

ТРАНСПОРТНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНОЙ САМОВОСПЛАМЕНЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

И. А. Заев, И. А. Кириллов

РНЦ «Курчатовский институт», 123182 Москва, zaev@8ka.mipt.ru

Развит подход к описанию формирования и распространения малых газодинамических возмущений в пространственно неоднородной самовоспламеняющейся среде для произвольной кинетики химических реакций. Выведено асимптотическое уравнение, описывающее изменение амплитуды газодинамических возмущений вдоль характеристики, и указаны условия, когда оно применимо. Показано, что волна спонтанного пламени Зельдовича является естественным нулевым приближением к решению уравнений газодинамики. Предложен метод определения точки в пространстве, где происходит формирование ударной волны.

Ключевые слова: детонация, мягкое инициирование, волна спонтанного воспламенения, химическая кинетика, характеристики.

ВВЕДЕНИЕ

Важной для приложений теории горения является задача инициирования детонации. Так, например, для обеспечения безопасности промышленных объектов важно не допустить развития детонации [1], а в новых пульсирующих детонационных двигателях [2] необходимо обеспечить надежное и повторяемое быстрое инициирование детонационной волны. Различают два способа инициирования детонации [3]. Первый — воздействие мощной взрывной волны на реагирующую среду (прямое или сильное инициирование). При этом успешное инициирование определяется энергией, вложенной в первоначальный импульс. Второй способ — мягкое инициирование детонации, главное свойство которого, продемонстрированное Зельдовичем и коллегами [4], — возможность формирования детонационной волны из достаточно малого начального возмущения в специальном образом подготовленной реагирующей среде. Общий вклад энергии при этом много меньше соответствующего значения при сильном инициировании.

Исследованию мягкого инициирования детонации посвящено большое количество как экспериментальных [5–7], так и теоретических работ [4, 8–14]. В цитированных работах было показано, что мягкое инициирование детонации — это сложный процесс, включающий несколько стадий [14]: распространение сверхзвукового замедляющегося фронта горения без

ударных волн, формирование импульса сжатия и его переход в ударную волну, ее усиление и переход к структуре стационарной детонационной волны.

Основной метод исследования в большинстве предшествующих теоретических работ — численное решение полной системы уравнений эйлеровой газовой динамики для простой одностадийной реакции [4, 9, 10, 14] или комбинация асимптотических и численных методов для той же модели реагирующей газовой динамики [11–14].

В теоретических работах [11–14] применялся асимптотический подход к поиску решения упрощенных уравнений газовой динамики, где в качестве малого параметра выступала обратная величина безразмерной энергии активации. Принималось, что газодинамическая часть уравнений линейна (акустическое приближение), а нелинейность связана с химическими реакциями, скорость которых экспоненциально зависит от температуры. При исследовании стадии индукции, когда отклонения от начального состояния воспламеняющейся среды малы (порядка обратной безразмерной энергии активации), было введено понятие индукционного пламени, уточняющее понятие спонтанного пламени Зельдовича [8], и аналитически изучена эволюция системы на масштабе меньше или порядка времени индукции. В качестве нулевого приближения, относительно которого ведется поиск решения, выбиралось начальное заданное состояние с выделен-

ной точкой — точкой с максимальным значением температуры.

Использование указанного малого параметра имеет два ограничения: 1) подход неприменим для систем с малой энергией активации [14]; 2) аналитическое рассмотрение возможно только для времен, меньших или порядка времени индукции в самой горячей точке [14]. Вместе с тем связь химической реакции и газовой динамики особенно сильна на временах порядка и больше времени индукции, когда начинается интенсивное тепловыделение и возмущения температуры и давления приводят к возникновению газодинамических возмущений.

В настоящей работе основное внимание уделено описанию газодинамических возмущений, возникающих при самовоспламенении пространственно неоднородной реагирующей среды в процессе мягкого инициирования детонации, их эволюции и формирования ударной волны. Принимается, что основная нелинейность связана с газодинамическими эффектами (образование ударных волн), вклад возмущений в скорость химических реакций незначителен.

В отличие от предыдущих работ в развиваемом подходе не накладываются ограничения на тип кинетики химических реакций и энергию активации за счет выбора спонтанного пламени Зельдовича в качестве базового (невозмущенного газодинамикой) решения [8], возмущения относительно которого и являются предметом настоящего исследования. Разввиваемый подход позволил вывести асимптотическое транспортное уравнение, описывающее эволюцию газодинамических возмущений в пространственно неоднородной самовоспламеняющейся среде на временах порядка и больше времени индукции.

В работе [15] изучалось влияние экзотермической реакции на амплитуду первоначально заданных газодинамических возмущений и формирование ударных волн в пространственно однородной среде.

В настоящей работе применение подхода [15] распространено на пространственно неоднородную воспламеняющуюся среду. В отличие от классической задачи о формировании ударной волны, когда начальное возмущение в среде задано, транспортное уравнение для амплитуды газодинамического возмущения вдоль правой характеристики выводится для случая, когда газодинамические возмущения возника-

ют при прохождении в среде волны самовоспламенения, так называемого спонтанного пламени Зельдовича. Показано, что в рассматриваемой задаче спонтанное пламя Зельдовича является естественным приближением к решению полной системы уравнений газовой динамики, а его скорость определяет значение малого параметра задачи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ: НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ

В газовой среде с температурой T_a создано локальное начальное возмущение температуры $T_{ini}(x)$ — горячее пятно размером $2L$ (см. рисунок). Температура в центре горячего пятна T_m . Давление p_{ini} одно и то же во всех точках среды. Принимается, что система имеет центральную симметрию относительно самой горячей точки ($x = 0$) и распределение температуры в горячем пятне линейно.

Экзотермическая химическая реакция и вызываемое ею движение среды описываются системой уравнений газовой динамики в эйлеровом приближении:

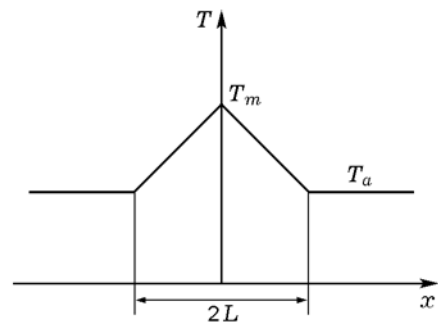
$$\rho_t + (\rho u)_x = 0,$$

$$\frac{dp}{dt} = -c^2 \rho u_x + HR(p, \rho, \mathbf{y}), \quad (1)$$

$$p_t + (c + u)p_x + \rho c(u_t + (c + u)u_x) = HR(p, \rho, \mathbf{y}),$$

$$\mathbf{y}_t + u\mathbf{y}_x = \boldsymbol{\omega}(p, \rho, \mathbf{y}), \quad c = (\gamma p / \rho)^{1/2}.$$

Здесь x — пространственная координата, t — время, c — локальная скорость звука, \mathbf{y} — вектор массовых долей веществ, принимающих участие в химических реакциях, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор



Начальное распределение температуры в реагирующей среде

скоростей изменения массовых долей реагирующих веществ, $HR(p, \rho, \mathbf{y})$ — скорость тепловыделения. Уравнение состояния среды

$$p = \rho RT/M,$$

где T — температура, R — газовая постоянная, M — средняя молекулярная масса реагирующей смеси.

Даже в случае одностадийной химической реакции решение системы уравнений (1) может быть получено только численно. Для поиска аналитических решений или упрощения исходной системы уравнений возможно применение асимптотических методов.

ВОЗМУЩЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНОЙ САМОВОСПЛАМЕНЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ. ТРАНСПОРТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Спонтанное пламя Зельдовича. Малый параметр задачи

Пространственно неоднородное начальное распределение температуры приводит к тому, что интенсивный процесс горения в разных точках среды начинается через различные промежутки времени $t_{ind}(T_{ini}(x))$. Согласно Зельдовичу, этот процесс может рассматриваться как распространение спонтанного пламени — фазовой волны, в которой пренебрегается сжимаемостью и обеспечиваемой ею связью соседних элементов среды. Скорость спонтанного пламени определяется формулой [8]

$$w_{sp} = \text{grad}t_{ind}/|\text{grad}t_{ind}|^2. \quad (2)$$

Скорость волны зависит только от начальных условий, например распределения температуры, концентрации топлива или активных частиц, а не от передачи возмущений от элемента среды к соседним элементам. Так как газодинамическими эффектами пренебрегается, то воспламенение среды рассматривается как последовательность локальных адиабатических взрывов постоянного объема.

Для пространственно однородной самовоспламеняющейся среды скорость w_{sp} бесконечна, а спонтанное пламя Зельдовича является точным решением системы уравнений (1). Если среда неоднородна и существует градиент времени индукции, то скорость w_{sp} конечна.

При конечном, но большом значении w_{sp} спонтанное пламя близко к точному решению системы (1) и выступает в роли нулевого приближения к нему.

Введем безразмерный параметр задачи

$$\varepsilon = c_0/w_{sp} \quad (3)$$

и рассмотрим предельный случай

$$w_{sp} \gg c_0, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (4)$$

т. е. спонтанное пламя распространяется со сверхзвуковой скоростью. Решение системы уравнений (1) может быть найдено в виде

$$z = z_0 + z^{(1)}, \quad (5)$$

где $z = (p, \rho, u, \mathbf{y})$ и $|z^{(1)}| \sim \varepsilon|z_0|$. Переменные с индексом 0 — нулевое приближение к решению системы уравнений газовой динамики (1) — описываются уравнениями спонтанного пламени, в которых пренебрегается сжимаемостью среды (несжимаемый фон). Добавки $z^{(1)}$ — малые возмущения, в которых учитываются сжимаемость и конвективная нелинейность течения.

Параметр задачи (3) естественен для пространственно неоднородной среды, в которой есть градиент времени индукции, а значит, и спонтанное пламя, скорость которого определяется соотношением (2).

Уравнения спонтанного пламени Зельдовича

В соответствии с определением спонтанного пламени описывается системой уравнений

$$u_0 = 0, \quad \rho_{0t} = 0, \quad (6)$$

$$p_{0t} = HR(p_0, \rho_0, \mathbf{y}_0), \quad \mathbf{y}_{0t} = \omega(p_0, \rho_0, \mathbf{y}_0),$$

где $\rho_0 = \rho_0(x)$, $p_0 = p_0(t, x)$, $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_0(t, x)$. Изменение состояния каждого элемента среды не зависит от состояния «соседей» и определяется только локальными значениями плотности, давления, концентраций, а уравнения системы (6) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, в которых пространственная координата — параметр.

Обоснуем представление решения уравнений газовой динамики (1) в виде (5), когда справедливо неравенство (4). Подставив разложение решения (5) в систему уравнений (1) и сгруппировав слагаемые, описывающие волну

спонтанного пламени Зельдовича (заклучены в фигурные скобки), получим

$$\begin{aligned} & \{\rho_{0t}\} + \rho_t^{(1)} + \rho_{0x}u^{(1)} + \rho_0u_x^{(1)} = 0, \\ & \{p_{0t} - HR_0\} + p_t^{(1)} + u^{(1)}(p_{0x} + p_x^{(1)}) = \\ & = c_0^2(-\rho_0 - \rho^{(1)})u_x^{(1)} + \frac{\partial HR}{\partial p}p^{(1)} + \frac{\partial HR}{\partial \rho}\rho^{(1)}, \\ & \{p_{0t} - HR_0\} + p_t^{(1)} + (c_0 + c^{(1)} + u^{(1)})(p_x^{(1)}) + \\ & + \rho_0c_0[u_t^{(1)} + (c_0 + c^{(1)} + u^{(1)})u_x^{(1)}] + \\ & + (c_0 + c^{(1)} + u^{(1)})p_{0x} = \frac{\partial HR}{\partial p}p^{(1)} + \frac{\partial HR}{\partial \rho}\rho^{(1)}, \end{aligned}$$

Разложение (5) справедливо, если все слагаемые вне фигурных скобок намного меньше каждого слагаемого в фигурных скобках. Как видно из выписанных уравнений, «источником» возмущений $z^{(1)}$, которые отсутствуют в начальный момент, является слагаемое

$$(c_0 + c^{(1)} + u^{(1)})p_{0x} \approx c_0p_{0x}.$$

Так как $p_0 = p_0(x, t)$ — функция двух независимых переменных, то

$$p_{0x} = -p_{0t}(t_x)_{p^*} = -HR_0(t_x)_{p^*},$$

где индекс p^* означает дифференцирование при фиксированном значении давления. Так, если следить за движением точки с максимальной скоростью тепловыделения $HR(p^*, x) = HR_{\max}(x)$, то в соответствии с определением времени индукции, используемым, например, в [14], будем иметь

$$(t_x)_{p^*} = \frac{dt_{ind}(x)}{dx} = \frac{1}{w_{sp}(x)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (c_0 + c^{(1)} + u^{(1)})p_{0x} & \approx c_0p_{0x} = \\ & = -HR_0(c_0/w_{sp}) = -\varepsilon HR_0, \end{aligned}$$

и если выполняется неравенство

$$c_0/w_{sp} \ll 1$$

(см. (4)), то каждое из слагаемых вне фигурных скобок мало, и разложение (5) справедливо.

Уравнения газовой динамики для величин первого порядка малости

Так как возмущение концентраций реагирующих веществ вносит вклад более высокого (чем первый) порядка малости, то в дальнейшем оно рассматриваться не будет. Подстановка разложения (5) в систему (1) с учетом уравнений пространственно-временной структуры спонтанного пламени (6) приводит к следующей системе дифференциальных уравнений для возмущений первого порядка малости:

$$\begin{aligned} & \rho_t^{(1)} + \rho_{0x}u^{(1)} + \rho_0u_x^{(1)} = 0, \\ & p_t^{(1)} + u^{(1)}(p_{0x} + p_x^{(1)}) = c_0^2(-\rho_0 - \rho^{(1)})u_x^{(1)} + \\ & + \frac{\partial HR}{\partial p}p^{(1)} + \frac{\partial HR}{\partial \rho}\rho^{(1)}, \quad (7) \\ & p_t^{(1)} + (c_0 + c^{(1)} + u^{(1)})(p_{0x} + p_x^{(1)}) + \\ & + \rho_0c_0[u_t^{(1)} + (c_0 + c^{(1)} + u^{(1)})u_x^{(1)}] = \\ & = \frac{\partial HR}{\partial p}p^{(1)} + \frac{\partial HR}{\partial \rho}\rho^{(1)}, \end{aligned}$$

где

$$c^{(1)} = \frac{\partial c}{\partial p}p^{(1)} + \frac{\partial c}{\partial \rho}\rho^{(1)}. \quad (8)$$

При выводе системы уравнений (7) предполагалось, что возмущение скорости тепловыделения линейно. Производные функции тепловыделения и скорости звука вычисляются для величин нулевого приближения.

Введем новые независимые переменные ξ и τ , определяемые соотношениями

$$d\xi = c_0(t, x)dt - dx, \quad d\tau = dt, \quad (9)$$

и примем, что

$$c_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \gg \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (10)$$

В новых переменных с учетом (10) система (7) переписывается в виде

$$c_0\rho_\xi^{(1)} - \rho_{0\xi}u^{(1)} - \rho_0u_\xi^{(1)} = 0,$$

$$c_0p_\xi^{(1)} = c_0^2\rho_0u_\xi^{(1)} + u^{(1)}p_{0\xi},$$

$$p_\tau^{(1)} - (c^{(1)} + u^{(1)})p_\xi^{(1)} +$$

$$+ \rho_0 c_0 [u_\tau^{(1)} - (c^{(1)} + u^{(1)})u_\xi^{(1)}] - c_0 p_{0\xi} - \\ - (c^{(1)} + u^{(1)})p_{0\xi} = \frac{\partial HR}{\partial p} p^{(1)} + \frac{\partial HR}{\partial \rho} \rho^{(1)}.$$

Выражая $p_\xi^{(1)}$ через $u_\xi^{(1)}$ из второго уравнения этой системы и подставляя в третье уравнение, после приведения подобных слагаемых получаем

$$c_0 \rho_\xi^{(1)} - \rho_{0\xi} u^{(1)} - \rho_0 u_\xi^{(1)} = 0, \\ c_0 p_\xi^{(1)} = c_0^2 \rho_0 u_\xi^{(1)} + u^{(1)} p_{0\xi}, \\ p_\tau^{(1)} - \rho_0 c_0 (c^{(1)} + u^{(1)}) u_\xi^{(1)} + \\ + \rho_0 c_0 [u_\tau^{(1)} - (c^{(1)} + u^{(1)}) u_\xi^{(1)}] - c_0 p_{0\xi} = \\ = \frac{\partial HR}{\partial p} p^{(1)} + \frac{\partial HR}{\partial \rho} \rho^{(1)}. \quad (11)$$

В левой части третьего уравнения из (11) удержаны как слагаемые, относящиеся к нулевому приближению ($c_0 p_{0\xi}$), так и слагаемые, относящиеся к поправке первого порядка малости. Действительно, если в начальный момент времени в среде нет газодинамических возмущений, то $z^{(1)} = 0$, $z_\xi^{(1)} = 0$, а $c_0 p_{0\xi} > 0$ (определяется только начальными условиями) и последнее слагаемое в левой части третьего уравнения (11) намного превосходит остальные, связанные с пространственными производными. Наоборот, при приближении к моменту формирования ударной волны градиент газодинамических возмущений стремится к бесконечности, а величина $c_0 p_{0\xi} > 0$ ограничена (определяется только начальными условиями) и основную роль играет газодинамическая нелинейность. Таким образом, в первый момент времени

$$z_0 z_{0\xi} > z^{(1)} z_\xi^{(1)},$$

и в дальнейшем

$$z_0 z_{0\xi} \sim z^{(1)} z_\xi^{(1)}.$$

Из последнего соотношения следует, что

$$z_{0\xi} z^{(1)} \gg z_0 z_\xi^{(1)}. \quad (12)$$

Транспортное уравнение для газодинамических возмущений за фронтом спонтанного пламени Зельдовича

Введем новую функцию $\varphi = u_\xi^{(1)}$ — амплитуду газодинамического возмущения ($\varphi > 0$ — сжатие, $\varphi < 0$ — разрежение) и новую независимую переменную β в соответствии с определением

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau}\right)_\beta = -(u^{(1)} + c^{(1)}), \quad (13)$$

где $\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)_\beta$ обозначает дифференцирование при постоянном β . Параметр β отличает одну характеристику от другой. Дифференцируя последнее уравнение системы (11) по ξ , подставляя $p_\xi^{(1)}$ из второго уравнения системы (11), пренебрегая слагаемыми вида $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial z_0}{\partial p}\right) p^{(1)}$ в силу (12) и членом u_τ в сравнении с $u_{\xi\tau}$, так как $u_{\xi\tau} \rightarrow \infty$ при приближении к моменту образования ударной волны, получаем

$$(\rho_0 c_0)_\tau \varphi + 2\rho_0 c_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)_\beta - \varphi (u^{(1)} + c^{(1)}) (\rho_0 c_0)_\xi - \\ - 2\rho_0 c_0 \varphi^2 \left(1 + \frac{c_\xi^{(1)}}{u_\xi^{(1)}}\right) + (\rho_0 c_0)_\xi \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \tau}\right)_\beta - \\ - (c_0 p_{0\xi})_\xi = \frac{\partial HR}{\partial p} p_\xi^{(1)} + \frac{\partial HR}{\partial \rho} \rho_\xi^{(1)}. \quad (14)$$

Дифференцирование (8) по ξ дает

$$c_\xi^{(1)} = \frac{\partial c}{\partial p} p_\xi^{(1)} + \frac{\partial c}{\partial \rho} \rho_\xi^{(1)} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial c}{\partial p}\right) p^{(1)} + \\ + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial c}{\partial \rho}\right) \rho^{(1)}. \quad (15)$$

Выражая $p_\xi^{(1)}$ и $\rho_\xi^{(1)}$ через $u_\xi^{(1)}$ из (11) и подставляя в (15), приходим к следующему соотношению:

$$\frac{c_\xi^{(1)}}{u_\xi^{(1)}} \approx \frac{\partial c}{\partial p} \rho_0 c_0 + \frac{\partial c}{\partial \rho} \left(\frac{\rho_0}{c_0} + \rho_0 \xi \frac{u^{(1)}}{c_0 u_\xi^{(1)}}\right) \approx \\ \approx \frac{\partial c}{\partial p} \rho_0 c_0 + \frac{\partial c}{\partial \rho} \frac{\rho_0}{c_0}.$$

Вычисление показывает, для для моделей газов, в которых показатель адиабаты γ можно считать постоянным (например, не зависящим от состава реагирующей смеси),

$$1 + \rho_0 c_0 \frac{\partial c}{\partial p} + \frac{\partial c}{\partial \rho} \frac{\rho_0}{c_0} = \frac{\gamma + 1}{2}.$$

Таким образом, уравнение, описывающее изменение градиента скорости вдоль правой характеристики, принимает окончательный вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)_{\beta} &= \varphi^2 \left(1 + \rho_0 c_0 \frac{\partial c}{\partial p} + \frac{\rho_0}{c_0} \frac{\partial c}{\partial \rho} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \varphi \left[\frac{\partial HR}{\partial p} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial HR}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho_0 c_0} \left(\frac{\partial(\rho_0 c_0)}{\partial \tau} \right)_{\beta} \right] + \\ &+ \frac{(c_0 p_0 \xi)_{\xi}}{2 \rho_0 c_0}, \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)_{\beta} &= \frac{\gamma + 1}{2} \varphi^2 + \frac{1}{2} \varphi \left[\frac{\partial HR}{\partial p} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial HR}{\partial \rho} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\rho_0 c_0} \left(\frac{\partial(\rho_0 c_0)}{\partial \tau} \right)_{\beta} \right] + \frac{1}{2 \rho_0 c_0} (c_0 p_0 \xi)_{\xi}. \quad (16') \end{aligned}$$

В общем случае начальное условие для уравнений (16) или (16') имеет вид

$$\varphi(0, \beta) = \varphi_0.$$

Если $\varphi_0 = 0$ для всех точек среды, то газодинамических возмущений в начальный момент нет.

Правая часть уравнений (16) и (16') представляет сумму трех слагаемых. Первое слагаемое отражает нелинейное конвективное увеличение крутизны профиля возмущений сжатия и отвечает за формирование ударных волн ($\varphi \rightarrow \infty$ за конечное время только при наличии нелинейного слагаемого). Второе (линейное) слагаемое отражает усиление/ослабление возмущений пространственно неоднородным фоном, в котором протекает экзотермическая реакция: 1) при увеличении скорости тепловыделения в волне сжатия, 2) при изменении газодинамического импеданса ρc вдоль пути возмущения [15]. Последнее слагаемое может быть интерпретировано как зарождение возмущений в волне самовоспламенения (см. третье уравнение (11)). Его абсолютное значение мало в зоне

индукции, большое и положительное в зоне тепловыделения.

Расчет показывает, что если градиент времени индукции обусловлен линейным градиентом начальной температуры, то свободный член в уравнениях (16) и (16') имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{(c_0 p_0 \xi)_{\xi}}{2 \rho_0 c_0} &= g_1(x, \tau) + g_2(x, \tau) + g_3(x, \tau), \\ g_1(x, t) &\sim \frac{(c_0/w_{sp})^2}{t_{hr}^2}, \\ g_2(x, t) &\sim \left(\frac{c_0}{w_{sp}} \right)^2 \frac{RT_{ini}/E_a}{t_{ind} t_{hr}}, \\ g_3(x, t) &\sim \frac{(c_0/w_{sp})^2}{t_{ind} t_{hr}}, \end{aligned} \quad (17)$$

где t_{hr} — время тепловыделения. Все три слагаемых имеют второй порядок малости по параметру ε (c_0/w_{sp}). При движении спонтанного пламени в область низких температур скорость w_{sp} экспоненциально падает и, как видно из (17), величина возмущений экспоненциально растет. Основными являются члены $g_1(x, t)$ и $g_3(x, t)$, так как во втором слагаемом $g_2(x, t)$ в качестве множителя присутствует обратная безразмерная энергия активации RT_{ini}/E_a , которая мала для реакций горения.

В расчетах стоит использовать точные выражения для функций $g_1(x, t)$, $g_2(x, t)$ и $g_3(x, t)$, которые учитывают зависимость скорости тепловыделения от координаты и времени и фактическое положение области интенсивного тепловыделения (время t_{hr} на стадии индукции намного больше t_{hr} на стадии тепловыделения).

В линейный член правой части уравнения (16) входит вклад от возмущения скорости тепловыделения

$$\frac{\partial HR}{\partial p} + \frac{\partial HR}{\partial \rho} / c_0^2.$$

Рассмотрим две реалистичные модели кинетики тепловыделения. Пусть скорость тепловыделения описывается аррениусовой зависимостью от температуры:

$$HR = (\gamma - 1) k_0 q y^n \rho^n \exp \left(- \frac{E_a}{RT} \right),$$

где q — тепловой эффект реакции, y — массовая доля реагента в смеси.

Линеаризация скорости тепловыделения возможна, если

$$\frac{\partial HR}{\partial T} T^{(1)} \ll HR,$$

или

$$\frac{T^{(1)}}{T_0} \ll \frac{HR}{\partial HR / \partial T} \frac{1}{T_0} \quad (18)$$

(такое же условие накладывается на возмущение плотности и давления). Как можно показать, линейное слагаемое, которое содержит производные от скорости тепловыделения, играет существенную роль только при приближении к области, где скорость тепловыделения максимальна. Но исходя из условия максимальной скорости тепловыделения

$$\frac{\partial HR}{\partial T} = 0$$

значение $\frac{\partial HR}{\partial T}$ в этой области мало и дробь в правой части (18) намного превосходит 1, а в точке максимального тепловыделения обращается в бесконечность. Следовательно, если верно (4), т. е.

$$\varepsilon = c_0/w_{sp} \ll 1, \quad T^{(1)}/T_0 \sim \varepsilon,$$

то соотношение (18) справедливо там, где линейный член уравнения (16) или (16') становится существенным и линеаризация скорости тепловыделения оправдана.

Пусть скорость тепловыделения имеет вид, характерный для разветвленно-цепной химической реакции. Обычно процесс горения с разветвленно-цепными реакциями на стадии тепловыделения — это реакции рекомбинации, имеющие нулевую энергию активации. Зависимость скорости тепловыделения от температуры (а также от давления и плотности) носит степенной характер, т. е.

$$HR = (\gamma - 1)k_0 q y^n T^m, \quad \frac{HR}{\partial HR / \partial T} \frac{1}{T_0} = \frac{1}{m} \approx 1,$$

где m — порядок скорости тепловыделения по температуре и всегда $m \approx 1$. Таким образом, если верно (4), то линеаризация скорости тепловыделения также допустима.

Итак, выведено транспортное уравнение, описывающее рождение и эволюцию газодинамических возмущений в пространственно неоднородной самовоспламеняющейся среде. Это уравнение будем называть обобщенным транспортным уравнением Римана — Кларка.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ГРАДИЕНТНОЙ КАТАСТРОФЕ

В работе [15] рассматривается пространственно однородная среда, в которой задано начальное газодинамическое возмущение. В отличие от [15], спецификой рассматриваемой задачи описания распространения газодинамических возмущений в реагирующей пространственно неоднородной среде является возможное отсутствие начальных газодинамических возмущений (скорости, давления). Уравнения (16) или (16') описывают изменение градиентов газодинамических величин вдоль правой характеристики уравнений газовой динамики.

Коэффициент линейного члена, а также свободный член есть функции времени τ и пространственной координаты $x = x(\tau, \beta)$, которая определяется из решения уравнения

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)_\beta = c_0 + c^{(1)} + u^{(1)}. \quad (19)$$

Для решения уравнения (19) необходимо знать скорость $u^{(1)}$.

Так как рассматриваются возмущения, малые по сравнению с нулевым приближением (см. (4)), то для исследования решений уравнения (16') значения свободного члена и коэффициента в линейном члене должны вычисляться вдоль звуковой линии (20), близкой к рассматриваемой характеристике, т. е. значение $x(\tau, \beta)$ определяется из решения дифференциального уравнения

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)_\beta = c_0(x, \tau). \quad (20)$$

Тогда решение поставленной задачи определяется в следующей последовательности. Имеется система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} (dx/d\tau)_\beta &= c_0(x, \tau), \\ x(\tau = \tau_0, \beta) &= x_0, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)_\beta = \frac{\gamma + 1}{2} \varphi^2 + \frac{1}{2} \varphi \times \quad (21)$$

$$\times \left[\frac{\partial HR}{\partial p} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial HR}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho_0 c_0} \left(\frac{\partial(\rho_0 c_0)}{\partial \tau} \right)_\beta \right] + \frac{(c_0 p_0 \xi) \xi}{2 \rho_0 c_0},$$

$$\varphi(\tau = \tau_0, \beta) = 0.$$

Для определения момента времени и места образования ударной волны необходимо:

1) выбрать модель для скорости тепловыделения;

2) для выбранной модели тепловыделения определить значения функции $c_0(x, \tau)$;

3) аналитически или численно найти решение первого дифференциального уравнения (21) с соответствующим начальным условием;

4) на заданной характеристике решить второе дифференциальное уравнение (21) с нулевым начальным условием. Определить момент времени $\tilde{\tau}^b$ и точку в пространстве \tilde{x}^b образования ударной волны на каждой характеристике;

5) варьированием начальных условий x_0 и τ_0 определить минимальное из времен $\tilde{\tau}^b$ (обозначим его τ_{cr}) и соответствующую точку в пространстве x_{cr} . Начальные условия обозначим x_{0cr} и τ_{0cr} .

Найденные в соответствии с предложенным алгоритмом значения τ_{cr} и x_{cr} являются решением задачи о формировании ударной волны в пространственно неоднородной самовоспламеняющейся среде.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача о распространении газодинамических возмущений и формировании ударных волн в пространственно неоднородной самовоспламеняющейся среде. Для рассматриваемой системы указан малый параметр — отношение скоростей звука и спонтанного пламени Зельдовича. В предположении, что возмущения скорости тепловыделения линейны для рассматриваемых газодинамических возмущений, разложение решения полной системы уравнений (1) в ряд по малому параметру позволяет вывести обобщенное транспортное уравнение Римана — Кларка. При этом не делается предположений о величине энергии активации реакции и типе кинетики (простая реакция первого порядка, цепная реакция, разветвленно-цепная реакция).

Наличие указанного малого параметра естественно для пространственно неоднородной среды, в которой есть градиент в начальном распределении времени индукции, а значит, и спонтанное пламя, скорость которого определяется согласно (2). Для пространственно однородной самовоспламеняющейся среды $w_{sp} \rightarrow \infty$, $\varepsilon = 0$ и спонтанное пламя Зельдо-

вича является точным решением задачи. При конечном значении w_{sp} и $\varepsilon \ll 1$ показана ключевая роль спонтанного пламени, которое выступает в роли нулевого приближения к решению уравнений газовой динамики.

Система (21) — система обыкновенных дифференциальных уравнений, что является ее преимуществом (особенно, если известно аналитическое решение уравнений спонтанного пламени (6)).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Nettleton M. A.** Gaseous Detonations, Their Nature, Effects and Control. Springer, 1987.
2. **Roy G. D., Frolov S. M., Borisov A. A., Netzer D. W.** Pulse detonation propulsion: challenges, current status, and future perspective // Progress in Energy and Combust. Sci. 2004. V. 30. P. 545–672.
3. **Lee J. H. S.** Initiation of gaseous detonation // Ann. Rev. Phys. Chem. 1977. V. 28. P. 75–104.
4. **Zeldovich Ya. B., Librovich V. B., Makhviladze G. M., Sivashinsky G. I.** Development of detonation in a non-uniformly pre-heated gas // Astronaut. Acta. 1970. V. 15. P. 313–321.
5. **Meyer J. W., Oppenheim A. K.** On the shock-induced ignition of the explosive gases // Proc. of the 13th Symp. (Intern.) on Combustion. Pittsburgh: The Combustion Inst., 1971.
6. **Saytzev S. G., Soloukhin R. I.** Study of combustion of an adiabatically-heated gas mixture // Proc of the 8th Symp. (Intern.) on Combustion. Pittsburgh: The Combustion Inst., 1962.
7. **Lee J. H. S., Knystautas R., Yoshikawa N.** Photochemical initiation of gaseous detonation // Acta Astronaut. 1978. V. 5. P. 971–982.
8. **Zeldovich Ya. B.** Regime classification of an exothermic reaction with nonuniform initial conditions // Combust. Flame. 1980. V. 39. P. 211–214.
9. **Махвиладзе Г. М., Рогатых Д. И.** Начальные неоднородности температуры и концентрации — причина взрывного протекания химической реакции в горячем газе // Хим. физика. 1989. Т. 8, № 2. С. 272–285.
10. **Гельфанд Б. Е., Поленов А. Н., Фролов С. М., Цыганов С. А.** Возникновение детонации в системах с неоднородным распределением температуры и концентрации // Хим. физика. 1986. Т. 5, № 9. С. 1277–1284.
11. **Dold J. W., Kapila A. K., Short M.** Theoretical description of the direct initiation of detonation for one-step chemistry // Dynamic Structure of Detonation in Gaseous and Dispersed Media / A. A. Borisov (Ed.). Kluwer Academic Publ., 1991. P. 109–141.
12. **Short M.** On the critical conditions for the initiation of a detonation in a non-uniformly perturbed reactive fluid // SIAM J. Appl. Math. 1997. V. 57, N 5. P. 1242–1280.

13. **Short M., Dold J. W.** Weak detonations, their paths and transition to strong detonation // *Combust. Theory Modelling*. 2002. V. 6. P. 279–296.
14. **Kapila A. K., Schwendeman D. W., Quirk J. J., Hawa T.** Mechanisms of detonation formation due to a temperature gradient // *Ibid.* P. 553–594.
15. **Clarke J. F.** Small amplitude gasdynamic disturbances in an exploding atmosphere // *J. Fluid Mech.* 1978. V. 89, pt 2. P. 343–355.

Поступила в редакцию 10/IV 2007 г.
