

ЛИТЕРАТУРА

1. Волчков Э. П., Спотарь С. Ю., Терехов В. И. Закрученная пристенная струя в цилиндрическом канале.— Новосибирск, 1982.— (Препринт/ИТФ СО АН СССР; № 84—82).
2. Волчков Э. П., Спотарь С. Ю., Терехов В. И. Турбулентные характеристики ограниченной закрученной струи // Пристенные струйные потоки.— Новосибирск, 1984.
3. Волчков Э. П. Пристенные газовые завесы.— Новосибирск: Наука, 1983.
4. Сакипов З. Б. Теория и методы расчета полуограниченных струй и настильных факелов.— Алма-Ата: Наука, 1978.
5. Волчков Э. П., Дворников Н. А., Терехов В. И. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое закрученного потока.— Новосибирск, 1983.— (Препринт/ИТФ СО АН СССР; № 107—83).
6. Karman T. Uber laminare und turbulente Reilung // ZAMM.— 1921.— Bd1—S. 233.
7. Уормли Д. Аналитическая модель несжимаемого потока в коротких вихревых камерах // Теор. основы инж. расчетов.— 1969.— № 2.
8. Теория турбулентных струй/Г. Н. Абрамович, Г. А. Гиршович, С. Ю. Крашенинников и др.— М.: Наука, 1984.
9. Дворников Н. А., Терехов В. И. О переносе импульса и тепла в турбулентном пограничном слое на криволинейной поверхности // ПМТФ.— 1984.— № 3.
10. Волчков Э. П., Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Взаимодействие турбулентной струи с твердой стенкой // ПМТФ.— 1965.— № 2.
11. Ибрагимов И. И., Устименко Б. П. Исследование аэродинамики закрученной струи, развивающейся вдоль цилиндрической стенки в спутном потоке // Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики.— Алма-Ата: Наука, 1965.— Выш. 2.
12. Дворников Н. А., Спотарь С. Ю. Тепломассообмен в пристенной закрученной струе // Гидрогазодинамика и теплообмен в конденсированных средах.— Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1981.
13. Дворников Н. А. Процесс турбулентного переноса тепла в закрученной пристенной струе // Современные проблемы теплофизики.— Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1984.
14. Seban R. A., Back L. M. Velocity and temperature profiles in a wall jet // Intern. J. Heat and Mass Transfer.— 1961.— V. 3, N 4.
15. Kruka V., Eskinazi S. The wall jet in a moving stream // J. Fluid Mech.— 1964.— V. 20, pt 4.

Поступила 9/VII 1986 г.

УДК 532.529

О РАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПАРОГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ

Н. С. Хабеев

(Москва)

Рассматриваются парогазовые пузырьки, совершающие малые радиальные колебания в жидкости. Динамика парогазовых пузырьков представляет интерес, в частности, при изучении распространения звука в приповерхностном слое океана. Это ситуация, когда описание процесса значительно сложнее, чем в случаях газового или парового пузырька. Затухание звука в жидкости с парогазовыми пузырьками связано, очевидно, со скоростью затухания радиальных пульсаций пузырьков.

В настоящей работе исследовано влияние взаимной диффузии компонентов парогазовой смеси на декремент затухания малых колебаний парогазовых пузырьков. Показано, что добавление ничтожно малого количества инертного газа в паровой пузырек приводит к значительному уменьшению затухания колебаний пузырька. Установлено, что полученные аналитические зависимости хорошо согласуются с экспериментальными данными по затуханию радиальных колебаний газовых и паровых пузырьков в воде. Рассмотрены также линейные радиальные пульсации парогазовых пузырьков в акустическом поле. Получены асимптотические формулы для функции отклика пузырька, справедливые для различных диапазонов частот. Проведено сравнение этих зависимостей с экспериментальными данными для паровоздушных пузырьков в недогретой воде и установлено их хорошее согласие.

1. Основные уравнения. Постановка задачи о сферически-симметричных процессах около парогазовых пузырьков изложена в [1, 2], а их малые колебания детально исследованы в [3—5]. Система уравнений, описывающих линейные радиально-симметричные колебания пузырька, заполненного паром жидкости и нерастворимым в жидкости газом, в пред-

положении однородности давления в пузырьке и с учетом взаимной диффузии компонентов парогазовой смеси приведена в [3].

Уравнения притока тепла, неразрывности и состояния фаз в сферических эйлеровых координатах (r, t) имеют вид

$$(1.1) \quad \rho_V \frac{du_V}{dt} + \rho_g \frac{du_g}{dt} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \rho D \frac{\partial k}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (u_V - u_g),$$

$$\frac{\partial \rho_V}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [\rho_V (v + w_V) r^2] = 0, \quad 0 \leq r < R(t),$$

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [\rho_g (v + w_g) r^2] = 0, \quad \rho_g w_g = -\rho_V w_V = \rho D \frac{\partial k}{\partial r},$$

$$p = p_V + p_g = (\rho_g B_g + \rho_V B_V) T = \rho B T,$$

$$T_V = T_g = T, \quad u_V = c_{V_V} T, \quad u_g = c_{V_g} T, \quad u_l = c_l T, \quad \rho_l = \text{const},$$

$$\rho_l \left(\frac{\partial u_l}{\partial t} + \frac{R^2}{r^2} v_{lR} \frac{\partial u_l}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_l r^2 \frac{\partial T_l}{\partial r} \right), \quad R < r < \infty,$$

где u — удельная внутренняя энергия; T — температура; v — скорость; R — радиус пузырька; D — коэффициент взаимной диффузии; c_p и c_V — удельные теплоемкости смеси при постоянном давлении и объеме; c_l — теплоемкость жидкости; λ — коэффициент теплопроводности; w — диффузионная скорость; v_{lR} — массовая скорость жидкости на поверхности пузырька; B — газовая постоянная; p — давление; ρ — плотность; k — концентрация парового компонента. Нижние индексы V, g, l, R относятся соответственно к параметрам пара, газа, жидкости и к межфазной границе.

Граничные условия на межфазной поверхности $r = R(t)$ в квазиравновесном приближении:

$$(1.2) \quad T_l = T_V = T_S(p_{VR}), \quad \lambda_l \partial T_l / \partial r - \lambda \partial T / \partial r = j_l,$$

$$\rho_V (\dot{R} - v - w_V) = \rho_l (\dot{R} - v_l) = j, \quad \rho_g (\dot{R} - v - w_g) = 0$$

(l — удельная теплота парообразования). Кроме того,

$$(1.3) \quad r = 0: \partial k / \partial r = \partial T / \partial r = 0; \quad r = \infty: T_l = T_0.$$

Уравнение Клапейрона — Клаузиуса при состояниях, далеких от критических, когда $\rho_V \ll \rho_l$, можно записать как

$$(1.4) \quad dp_V / dT = l \rho_V / T.$$

Уравнение малых радиальных колебаний пузырька в несжимаемой жидкости имеет вид

$$(1.5) \quad R v_{lR} = (p - p_\infty - 2\sigma/R) / \rho_l.$$

Здесь p_∞ — давление вдали от пузырька; σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

При выполнении условия гомобаричности существует интеграл уравнения притока тепла для газовой фазы, который для линейных задач имеет вид

$$(1.6) \quad \frac{dp}{dt} = \frac{3}{R} \left[-\Gamma p v_R + \frac{p(B_V - B_g)}{B} D \frac{\partial k}{\partial r} \Big|_R + (\Gamma - 1) \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_R \right]$$

($\Gamma = c_p / c_V$ — показатель адиабаты парогазовой смеси).

В случае малых колебаний радиус пузырька может быть описан действительной частью выражения

$$(1.7) \quad R = R_0 [1 + \delta \exp(ht)],$$

где δ — комплексное число, отвечающее условию $|\delta| \ll 1$; $\omega = \text{Im}\{h\}$ — частота колебаний; нижний индекс 0 отнесен к параметрам в невозмущенном состоянии.

Система (1.1)–(1.6) линеаризуется. Пусть P^0 , Θ^0 , K^0 — малые отклонения давления, температуры и концентрации от состояния равновесия:

$$(1.8) \quad p = p_0[1 + P^0(\tau)], \quad T = T_0[1 + \Theta^0(\xi, \tau)], \quad k = k_0[1 + K^0(\xi, \tau)].$$

Предполагается, что

$$(1.9) \quad P^0 = P \exp(H\tau), \quad \Theta^0 = \Theta(\xi) \exp(H\tau),$$

$$K^0 = K(\xi) \exp(H\tau) \quad (\xi = r/R_0, \quad \tau = tD/R_0^2, \quad H = hR_0^2/D).$$

Систему (1.1)–(1.6) после линеаризации и перехода к безразмерным величинам с учетом соотношений (1.7)–(1.9) и условия $\rho_v \ll \rho_l$ можно переписать в виде

$$(1.10) \quad V_R = \delta H - J/3, \quad V_{lR} = \delta H;$$

$$(1.11) \quad P = HV_{lR}\Pi^{-2} - S\delta;$$

$$(1.12) \quad H\Theta = \text{Le}_0 \nabla^2 \Theta + \left(1 - \frac{1}{\Gamma}\right) HP - k_0 k_3 HK;$$

$$(1.13) \quad HP = 3\Gamma \left[\text{Le}_0 \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \Big|_1 - V_R + k_0 k_2 \frac{\partial K}{\partial \xi} \Big|_1 \right];$$

$$(1.14) \quad HK = \nabla^2 K, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi};$$

$$(1.15) \quad H\Theta_l = \text{Le}_l \nabla^2 \Theta_l;$$

$$(1.16) \quad \frac{\partial \Theta_l}{\partial \xi} \Big|_1 - \frac{\lambda}{\lambda_l} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \Big|_1 = J \frac{\rho_0}{3\rho_l \text{Le}_l k_1};$$

$$(1.17) \quad \frac{\partial K}{\partial \xi} \Big|_1 = J \frac{(1 - k_0)}{3k_0};$$

$$(1.18) \quad \Theta_R = M \left(P + \frac{B_g}{B_0} K \Big|_{\xi=1} \right),$$

$$k_1 = \frac{c_l T_0}{l}, \quad k_2 = \frac{B_v - B_g}{B_0 \Gamma}, \quad k_3 = \frac{B_v - B_g}{c_p}, \quad \kappa = \frac{c_p T_0}{l},$$

$$\text{Le}_0 = \frac{a_0}{D}, \quad \text{Le}_l = \frac{a_l}{D}, \quad a_l = \frac{\lambda_l}{\rho_l c_l}, \quad a_0 = \frac{\lambda_0}{\rho_0 c_p}, \quad S = \frac{2\sigma}{R_0 p_0},$$

$$M = \frac{B_v T_0}{l}, \quad \Pi = \frac{R_0}{D} \sqrt{\frac{p_0}{\rho_l}}, \quad p_0 = p_\infty + \frac{2\sigma}{R_0},$$

$$v = V \frac{D}{R_0} \exp(H\tau), \quad j = J \frac{\rho_0 D}{3R_0} \exp(H\tau).$$

Решения уравнений (1.12), (1.14), (1.15), удовлетворяющие граничным условиям при $r = R_0$ и $r \rightarrow \infty$, а также условию конечности температуры и концентрации в центре пузырька, можно представить в виде

$$\Theta = A \frac{\text{sh}(\xi \sqrt{H_2})}{\xi} + \left(1 - \frac{1}{\Gamma}\right) P + \frac{k_0 k_3 K \Big|_{\xi=1}}{(1 - \text{Le}_0) \xi} \left[\frac{\text{sh}(\xi \sqrt{H_2})}{\text{sh} \sqrt{H_2}} - \frac{\text{sh}(\xi \sqrt{H})}{\text{sh} \sqrt{H}} \right],$$

$$\Theta_l = \Theta_R \frac{\exp[\sqrt{H_1}(1 - \xi)]}{\xi}, \quad K = A_1 J \frac{\text{sh}(\xi \sqrt{H})}{\xi},$$

$$A = \frac{\Theta_R - (1 - 1/\Gamma) P}{\text{sh} \sqrt{H_2}}, \quad \Theta_R = A_3 P, \quad J = A_2 P,$$

$$A_1 = \frac{1 - k_0}{3k_0 B_1 \text{sh} \sqrt{H}}, \quad H_1 = \frac{H}{\text{Le}_l}, \quad H_2 = \frac{H}{\text{Le}_0},$$

$$A_2 = \frac{(1 + \sqrt{H_1}) M \lambda_l / \lambda_0 + B_2 (M - 1 + 1/\Gamma)}{k_3 (1 - k_0) (1 - B_2/B_1)^{1/3} (1 - \text{Le}_0) - A_4}.$$

$$A_3 = M + k_4 A_2, \quad A_4 = \frac{1}{3\kappa \text{Le}_0} + k_4 \left[(1 + \sqrt{H_1}) \frac{\lambda_l}{\lambda_0} + B_2 \right],$$

$$k_4 = \frac{(1 - k_0) M B_0}{3k_0 B_0 B_1}, \quad B_1 = \sqrt{H} \text{cth} \sqrt{H} - 1, \quad B_2 = \sqrt{H_2} \text{cth} \sqrt{H_2} - 1.$$

Условие существования нетривиального решения системы линейных уравнений приводит к трансцендентному характеристическому уравнению относительно H

$$(1.19) \quad H + 3\Gamma \Pi^2 H^{-1} - \Phi + S \Pi^2 (\Phi - H) H^{-2} = 0,$$

$$\Phi = 3\text{Le}_0 B_2 [\Gamma (M - 1) + 1] + \Gamma [1 + k_2 (1 - k_0) +$$

$$+ \text{Le}_0 k_3 (1 - k_0) (B_2/B_1 - 1)/(1 - \text{Le}_0) + \text{Le}_0 B_2 k_4] \left[(1 + \sqrt{H_1}) M \lambda_l / \lambda_0 + \right.$$

$$\left. + B_2 \left(M - 1 + \frac{1}{\Gamma} \right) \right] / \left[k_3 (1 - k_0) \left(1 - \frac{B_2}{B_1} \right) / 3(1 - \text{Le}_0) - A_4 \right].$$

В частном случае парового пузырька ($k_0 = 1$) трансцендентное уравнение (1.19) совпадает с аналогичным, полученным в [6].

2. Асимптотические решения характеристического уравнения. В случае достаточно крупных пузырьков, когда влияние процесса тепломассообмена на их динамику мало, можно пренебречь капиллярными эффектами и решение уравнения (1.19) искать в виде

$$(2.1) \quad H = \sqrt{3\Gamma \Pi} (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \sin \varphi \approx 1, \quad \cos \varphi < 0, \quad |\cos \varphi| \ll 1.$$

В достаточно широком диапазоне изменения параметров системы жидкость — парогазовый пузырек удовлетворяются условия

$$(2.2) \quad \frac{\lambda_l}{\lambda_0} \gg 1, \quad \frac{a_l}{a_0} \ll 1, \quad \text{Le} \sim 1, \quad k_1 \sim 1,$$

$$|B_2| \ll \frac{\lambda_l}{\lambda_0} |1 + \sqrt{H_1}|, \quad \left| k_3 (1 - k_0) \frac{1 - B_2/B_1}{1 - \text{Le}_0} \right| \ll \frac{1}{\kappa \text{Le}_0}.$$

Используя представление (2.1) и оценки (2.2), можно найти асимптотическое решение уравнения (1.19) при $\Pi \gg 1$ [7]. При этом получим выражение для логарифмического декремента затухания колебаний крупных парогазовых пузырьков

$$(2.3) \quad \Lambda_T = -2\pi \cos \varphi = 3\pi \frac{\psi}{\sqrt{\text{Pe}}}, \quad \Pi \gg 1, \quad \sqrt{\text{Pe}} \gg \psi,$$

$$\psi = \Gamma - 1 + k_0 \left[\frac{k_0 B_0}{(\Gamma - 1) B_V \kappa^2} \frac{\lambda_0}{\lambda_l} \sqrt{\frac{a_l}{a_0}} + \frac{(1 - k_0) B_0}{\Gamma B_0} \sqrt{\frac{a_l}{D}} \right]^{-1},$$

$\text{Pe} = 2R_0 \sqrt{3\Gamma \rho_0 / \rho_l} / a_0$ — число Пекле.

В частных случаях ($k_0 = 0$ и $D = 0$) формула (2.3) совпадает с выражением для декремента теплового затухания колебаний газовых пузырьков без фазовых переходов [8], а при $k_0 = 1$ — с соответствующим выражением для паровых пузырьков [9, 10].

Для газового и парового пузырьков формула (2.3) имеет соответственно вид

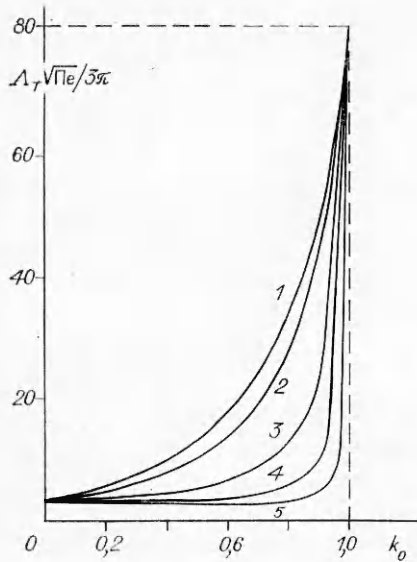
$$(2.4) \quad \Lambda_T = \frac{3\pi (\Gamma - 1)}{\sqrt{\text{Pe}}};$$

$$(2.5) \quad \Lambda_T = \frac{3\pi (\Gamma - 1)}{\sqrt{\text{Pe}}} \left[1 + \kappa^2 \frac{\lambda_l}{\lambda_0} \sqrt{\frac{a_l}{a_0}} \right].$$

Формулу (2.3) можно переписать:

$$(2.6) \quad \Lambda_T = \frac{3\pi f(k_0)}{\sqrt{\text{Pe}}}, \quad \text{Pe} = \frac{2R_0}{a_l |_{k=0}} \sqrt{\frac{P_0}{\rho_l |_{k=0}}},$$

$$f(k_0) = \psi \sqrt{\frac{a_0}{a_l |_{k=0}}} (3\Gamma \rho_l |_{k=0} / \rho_l)^{-1/4}.$$



Р и с. 1

ном давлении. Коэффициент взаимной диффузии компонентов паровоздушной смеси варьировался. Кривая 1 рассчитана по реальному значению D , определяемому формулой [11] $D = D_0(T/273)^n$, где $D_0 = 2,16 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $n = 1,8$. Кривые 2—5 соответствуют $D = 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$. Видно, что зависимость $f(k_0)$ существенно нелинейна. В области k_0 , близких к 1, когда выполнено неравенство $1 - k_0 \ll 1$, можно получить асимптотику формулы (2.3)

$$(3.1) \quad \psi = (\Gamma - 1) \left\{ 1 + \frac{\lambda_l}{\lambda_0} \sqrt{\frac{a_0}{a_l}} \kappa^2 \left[1 - (1 - k_0) \frac{\lambda_l}{\lambda_0} \sqrt{\frac{a_0}{a_l}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\Gamma - 1) \kappa^2 \frac{B_g}{\Gamma B_v} \sqrt{\frac{a_0}{D}} \right] \right\}.$$

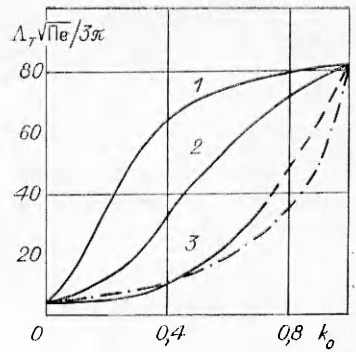
Из рис. 1, а также из формулы (3.1) с учетом оценок (2.2) видно, что добавление в паровой пузырек незначительного количества инертного газа приведет к заметному уменьшению затухания его колебаний. Особенно ярко такой эффект проявляется при малых значениях коэффициента диффузии. Это связано с тем, что с уменьшением D падает скорость фазовых переходов, так как паровой компонент теряет способность быстро проникать через экранирующий слой газа на поверхности пузырька.

Интерес представляет также изучение поведения паровых пузырьков при достаточно больших значениях коэффициента диффузии (формально при $D \rightarrow \infty$). Этот случай не может быть рассмотрен как частный для формулы (2.3), так как при ее выводе использовалось представление $B_1 = \sqrt{H}$, справедливое при больших $H = hR_0^2/D$. При достаточно больших значениях D ($D = \infty$) и, следовательно, малых H для функции B_1 справедливо представление

$$(3.2) \quad B_1 = \sqrt{H} \operatorname{cth} \sqrt{H} - 1 = H/3, \quad |H| \ll 1.$$

Проводя аналогичные выкладки, связанные с вычислением действительной части функции Φ (1.19), с учетом (3.2) получим выражение для декремента затухания парогазового пузырька:

$$(3.3) \quad \Lambda_T = -2\pi \cos \varphi = 3\pi \left[\frac{\Gamma - 1}{\sqrt{\text{Pe}}} + \frac{\sqrt{\text{Pe}}}{(\text{Pe} + 2c_1 \sqrt{\text{Pe}} + c_1^2)} \right], \\ c_1 = 3\kappa \frac{1 - k_0}{k_0} \frac{MB_g}{B_v} \frac{\lambda_l}{\lambda_0} \sqrt{\frac{a_0}{a_l}}.$$



Р и с. 2

Представление (2.6) удобно тем, что Pe не зависит от k_0 и зависимость Λ от k_0 проявляется лишь через функцию $f(k_0)$.

3. Затухание свободных колебаний.

На рис. 1 приведена зависимость $f(k_0) = \Lambda_T \sqrt{\text{Pe}} / 3\pi$ для паровоздушного пузырька в воде при атмосфер-

Как видно, в случае $D = \infty$ выражение для декремента затухания имеет более сложный вид (в частности, более сложную зависимость от радиуса пузырька), чем при реальном значении D (формула (2.3)).

На рис. 2 показана зависимость $\Lambda_T \sqrt{Pe}/3\pi$ от равновесной концентрации пара k_0 для колебаний паровоздушного пузырька в воде при атмосферном давлении. Кривые 1—3 соответствуют значениям радиуса пузырька $R_0 = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ м и рассчитаны по формуле (3.3). Кривая 3 в области $k_0 \geq 0,7$ проведена штрихами, так как колебания столь мелких пузырьков при больших паросодержаниях быстро затухают, при этом нарушаются предположения (2.1), при которых получено решение. Штрихпунктирная линия отвечает реальному значению коэффициента диффузии (кривая 1 на рис. 1). Видно, что для крупных пузырьков упрощающее предположение об отсутствии диффузионного сопротивления или об однородности концентрации в пузырьке приводит к значительному расхождению с решением, полученным для реальных значений коэффициента диффузии. Это упрощение становится справедливым для мелких паровоздушных пузырьков ($R_0 \leq 10^{-4}$ м).

На рис. 3 приведены зависимости логарифмического декремента затухания колебаний газовых и паровых пузырьков при атмосферном давлении от равновесного радиуса R_0 , рассчитанные по (2.4), (2.5). Кривые 1—4 соответствуют следующим системам: паровой пузырек в воде при $T = 373$ К, гелиевый пузырек в воде при $T = 300$ К, воздушный пузырек в воде при $T = 300$ К, паровой пузырек в жидком гелии при $T = 4,2$ К. Из рис. 3 видно, что затухание колебаний парового пузырька в воде за счет фазовых переходов значительно сильнее, чем воздушного. Заметно сильнее по сравнению с воздушным пузырьком и затухание колебаний в воде пузырька, наполненного газом — гелием, что связано с большей теплопроводностью гелия. Интересно, что колебания парового пузырька в жидком гелии, находящемся при температуре кипения, соответствующей атмосферному давлению, несмотря на наличие фазовых превращений, затухают очень слабо (значительно слабее, чем колебания гелиевого пузырька в воде без фазовых переходов (кривая 2)). Это связано с низкими значениями коэффициентов теплопроводности жидкого гелия и его пара, а главное с высокой плотностью пара при низких температурах. В таком случае отношение плотностей фаз $\rho_l/\rho_v \sim 10$, тогда как для кривых 1—3 $\rho_l/\rho_v \sim 10^3$ [11].

При колебаниях крупных пузырей ($R \geq 1$ мм) необходимо еще учитывать составляющую декремента затухания, обусловленную акустическим излучением энергии колеблющегося пузыря в сжимаемой жидкости. Выражение для этой составляющей имеет вид [1]

$$(3.4) \quad \Lambda_a = \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{3\Gamma p_0}{\rho_l}}$$

(a — скорость звука в жидкости). Для мелких пузырьков важен учет составляющей декремента, связанной с вязкостью жидкости [1]:

$$(3.5) \quad \Lambda_\mu = \frac{4\pi\mu}{\rho_l R_0} \sqrt{\frac{\rho_l}{3\Gamma p_0}}$$

(μ — коэффициент вязкости жидкости).

Общий декремент затухания Λ при $\Lambda < 1$ можно определять как сумму отдельных составляющих

$$(3.6) \quad \Lambda = \Lambda_T + \Lambda_a + \Lambda_\mu.$$

На рис. 4 сравниваются теоретические кривые, рассчитанные по формулам (2.4), (2.5), (3.4)—(3.6), с экспериментальными данными [12] по затуханию радиальных колебаний крупных ($R \sim 10$ мм) паровых (темные кружки при 100°C) и воздушных (светлый кружок при 20°C) пузырей в воде (соответственно кривые 1 и 2).

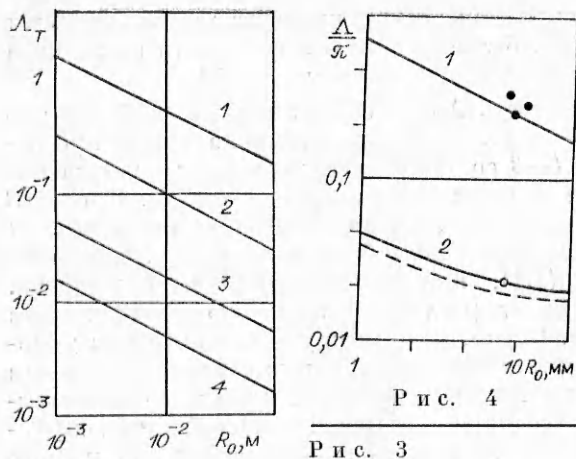


Рис. 3

Автор [12], приводя впервые экспериментальные данные по затуханию колебаний паровых и газовых пузырей и не обращаясь к работам [9, 10], где получена зависимость (2.5), приводит для паровых пузырей штриховую кривую, рассчитанную по формуле (2.4) для теплового затухания колебаний газового пузыря с той лишь разницей, что вместо теплофизических свойств газа (главным образом показателя адиабаты) взяты соответствующие параметры пара.

Так как теплофизические свойства водяного пара при нормальных условиях не очень сильно отличаются от свойств воздуха, то эта кривая оказалась близкой к соответствующей для воздушного пузыря в воде. Неучет фазовых переходов привел при этом к рассогласованию более чем на порядок с экспериментальными данными по затуханию колебаний паровых пузырей.

Как видно из рис. 4, теоретические кривые, рассчитанные по формуле (3.6) с использованием выражений (2.4), (2.5), (3.4), хорошо согласуются с экспериментальными результатами как для воздушных, так и для паровых пузырей в воде.

4. Колебания пузырьков в акустическом поле. В случае малых колебаний пузырьков под действием акустического давления $p_A \exp(i\omega t)$ радиус пузырька может быть описан действительной частью выражения (4.1)

$$R = R_0 [1 + \alpha \exp(i\omega t)], \quad p_A \ll p_\infty,$$

где α — комплексное число, отвечающее условию $|\alpha| \ll 1$; ω — частота акустического поля; p_∞ — гидростатическое давление. Аналогично случаю свободных колебаний предположим, что малые отклонения всех параметров от состояния равновесия можно представить в виде $A = A^0 \exp(i\omega t)$ (A^0 — амплитуда произвольного параметра).

Решая систему линеаризованных уравнений, аналогично случаю свободных колебаний, имеем выражение для амплитуды колебаний [3]

$$(4.2) \quad \alpha = p_A \left(\rho_l \omega^3 R_0^2 + \frac{2\sigma}{R_0} - \frac{4i\omega \eta}{3} - \frac{3\Gamma p_0}{E} \right)^{-1},$$

$$E = 1 - 3\Gamma B_2 (M - 1 + 1/\Gamma) Z_2^{-1} - \Gamma E_1 E_2,$$

$$E_1 = \frac{1 + k_2(1 - k_0)}{Z} + \frac{3B_2 k_4}{Z_2} + \frac{k_3(1 - k_0)}{Z_2(1 - Le_0)} \left(\frac{B_2}{B_1} - 1 \right),$$

$$E_2 = \frac{(1 + \sqrt{i\Omega}) M \lambda_1 / \lambda_0 + B_2 (M - 1 + 1/\Gamma)}{k_3(1 - k_0)(1 - B_2/B_1)/3(1 - Le_0) - B_2 k_4 - 1/3 \kappa Le_0 - k_4(1 + \sqrt{i\Omega}) L},$$

$$\Omega = \frac{\omega R_0^2}{a_l^2}, \quad Z = \frac{i\Omega a_l}{D}, \quad Z_2 = \frac{i\omega a_l}{a_0},$$

$$B_1 = \sqrt{Z} \operatorname{cth} \sqrt{Z} - 1, \quad B_2 = \sqrt{Z_2} \operatorname{cth} \sqrt{Z_2} - 1, \quad L = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}.$$

На рис. 5 сравнивается полученная аналитическая зависимость (4.2) для функции отклика паровоздушного пузырька в воде от безразмерной частоты Ω с экспериментальными данными [13]. Результаты весьма тонких экспериментов по определению сжимаемости паровоздушных пузырьков

ков, совершающих радиальные колебания в звуковом поле, приведены в [13] для малых недогревов. Разброс размеров пузырьков был в пределах $0,02 \text{ см} < R_0 < 0,11 \text{ см}$. Температура системы, находящейся при атмосферном давлении, варьировалась в пределах $370 \text{ К} < T < 373 \text{ К}$, а частота акустического поля — в диапазоне $0,1 \text{ Гц} < f = \omega/2\pi < 150 \text{ Гц}$.

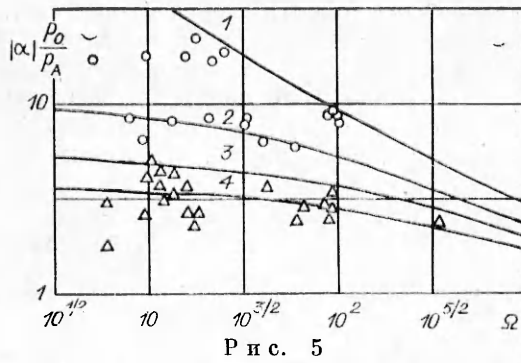


Рис. 5

Предполагая, что в отсутствие акустического поля система жидкость — парогазовый пузырек находится в тепловом и механическом равновесии, можно связать степень недогрева системы с содержанием газа в пузырьке. Из уравнений состояния калорически совершенного газа (1.1), предполагая, что парциальное давление парового компонента соответствует условию насыщения, получим $p_S(T_0)/(p_0 - p_S(T_0)) = k_0 \mu_g / ((1 - k_0) \mu_V)$, где μ_g, μ_V — молекулярные массы газового и парового компонентов. Отсюда $k_0 = \left[1 + \frac{\mu_g}{\mu_V} \left(\frac{p_0}{p_S(T_0)} - 1 \right) \right]^{-1}$. Для паровоздушного пузырька в воде при атмосферном давлении значениям температуры 372, 371, 370 К отвечает $k_g = 1 - k_0 = 0,05; 0,1; 0,15$. Этим значениям соответствуют кривые 2—4 на рис. 5, а 1 рассчитана для парового пузырька ($T = 373 \text{ К}$), экспериментальные точки \circ — $372 \text{ К} < T < 373 \text{ К}$; Δ — $370 \text{ К} < T < 371 \text{ К}$.

Применительно к условиям экспериментов [13] выражение для сжимаемости пузырька (4.2) упрощается:

$$(4.3) \quad \alpha \frac{p_\infty}{p_A} = - \frac{(1 + \sqrt{i\Omega})}{i\Omega} M \frac{\lambda_l}{\lambda_c} \frac{a_0}{a_l} \left[\frac{1}{\kappa} + \frac{(1 - k_0) M \mu_V \text{Le}_0 \lambda_l}{k_0 B_1 \mu_g \lambda_V} (1 + \sqrt{i\Omega}) \right]^{-1}.$$

Для парового пузырька выражение (4.3) еще более упрощается:

$$\alpha \frac{p_\infty}{p_A} = - \frac{(1 + \sqrt{i\Omega}) \kappa M \lambda_l a_V}{i\Omega \lambda_V a_l}.$$

Для интервала $10 < \Omega < 10^2$, в котором получена основная масса экспериментальных данных [13], выражение (4.3) упрощается, так как для функции B_1 справедливо при этом представление $B_1 = i\Omega a_l / 3D$. Тогда окончательное выражение для функции отклика имеет вид

$$|\alpha| \frac{p_\infty}{p_A} = \frac{x}{\sqrt{\Omega(V^2 + 2Vy + 2y^2)}}, \quad x = \frac{M \lambda_l a_V}{3 \lambda_V a_l}, \quad V = \frac{1}{3\kappa}, \quad y = 3x \frac{\mu_V (1 - k_0)}{\mu_g \sqrt{2\Omega}}.$$

При $\Omega \ll 1$ для функции отклика парогазового пузырька справедливы формулы, впервые найденные в [3]:

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} |\alpha| \frac{p_\infty}{p_A} = \left[\frac{3(1 + S_1)}{1 + \mu_g k_0 / \mu_V (1 - k_0)} - S_1 \right]^{-1}, \quad S_1 = \frac{2\sigma}{R_0 p_{c0}}.$$

Из рис. 5 видно, что добавление ничтожно малого количества воздуха ($k_g = 0,05$) в паровой пузырек приводит к заметному (почти на порядок) уменьшению сжимаемости пузырька, колеблющегося на низких частотах. Расчетные кривые хорошо согласуются с экспериментальными данными. Для использованных в экспериментах [13] размеров пузырьков капиллярные эффекты были малы ($S \ll 1$). Поэтому зависимость функции отклика от радиуса пузырька выражается лишь через безразмерную частоту $\Omega = \omega R_0^2 a_l^{-1}$.

В связи с тем что эксперименты [13] проведены для мелких пузырьков и низких частот звукового поля, их анализ можно проводить и на

основе более простых моделей, не учитывающих неоднородности распределения температуры и концентрации в пульсирующем пузырьке, что соответствует проведенным выше упрощениям общей формулы (4.2). Однако возможны ситуации, когда неучет этих факторов и использование упрощенных моделей могут привести к значительным ошибкам.

Автор благодарит Р. И. Нигматулину за полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1984.— Т. 2.
2. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред.— М.: Наука, 1978.
3. Нагиев Ф. Б., Хабеев Н. С. Эффекты теплообмена и фазовых переходов при колебаниях парогазовых пузырьков // Акуст. журн.— 1979.— Т. 25, № 2.
4. Fanelli M., Prosperetti A., Reali M. Radial oscillations of gas-vapor bubbles in liquids. Part 1: Mathematical formulation // *Acustica*.— 1981.— V. 47.— P. 253.
5. Fanelli M., Prosperetti A., Reali M. Radial oscillations of gas-vapor bubbles in liquids. Part 2: Numerical examples // *Acustica*.— 1981.— V. 49.— P. 98.
6. Хабеев Н. С. Эффекты теплообмена и фазовых переходов при колебаниях паровых пузырьков // Акуст. журн.— 1975.— Т. 21, № 5.
7. Хабеев Н. С., Шаганов В. Ш. Колебания парогазового пузырька в акустическом поле // Изв. АН СССР. МЖТ.— 1986.— № 3.
8. Devin C. Yr. Survey of thermal, radiation, and viscous damping of pulsating air bubbles in water // *J. Acoust. Soc. Amer.*— 1959.— V. 31, N 12.
9. Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С. Декременты затухания колебаний и эффективные коэффициенты теплообмена пузырьков, радиально пульсирующих в жидкости // Изв. АН СССР. МЖТ.— 1980.— № 6.
10. Nigmatulin R. I., Khabeev N. S., Nagiev F. B. Dynamics, heat and mass transfer of vapor-gas bubbles in a liquid // *Intern. J. Heat Mass Transfer*.— 1981.— V. 24, N 6.
11. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей.— М.: Наука, 1972.
12. Morioka M. Measurement of natural frequency and damping constant of single steam bubble oscillating in water // *J. Nucl. Sci. Techn.*— 1983.— V. 20, N 10.
13. Hsu Y. Y., Watts R. G. Behavior of a vapor bubble in a pulsating pressure field // *Proc. 4th Intern. Conf. Heat Transfer, Paris — Versailles, 1970.*— V. 5.— Ser. B 2.4.

Поступила 2/IX 1986 г.

УДК 532.516

ОБТЕКАНИЕ СФЕРЫ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Ю. М. Петин

(Новосибирск)

До настоящего времени не найдены методы решения уравнений Навье — Стокса в их общем виде, что необходимо не только для исследований таких частных случаев, как течения со средними значениями чисел Рейнольдса, но и для получения общих закономерностей в теории вязких течений.

Не существует принципиальных ограничений на возможность итерационного распространения решений, полученных для ползущих течений на область более высоких чисел Рейнольдса. Однако до сих пор эта возможность не реализована, хотя такая попытка делалась для всех видов ползущих течений, для которых получены решения. Причина такой неудачи вызвана не столько сложностью и трудоемкостью вычислений последующих приближений, сколько тем, что большинство решений, полученных для ползущих течений, не являются равнопригодными во всей области обтекания.

Действительно, сравнительная оценка на основе решения Стокса полностью отброшенных инерционных членов уравнений Навье — Стокса показывает, что инерционные члены в $Re\ r$ раз больше вязких, а значит, линеаризация Стокса правомочна и решение Стокса верно только для области, когда $Re\ r < 1$, т. е. для течений вблизи поверхности сферы [1]. Для течения вдали от поверхности ($r \rightarrow \infty$) произведение $Re\ r$ может стать сколь угодно большим, несмотря на любую малость Re , в этой области инерционные члены больше вязких и, следовательно, линеаризованные путем полного отбрасывания членов уравнения Навье — Стокса неприменимы для описания течений вдали от сферы. Факт удовлетворения граничных условий на бесконечности в решении Стокса вызван благоприятными особенностями, присущими задаче об обтекании сферы. Это подтверждается тем, что для цилиндра получить решение Стокса, удовлетворяющее граничным условиям на бесконечности, уже не представляется воз-