задаче критический режим, в котором точка E заострения линии раздела (штриховая линия на рис. 1) выходит на дрена, совмещаясь при этом с точкой N , а кайма распадается на цепочку линз. Обе свободные границы линз являются дугами эллипсов, общие фокусы которых расположены в конечных точках дрен; в терминах безразмерных (отнесенных к L) геометрических величин их полуоси определяются равенствами (см. рис. 1)

$$1 = l_1 \sqrt{\frac{(1 + \rho)(\varepsilon + \rho)}{\rho(1 + \varepsilon + \rho)}}, \quad T_1 = l_1 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho(1 + \varepsilon + \rho)}}, \quad (20)$$

$$L_1 = l_1 \sqrt{\frac{1 + \rho}{(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon + \rho)}}, \quad H_1 = l_1 \sqrt{\frac{\varepsilon(\varepsilon + \rho)}{(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon + \rho)}} \quad (l_1 = 1 - l).$$

Рассматриваемая ситуация возникает при $\varepsilon = \varepsilon_0$, $T_0 = T_{00}$; параметр ε_0 определяется из первого соотношения в (20), а величина T_{00} вычисляется на основе равенств, получаемых с использованием известных соотношений для геометрических параметров эллипса:

$$T_{00} = (\pi/4)T_1, \quad T_1^2 = 1 - l_1^2. \quad (21)$$

То же значение величины T_{00} можно получить из второго равенства в (20) при $\varepsilon = \varepsilon_0$.

3. Гидродинамический анализ задачи. Выполненное теоретическое исследование совместно с численными расчетами позволяет раскрыть гидродинамическое содержание поставленной краевой задачи во всем его многообразии. Единственной полноценной основой такого анализа может быть только прямая постановка, при которой устанавливаются условия реализации в рамках задачи моделируемого ею течения и изучается зависимость его характеристик от определяющих физических факторов; среди последних наиболее динамичным, а в некоторых случаях и регулируемым параметром является интенсивность инфильтрации.

В конкретных случаях вычислительный алгоритм зависит от того, частично или полностью затоплены дрены, а обеспечение нормального режима дренирования требует согласования заданного значения параметра ε с величиной T_0 . В связи с этим при выбранных значениях величин l и ρ необходимо определить интенсивность инфильтрации и исходную глубину соленых вод в ситуации, когда кривая депрессии выходит на дренаж в точке M , а на линии раздела возникает критический режим. В этом случае, который будем называть *погранично-критическим*, расчеты выполняются в рамках схемы частичного затопления дрен при $l_0 = l$.

Поскольку линия раздела не должна выходить на дрены, вернемся к отмеченной в п. 2 схеме П. Я. Полубариновой-Кочиной. На основании первого и третьего равенств в (20) заключаем, что в этой предельной схеме при $L_1 = 1$ выполняются соотношения

$$\varepsilon = \varepsilon_0^* = 1 - \rho, \quad l = l_* = 1 - \sqrt{2\rho/(1 + \rho)}. \quad (22)$$

При реальных значениях параметров ε , ρ , составляющих сотые и тысячные доли единицы, имеем $\varepsilon < \varepsilon_0^*$, $L_1 < 1$; это означает, что, как правило, в критическом режиме линия раздела выходит на дренаж при ее частичном затоплении. Полностью же затапливаются дрены малой ширины, в этих случаях линия раздела в погранично-критическом режиме находится ниже дрен. При расчете такого течения вычисляются величины $\varepsilon = \varepsilon_*$ и $T_0 = T_0^{**}$.

В случае $\varepsilon < \varepsilon_*$ течение происходит при частичном затоплении дрены с выходом на нее кривой депрессии, если давление на дрене равно атмосферному, иначе она будет полностью затоплена. Глубина залегания соленых вод должна удовлетворять неравенству $T_0 > T_0^*$, в котором величина T_0^* предварительно определяется при данном значении ε в критическом режиме, связанном с линией раздела. Согласно расчетам $T_0^* \in (0, T_0^{**})$, такое расширение диапазона допустимых значений исходной глубины залегания соленых вод является реакцией на уменьшение интенсивности инфильтрации. Заметим, что если включить величину $T_0 = T_0^*$ в число определяющих параметров, то значение ε , при котором была вычислена величина T_0^* , следует трактовать как максимально допустимую интенсивность инфильтрации.

Случай $\varepsilon > \varepsilon_*$ требует предварительного анализа, поскольку по мере отдаления соленых вод ослабевают их подпирающее воздействие на фильтрационный поток. При этом следует ожидать понижения кривой депрессии, в связи с чем возникает вопрос: не может ли она выйти на дренаж, по крайней мере, при малом превышении инфильтрацией значения ε_* ? Ответить на него с достаточной определенностью позволяют численные расчеты,

достоверность которых обеспечивается вычислениями с двойной точностью при контролируемой относительной погрешности, не превышающей 10^{-4} .

Рассмотрим течение при $l = 0,1$, $\rho = 0,01$. В этом случае в погранично-критическом режиме имеем $\varepsilon_* = 0,3388$, $\Delta H = 0,4240$, $T_0^{**} = 1,5410$, $\Delta T = 0,6294$. Столь большое значение параметра ε связано с выбором также значительной с практической точки зрения величины l для отражения специфики линейного дренажа. Отметим, что при $l = 0,001$; $0,01$; $0,5$ найдены соответственно значения $\varepsilon_* = 0,00473$; $0,0454$; $0,8588$. Что касается параметра ρ , то его влияние на величину ε_* крайне мало; так, при $l = 0,1$ для значений $\rho = 0,0001$; $0,1$ получены значения $\varepsilon_* = 0,3388$; $0,3382$. Принятое в расчетах значение $\rho = 0,01$ соответствует минерализации соленых вод, приблизительно равной 13 г/л по NaCl [9].

При инфильтрации $\varepsilon = 0,34$, незначительно превышающей ее пороговое значение ε_* , и при $h_M = 0$, т. е. при сохранении на дрене атмосферного давления, в критическом режиме на линии раздела имеем $H = 0,02243$, $\Delta H = 0,4031$, $T_0^* = 1,5417$, $\Delta T = 0,6294$. Далее при той же инфильтрации и значениях $T_0 = 2,0$; $2,5$; $3,0$ соответственно вычислены значения $\Delta T = 0,0914$; $0,0188$; $0,0039$, откуда следует, что линия раздела выполаживается по мере углубления. Между тем кривая депрессии практически не реагирует на отдаление соленых вод: для всех указанных значений T_0 с точностью до четырех значащих цифр получены значения $H = 0,02237$, $\Delta H = 0,4032$. Аналогичная ситуация сохраняется и при других малых значениях ρ , что позволяет выполнять вычисления при $\varepsilon > \varepsilon_*$, $T_0 > T_0^*$ в рамках схемы полного затопления дрен. В числе параметров, определяющих течение в этом случае, заданию подлежит давление на дрене, с которым связано уравнение (17) или (18). Если давление на затопленной дрене равно атмосферному, а тем более превышает его, то единственно возможный при заданной инфильтрации $\varepsilon > \varepsilon_*$ критический режим течения обусловлен наличием линии раздела. При расчете такого течения устанавливается минимально допустимая глубина T_0^* залегания соленых вод.

Отправляясь от погранично-критического режима, проследим за влиянием на кайму возрастания интенсивности инфильтрации при $h_M = 0$. Естественным результатом такой интенсификации является подъем кривой депрессии, который сопровождается ее выполаживанием, связанным с постепенным отдалением от дрены; в частности, при $\varepsilon = 0,4$; $0,6$; $0,8$; $0,9$ вычислены соответственно следующие значения: $H = 0,2019$; $0,8213$; $2,3605$; $5,3146$; $\Delta H = 0,3045$; $0,1180$; $0,00298$; $6 \cdot 10^{-7}$. В меньшей степени воздействует этот фактор на положение линии раздела в критическом режиме, а на ее деформацию практически не оказывает влияния: при $\varepsilon = 0,4$; $0,9$ получены соответственно значения $T_0^* = 1,5757$; $1,8059$, $\Delta T = 0,6301$; $0,6333$.

Аналогично влияет на форму и положение кривой депрессии увеличение напора на дрене, а на среднюю глубину линии раздела и ее деформацию этот фактор воздействует в еще меньшей степени, чем инфильтрация. Так, при $\varepsilon = 0,4$, $h_M = 3$ имеем $T_0^* = 1,5499$, $\Delta T = 0,6292$. В некотором уменьшении критической глубины залегания соленых вод проявляется амортизирующий эффект утолщения слоя пресных вод при повышении напора на дрене.

Как указано в п. 2, вакуумный линейный дренаж нехарактерен для практики, тем не менее для большей полноты анализа остановимся на этом случае. В конкретных вариантах с заданными значениями величин l , ρ , $\varepsilon > \varepsilon_*$ первоочередному расчету подлежит двойной критический режим, определяющий минимально допустимые значения напора $h_M^{**} < 0$ на дрене и исходной глубины T_0^* соленых вод. При $l = 0,1$, $\rho = 0,01$ и $\varepsilon = 0,34$; $0,4$; $0,6$; $0,8$; $0,9$ соответственно получаем $h_M^{**} = -0,00017$; $-0,0176$; $-0,1284$; $-0,3045$; $-0,4231$; $T_0^* = 1,5418$; $1,5810$; $1,6878$; $1,7706$; $1,8064$. Из сравнения этих значений величины T_0^* с ее приведенными выше значениями при $\varepsilon = 0,4$; $0,9$, $h_M = 0$ следует, что само по себе вакуумирование дренажа приводит лишь к незначительному увеличению критической глубины

соленых вод. На деформацию линии раздела понижение давления на дрене практически не влияет: при $\varepsilon \in (0,4, 0,9)$ в двойном критическом режиме величина ΔT изменяется в том же диапазоне, что и при $h_M = 0$: $\Delta T \in (0,6302, 0,6333)$.

Отмеченное выше крайне слабое влияние плотности соленых вод на значение ε_* интенсивности инфильтрации в погранично-критическом режиме проявляется и по отношению к величине h_M^{**} ; в частности, при $l = 0,1$, $\varepsilon = 0,6$ для значений $\rho = 0,0001$; $0,1$ получены соответственно значения $h_M^{**} = -0,1284$; $-0,1288$. Так же незначительно изменяются и величины H , ΔH . Что касается линии раздела, то ее деформация и особенно положение существенно зависят от параметра ρ : при указанных выше его значениях в двойном критическом режиме получим соответственно $T_0^* = 3,1513$; $0,9750$; $\Delta T = 0,6366$; $0,5936$.

При $T_0 > T_0^*$ режим течения на линии раздела нормальный, а минимально допустимый напор на дрене h_M^* определяется в результате расчета простого критического режима на кривой депрессии. Однако с увеличением T_0 величина h_M^{**} , вычисленная в двойном критическом режиме, остается неизменной до четвертой значащей цифры, что освобождает от необходимости специальных расчетов по нахождению значения h_M^* .

При $h_M > h_M^{**}$, когда кривая депрессии формируется в нормальном режиме, единственное ограничение связано с величиной T_0 . Ее минимально допустимое значение устанавливается при расчете течения в простом критическом режиме на линии раздела, хотя и в этой ситуации в качестве величины T_0^* можно принять ее значение, найденное в двойном критическом режиме. Например, при $\varepsilon = 0,6$, $\rho = 0,01$ в широком диапазоне возрастания напора h_M на дрене от минимального значения $-0,1284$ в двойном критическом режиме до единицы величина T_0 в соответствующих простых критических режимах на линии раздела убывает от значения $1,6878$ до значения $1,6777$.

Исследуем особенности течения при $\varepsilon < \varepsilon_*$, по-прежнему полагая $l = 0,1$, $\rho = 0,01$. Как отмечено выше, дрена будет полностью затоплена и в этом случае, если $h_M > 0$. Так, при инфильтрации $\varepsilon = 0,1$, значительно меньшего значения $\varepsilon = 0,3388$ в погранично-критическом режиме, и при $h_M = 0$ в критическом режиме на линии раздела имеем $l_0 = 0,0124$, т. е. затоплена лишь малая часть дрены. При $h_M = 0,01$ минимальная толщина слоя воды над дренаем $H = 0,0111$. С дальнейшим возрастанием подпора, так же как в случае $\varepsilon > \varepsilon_*$, происходят подъем кривой депрессии, ее выполаживание, а также незначительное уменьшение средней глубины линии раздела в критическом режиме течения с сохранением ее деформации.

При выбранных параметрах l , ε , ρ и $h_M = 0$ проявляются закономерности, выявленные при $\varepsilon > \varepsilon_*$. На кривую депрессии практически не оказывает влияния положение нижней границы потока, причем последняя выполаживается по мере углубления: величина ΔT уменьшается от значения $\Delta T = 0,6190$ до значения $\Delta T = 3 \cdot 10^{-6}$ при возрастании T_0 от минимального значения $T_0 = 1,2597$ в критическом режиме до значения $T_0 = 5$. Что касается плотности соленых вод, то при ее изменении и фиксированном значении T_0 значения величин l_0 и H_1 сохраняются вплоть до седьмой-восьмой значащей цифры.

Незначительно влияет параметр ρ на характер кривой депрессии и в критическом режиме на линии раздела: при увеличении этого параметра в интервале $\rho \in (0,0001, 0,1)$ и одновременном убывании T_0^* от значения $T_0^* = 2,7167$ до значения $T_0^* = 0,5956$ величины l_0 , H_1 возрастают в интервалах $l_0 \in (0,0124, 0,0126)$, $H_1 \in (0,1384, 0,1428)$. Но даже при столь незначительном их изменении обнаруживается подпирющее воздействие на поток со стороны линии раздела при ее подъеме. В полной мере такое влияние проявляется при больших значениях параметра ρ . В частности, при $\rho = 10^6$ значения $l_0 = 0,0124$, $H_1 = 0,1384$, практически не изменяясь при $T_0 \geq 1,5$, по мере подъема линии раздела увеличиваются до значений $l_0 = 0,0253$, $H_1 = 0,2219$ при $T_0 = 0,05$. При этом величина ΔT достигает максимального значения $\Delta T = 2 \cdot 10^{-7}$, и, следовательно, в рассматриваемом

случае нижняя граница фактически превращается в горизонтальный водоупор. При тех же значениях параметров ρ , l и $\varepsilon = 0,34$, что и в предыдущем примере, подпор со стороны нижней границы потока проявляется при $T_0 < 1,5$ в подъеме и выполаживании кривой депрессии. Средняя ордината H_0 ее точек возрастает от $H_0 = 0,3361$ при больших значениях T_0 до $H_0 = 0,4263$ при $T_0 = 0,1250$, а величины H , ΔH изменяются соответственно от значений $H = 0,0224$, $\Delta H = 0,4032$ до значений $H = 0,1825$, $\Delta H = 0,3477$.

При $T_0 < T_{00}$ критический режим течения оказывается за рамками исследуемой краевой задачи, поэтому ограничение на интенсивность инфильтрации удается установить лишь приблизительно. Будем ориентироваться при этом на соответствующее значение $\varepsilon = \varepsilon_{00} < \varepsilon_0$, определяемое вторым равенством в (20), в котором с учетом (21) следует положить $T_1 = (4/\pi)T_0$. Правая часть первого равенства в (20), из которого при $T_0 = T_{00}$ вычислялось значение ε_0 , определяет теперь величину $L_* < 1$, составляющую в совокупности с величинами T_0 и ε_{00} параметры рассмотренного в [8] течения с выходом линии раздела на дренаж. Такая предельная ситуация вписывается в основную схему течения при $L = L_*$ с сохранением расстояния $2l_1$ между крайними точками соседних дрен (см. рис. 1). Для значений $L > L_*$ нормальный режим фильтрации сохраняется не только при инфильтрации $\varepsilon = \varepsilon_{00}$, но и при ее превышении. Степень такого превышения, как указано выше, можно определить приближенно посредством расчетов.

При $l = 0,1$, $\rho = 0,1$ для предельного режима с выходом на дренаж по формулам (20), (21) вычислены значения $T_{00} = 0,3423$, $\varepsilon_0 = 2,3747 \cdot 10^{-3}$, $l_0 = 1,3098 \cdot 10^{-3}$. При фиксированном значении $T_0 = 0,2$ имеем $L_* = 0,9353$, $\varepsilon_{00} = 8,092 \cdot 10^{-4}$, $l_0 = 3,897 \cdot 10^{-4}$. Два последних параметра можно сопоставить с приведенными выше параметрами ε_0 и l_0 , если принять $L = L_*$. Для исходного значения $L = 1$ диапазон допустимых значений параметра ε расширяется, и при $\varepsilon = \varepsilon_{00}$ течение происходит уже в нормальном режиме; при этом $T = 0,0424$, $l_0 = 2,257 \cdot 10^{-4}$. С увеличением инфильтрации линия раздела приближается к дренажу, и при $\varepsilon = 1,1\varepsilon_{00} = 8,901 \cdot 10^{-4}$ (на пределе возможностей вычислительного алгоритма) имеем $T = 0,0108$, $l_0 = 3,597 \cdot 10^{-4}$. По-видимому, последнее значение ε близко к максимально допустимому. Для значения $L = 1,2$ рассчитаны характеристики течения при $\varepsilon = 1,25\varepsilon_{00} = 1,012 \cdot 10^{-3}$, в частности, вычислены значения $T = 0,0497$, $l_0 = 2,794 \cdot 10^{-4}$. Указанные перегрузки при вычислениях связаны с тем, что в подобных случаях некоторые параметры отображения принимают значения, близкие к предельным. Так, в последнем варианте $d = 1,000\ 083$; $g = -0,008\ 12$; $n = 2\ 789\ 388$. При этом $r = 38,365$: точка R расположена на участке DN , т. е. на нижней поверхности дренажа (см. рис. 1, 2).

В краевые условия (1), соответствующие схеме течения при полном затоплении дрен, входит общее для отрезков CM и EN равенство $x = 0$, выражающее их принадлежность линии симметрии потока и реализованное в уравнениях (13). Такое требование, продиктованное исходной физической постановкой задачи, не отражается на геометрии области течения в окрестности особых точек, а в конечном счете и на годографе скорости. Это позволяет отступить от условия $|MD| = |ND|$ и рассмотреть, оставаясь в рамках сформулированной в п. 1 краевой задачи, некоторые модификации ее первоначальной физической постановки, сохранив представление решения (2) и описанный вычислительный алгоритм с учетом того, что в правой части первого уравнения в (13) содержится теперь величина l_0 , отличная от величины l . При $l_0 < l$ схему течения можно интерпретировать как приток к котловану шириной $2(l - l_0)$ с непроницаемыми боковыми стенками и дренажем под котлованом, выступающим за его стенки на расстояние l_0 ; свободные границы такого течения отмечены на рис. 5 цифрой 1. Цифрой 2 отмечены границы потока к котловану, стенки которого заглублены в грунт. В этом случае особая точка M переходит на участок ND , и, следовательно, $d < m < n$, а величины l и l_0 в уравнениях (13) означают соответственно ширину траншеи и глубину экрана, причем во втором уравнении нижним пределом инте-

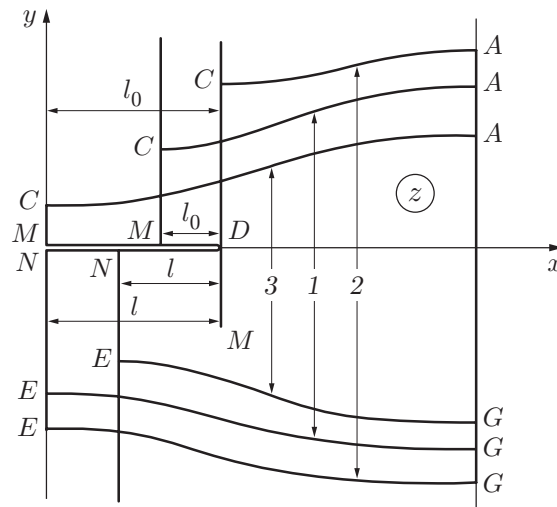


Рис. 5. Модифицированные схемы течения

гирования становится параметр m . При $l_0 > l$ реализуется течение, отмеченное на рис. 5 цифрой 3. Ему также можно дать физическую трактовку, если предположить, что под средней частью дрены в грунте содержится непроницаемое включение шириной $2(l_0 - l)$ с вертикальными стенками, а вода на этом участке поступает в дрену только сверху.

При входных параметрах $\rho = 0,01$, $\varepsilon = 0,1$, $l = 0,1$, $T_0 = 1,5$ значение $l_0 = 0,0124$ в исходной схеме течения определяет абсциссу точки выхода кривой депрессии на дрену. Примем эту точку в качестве контрольной. Первая из перечисленных выше схем реализуется, если вертикальная стенка расположена правее указанной точки. По мере смещения экрана вправо до конечной точки дрены и при последующем его заглублении с переходом ко второй модифицированной схеме усиливается подпирательное воздействие экрана на поток, что приводит к подъему и выполаживанию кривой депрессии: величины H , ΔH , имеющие значения $H = 0$, $\Delta H = 0,1223$ при выходе экрана на дрену в контрольной точке, принимают значения $H = 0,4447$, $\Delta H = 0,0073$ при $l_0 = 30$ во второй схеме. Вместе с тем существенно деформируется линия раздела: при указанном варьировании положения экрана величина ΔT возрастает в интервале $\Delta T \in (0,1845, 0,6103)$.

Принятая в настоящей работе модель линейного дренажа предложена Н. Е. Жуковским [10] для расчета притока грунтовых вод к осушительным канавам, рекам; в дальнейшем она использовалась в работах С. Н. Нумерова и некоторых других исследователей. При постановке краевых задач, описывающих фильтрацию к линейным стокам, естественно задавать на них напор. Другая схематизация горизонтальных дрен посредством точечных стоков [5] соответствует трубчатым дренам, водозаборам и предусматривает задание в исходной постановке их фильтрационного расхода. Между тем в практике гидромелиорации приходится, как правило, и в этом случае задавать напор на дрене, учет которого в краевой задаче требует некоторых дополнительных расчетов.

При малой ширине дрен, когда их полное затопление достигается даже при незначительной инфильтрации, можно установить связь между шириной $2l$ линейной дрены и диаметром δ трубчатой дрены, фильтрационные расходы Q которых одинаковы при одних и тех же значениях напора на дренах, где $h = 0$, и внешних границах потоков. Из выражений для комплексных потенциалов течений, создаваемых одиночными точечным и линейным стоками при $l = \delta$, следует, что разность μ между значениями напора h в сравниваемых схемах уменьшается с удалением от дрен до величин порядка $\delta \exp(-\pi h/Q)$ при возрастании самих напоров. Поскольку в пределах области течения интервалы такого

возрастания ограничены, величина μ существенно зависит от размеров дрен. Резюмируя сказанное, заключаем, что трубчатая дрена малого диаметра δ эквивалентна линейной дрене шириной 2δ . К такому же заключению пришел С. Ф. Аверьянов (см. [9]) при рассмотрении другой схемы течения с дренажем.

В численных расчетах будем основываться на схеме течения к линейной дрене, полагая $\varepsilon = 0,1$, $\rho = 0,01$, $T_0 = 1,25$, $h_M = 0$. Для каждого значения величины l , варьируемой в интервале $l \in (10^{-5}, 10^{-2})$, вычисляется средняя ордината H_0 точек кривой депрессии. Полученное значение задается вместе с остальными перечисленными входными параметрами при последующем расчете характеристик течения к точечному стоку (см. [3]); одной из них является диаметр δ трубчатой дрены, на контуре которой поддерживается такое же давление $p = 0$, что и на линейной дрене. Вблизи нижней границы указанного интервала значений l равенство $l \approx \delta$ выполняется с погрешностью, соизмеримой с погрешностью вычислений; в сравниваемых схемах практически совпадают и все геометрические параметры каймы. С увеличением l эта погрешность возрастает, и при $l = 0,01$ имеем $\delta = 0,0123$. Величина H_0 на нижней и верхней границах выбранного интервала значений l принимает соответственно значения $H_0 = 0,3944$; $0,1673$. С увеличением размеров дрен сосредоточенное воздействие точечного стока проявляется в несколько большей, чем для эквивалентных линейных дрен, деформации обеих свободных границ. Так, при $l = 0,01$ в схемах линейного и трубчатого дренажа (при одинаковых в обеих схемах значениях H_0 и T_0) соответственно $\Delta H = 0,1215$; $0,1218$ и $\Delta T = 0,4497$; $0,4500$.

Заключение. Выполненный анализ течения в инфильтрационной кайме пресных вод над солеными грунтовыми водами к горизонтальным линейным дренам завершает начатые в [1] исследования в этом направлении. На основе прямой постановки соответствующей краевой задачи раскрывается многообразие ее физического содержания, оценивается влияние каждого определяющего параметра на структуру течения, устанавливается связь между схемами линейного и точечного дренажа. Среди особенностей течения следует отметить слабую зависимость степени деформации линии раздела и минимально допустимой глубины залегания соленых вод от интенсивности инфильтрации и напора на дрене при ее полном затоплении, а также пренебрежимо малое влияние плотности соленых вод на положение кривой депрессии. Последнее обстоятельство позволяет перенести результаты расчетов характеристик течения в верхней части каймы на схему фильтрации в почвенном слое с водоупором без преобразования расчетных формул. Приблизиться к этой схеме в рассматриваемой краевой задаче можно, добившись практически полного выполаживания линии раздела за счет увеличения параметра ρ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Капранов Ю. И. Линза пресной воды, образованная равномерной инфильтрацией // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38, вып. 6. С. 1048–1055.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
3. Капранов Ю. И., Эмих В. Н. Краевая задача о дренаже в инфильтрационной кайме пресных грунтовых вод над солеными // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 4. С. 79–93.
4. Byrd P. F., Friedman M. D. Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists. Berlin etc.: Springer, 1971.
5. Ведерников В. В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М., Л.: Госстройиздат, 1939.
6. Дегтярев Б. М., Калантаев В. А. Вакуумный дренаж на орошаемых землях. М.: Колос, 1978.

7. **Эмих В. Н.** Краевая задача о дренируемой кайме пресных вод и ее приложения // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 3. С. 494–503.
8. **Полубаринова-Кочина П. Я.** О линзе пресной воды над соленой водой // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 3. С. 418–420.
9. **Аверьянов С. Ф.** Рассоляющее действие фильтрации из каналов // Влияние орошения на режим грунтовых вод. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 44–130.
10. **Жуковский Н. Е.** Просачивание воды через плотины // Собр. соч. М.: Гостехтеоретиздат, 1950. Т. 7. С. 297–332.

Поступила в редакцию 27/1 2006 г.
