ПМТФ, № 5, 1963

О ТРЕЩИНАХ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ МЕЖДУ ПЛОСКИМИ ПЛАСТИНКАМИ ПО ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕ СКЛЕЙКИ

Р. В. Гольдштейн, Р. Л. Салганик

(*Москва*)

Распространение трещин по месту склейки между двумя упругими материалами отличается рядом особенностей от хорошо изученного (см. обзор [1]) распространения трещин в однородных материалах.

При квазистатическом продвижении конца трещины в однородном материале имеет место локальная симметрия, т. е. вблизи этого конца действуют только нормальные напряжения, симметрично распределенные относительно направления распространения. Кроме того, форма трещины и распределение сил сцепления в концевой области квазистатически продвигающегося конца не зависят от приложенных нагрузок (гипотеза автономности концевой области).

Трещина, распространяющаяся по границе склейки между двумя упругими материалами, только в исключительных случаях обладает этими свойствами. В общем случае ее поведение иное. В концевой области такой трещины из-за выпучивания берегов, вследствие неодинаковости свойств склеенных тел, происходит налегание одного берега на другой. В местах налегания появляются силы реакции, влияющие на продвижение концов трещины. Локальная симметрия в общем случае также отсутствует. На продолжении трещины вблизи ее конца возникают как касательные, так и нормальные напряжения.

Тем не менее, если места налегания противоположных берегов сосредоточены только вблизи концов трещины, то гипотезу автономности удается обобщить [2]. Обобщенная гипотеза автономности оказывается равносильной предположению о постоянстве работы, которую производят распределенные в малой концевой области силы взаимодействия противоположных берегов трещины при образовании единицы длины трещины.

Для экспериментальной проверки допустимости такого предположения нужно получить из него ряд следствий. В связи с этим в предлагаемой работе рассматриваются две задачи о распространении трещин вдоль прямолинейной границы склейки: первая задача о трещине, растягиваемой заданными нормальными напряжениями, вторая — о расклинивании вдоль границы жестким гладким полубесконечным клином постоянной толщины.

§ 1. Прямолинейная трещина, растягиваемая нормальными напряжениями в условиях плоской деформации. Рассмотрим типичную задачу теории трещин. В бесконечном теле вдоль оси x от $x = 0$ до $x = l$ расположена трещина. На бесконечности к телу приложены сжимающие напряжения $\sigma_y = -p$ $(p > 0)$. Трещина растягивается посредине сосредоточенными силами, равными по абсолютной величине P и направленными по перпендикуляру к трещине. Как всегда, нужно сначала решить задачу, предположив, что трещина и приложенные к ее поверхности нагрузки отсутствуют. Затем нужно решить задачу о трещине, нагруженной по поверхности приложенными к ней силами и напряжениями, равными и противоположными тем, которые получились в первой задаче в месте нахождения трещины. При этом считается, что другие нагрузки отсутствуют. Сумма решений обеих задач, в силу линейности, будет решением исходной задачи.

Если материалы по обе стороны оси x одинаковы, то решением первой задачи в напряжениях будет

$$\sigma_y = -p, \qquad \sigma_x = 0, \qquad \tau_{xy} = 0 \tag{1.1}$$

Если же эти материалы не одинаковы, то, предполагая, что склейка не нарушена и что деформациями тонкого слоя клея можно пренебречь, получим другое решение. Это решение, очевидно, не зависит от x и в напряжениях имеет вид

$$\begin{array}{llll} \sigma_y = -p, & \sigma_x = -\dfrac{\nu_1}{1-\nu_1}p, & \tau_{xy} = 0, & y > 0 \\ \sigma_y = -p, & \sigma_x = -\dfrac{\nu_2}{1-\nu_2}p, & \tau_{xy} = 0, & y < 0 \end{array} \qquad (1.2)$$

где ν — коэффициент Пуассона. Здесь и в дальнейшем индексами 1 и 2 будут отмечаться величины, относящиеся соответственно к верхнему и нижнему полупространствам. Из (1.2) вытекает, что наличие сжимающих напряжений, перпендикулярных к границе, приводит к возникновению продольного сжатия, причем соответствующие сжимающие напряжения в обеих склеенных частях различны.

В отличие от предыдущего случая напряженное состояние, описываемое формулами (1.2), неоднородно. Это связано с тем, что формулы (1.2) представляют собой решение задачи о полосе, склеенной вдоль оси x из двух разных полос и сжатой равномерно распределенными но ее краям напряжениями. Решение (1.2) от ширины полосы не зависит и поэтому можно ширину полосы считать бесконечной.

Переходя к решению второй задачи о трещине, нагруженной по поверхности, воспользуемся при $y > 0$ формулами Н. И. Мусхелишвили [3]

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z), \qquad \sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar z) + (z - \bar z)\overline{\Phi'(z)}$$

$$2\mu_1\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \varkappa_1\Phi(z) - \Omega(\bar z) - (z - \bar z)\overline{\Phi'(z)} \qquad (1.3)$$

где μ — модуль сдвига, $\varkappa = 3 - 4\nu$, $z = x + iy$. В рассматриваемом случае функции Φ и Ω в этих формулах имеют вид [4]

$$\Phi(z) = \frac{1}{m}\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i Z(z)}\int_0^l \frac{\varphi(t) Z(t + i0)}{t - z}\,dt$$

$$Z(z) = z^{1/2 - i\beta}(z - l)^{1/2 + i\beta}, \qquad \beta = \frac{1}{2\pi}\ln m, \qquad m = \frac{\mu_1 + \mu_2\varkappa_1}{\mu_2 + \mu_1\varkappa_2} \qquad (1.4)$$

Здесь

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})_{z = x + i0} = (\sigma_y - i\tau_{xy})_{z = x - i0} = \varphi(x), \qquad \lim_{z\to\infty}(Z(z)/z) = 1$$

Величину β будем считать неотрицательной. Это всегда можно сделать, соответствующим образом занумеровав склеенные тела.

Поверхность трещины нагружена нормальными напряжениями от сосредоточенных сил и напряжениями от действия упругого поля (1.2). Это дает

$$\varphi(x) = p - P\delta(x - {}^1/_2\, l) \qquad (0 < x < l) \qquad (1.5)$$

Вследствие симметрии задачи относительно линии действия сосредоточенных сил, концы трещины всегда располагаются на одинаковых расстояниях от этой линии. Поэтому о распространении трещины можно судить, например, по поведению левого конца $x = 0$ и рассматривать значения $x < ({}^1/_2\, l)$. Поведение левого конца трещины целиком определяется упругим полем в малой его окрестности. Из приведенного решения находим, что на продолжении трещины в этой окрестности ($z = x = -s$, $s \to +0$)

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = -\frac{1}{\sqrt{s}}\left\{\left(\frac{s}{l+s}\right)^{i\beta}(A_0 + iB_0) + o(1)\right\} \qquad (1.6)$$

Раскрытие трещины $[u + iv]$, равное разности смещений ее верхнего и нижнего берегов в соответствующих точках, с точностью до малых более высокого порядка определяется при $x \to +0$ выражением

$$[u + iv] = M\sqrt{x}\left(\frac{x}{l-x}\right)^{i\beta}\{(B_0 - 2\beta A_0) - i(A_0 + 2\beta B_0)\} \qquad (1.7)$$

Здесь M — некоторая положительная величина, зависящая от упругих постоянных. Величины A_0 и B_0 выражаются через приложенные нагрузки следующим образом

$$A_0 = -\frac{1}{2\pi\sqrt{l}}\frac{1+m}{\sqrt{m}}P + \frac{\sqrt{l}\,p}{2}, \qquad B_0 = \beta p\sqrt{l} \qquad (1.8)$$

Из (1.7) видно, что при приближении к концу трещины верхний берег должен был бы бесконечно часто пересекаться с нижним, оказываясь расположенным под ним. На самом деле этого не происходит. Противоположные берега трещины налегают один на другой. В местах налегания появляются силы реакции, которые нужно добавить к уже учтенным силам, действующим на поверхности трещины. К этим силам нужно добавить также силы сцепления противоположных берегов трещины, которые действуют вблизи концов трещины. В результате, в формулы (1.6), (1.7) вместо A_0, B_0 нужно подставить $A_0 + A'$ и $B_0 + B'$, где величины A', B' учитывают действие сил реакции и сил сцепления.

Если данный конец трещины находится в равновесии, то должно быть

$$A_0 + A' = 0, \qquad B_0 + B' = 0 \qquad (1.9)$$

При этом в конце трещины берега плавно смыкаются, а напряжения на продолжении трещины становятся конечными. Условие (1.9), известное для трещин в однородных материалах как гипотеза С. А. Христиановича [5], было впоследствии доказано при помощи вариационных принципов [6, 7]. Тем же способом его можно доказать и для трещин, распространяющихся по границе склейки [2].

Размер области действия сил реакции может быть разным в зависимости от соотношения между нагрузками p и P. Если растягивающая сила P достаточно велика, то места налегания будут появляться только в малой концевой области. В самом деле, колебательный характер зависимости (1.7) исчезает при $x > x_*$, где

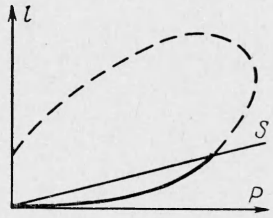
$$x_* = le^{-\pi/2\beta}(1 + e^{-\pi/2\beta})^{-1} \qquad (1.10)$$

Легко показать, что $\beta < (\ln \varkappa_1)/2\pi$. Так как коэффициент Пуассона ν всегда неотрицателен, то для всех материалов $x_* < 10^{-4}l$. Производная по x от величины $[v]$, вычисленной без учета сил реакции и сил сцепления, в точке $x = x_*$ равна $-M(A_0 + 2\beta B_0)$. Если эта производная положительна, то правее $x = x_*$ верхний берег расположен над нижним. Из характера распределения приложенных нагрузок ясно, что от этого места и дальше до середины трещины верхний берег будет оставаться над нижним. Условие положительности производной с учетом выражений (1.8) для A_0, B_0 сводится к неравенству

$$P > P_*(l) \equiv \frac{p\pi\sqrt{ml}}{1+m}(1 + 4\beta^2) \qquad (1.11)$$

Таким образом, при выполнении неравенства (1.11) силы реакции и силы сцепления заведомо действуют в малой концевой области. Эта область остается малой также и в случае, когда $P_*(l)$ несколько превышает P. Когда же $P_*(l)$ сильно превышает P, то размер области действия сил реакции перестает быть малым сравнительно с длиной трещины.

Необходимым условием применения обобщенной гипотезы автономности является малость концевой области. Предположим, что это условие выполнено. Как уже было отмечено, обобщенная гипотеза автономности сводится к требованию постоянства работы T, производимой силами взаимодействия противоположных берегов трещины при образовании единицы длины трещины во время квазистатического продвижения ее конца. Величина T выражается через A', B' по формуле [2]



$$T = \frac{\pi}{2}\frac{(\mu_1+\mu_2\varkappa_1)(\mu_2+\mu_1\varkappa_2)}{\mu_1\mu_2[\mu_2(\varkappa_1+1)+\mu_1(\varkappa_2+1)]}(A'^2+B'^2) \tag{1.12}$$

Отсюда, из условий равновесия (1.9) и формул (1.8) получаем следующее выражение для длины l подвижно-равновесной трещины

$$l = \frac{1+m}{\pi\sqrt{m}\,(1+4\beta^2)}\left\{\frac{P}{p}+\frac{4T}{np^2}\pm 2\sqrt{\frac{4T^2}{n^2p^4}+\frac{2PT}{np^3}-\beta^2\frac{P^2}{p^2}}\right\}$$

$$\left(n=\sqrt{(\mu_1+\mu_2\varkappa_1)(\mu_2+\mu_1\varkappa_2)}\,/\,\mu_1\mu_2\right)$$

На фиг. 1 приведен график зависимости длины l подвижно-равновесной трещины от величины сосредоточенной силы P, растягивающей трещину. Этот график представляет собой петлю, расположенную в первой четверти плоскости Pl. На фиг. 1 также изображена прямая $S\{P=P_*(l)\}$. Под этой прямой и вблизи нее над ней лежат точки, которым соответствует малая концевая область и для которых, следовательно, допустимо применение обобщенной гипотезы автономности.

Согласно этой гипотезе при возрастании нагрузки P длина трещины l остается неизменной до тех пор, пока величина P не достигнет значения, соответствующего данной длине l по кривой $l(P)$. Если длина l достаточно мала, то после достижения нагрузкой P указанного значения, начнется квазистатическое увеличение длины трещины по кривой $l(P)$. В рамках обобщенной гипотезы автономности за этим увеличением можно проследить только до значений l, несколько превышающих длину l_1, которая соответствует точке пересечения прямой S с кривой $l(P)$. Легко показать, что в области таких значений l зависимость $l(P)$ однозначна.

Для бо́льших значений l пользоваться обобщенной гипотезой автономности нельзя из-за того, что концевая область трещины перестает быть малой сравнительно с длиной трещины. Однако можно предполагать, что для достаточно больших значений длины начальной трещины квазистатическое развитие при увеличении P не может продолжаться неограниченно. К такому предположению можно прийти следующим образом.

При уменьшении растягивающей силы P трещина смыкается. В однородном материале это не привело бы к продвижению ее концов в глубь тела. Если же материалы, между которыми расположена трещина, различны, то вблизи концов трещины площадки контакта будут чередоваться с местами, где трещина раскрыта. В результате на продолжении трещины возникнет концентрация напряжений и вследствие этого концы будут продвигаться в глубь тела. Увеличение длины трещины при сдавливании является характерной особенностью хрупкого разрушения склеенных тел. Если теперь начать увеличивать растягивающую силу P, то это приведет к снижению концентрации напряжений и концы трещины остановятся. Они, по-видимому, будут оставаться неподвижными до тех пор, пока основная часть трещины не освободится от площадок контакта и эти площадки не сосредоточатся вблизи концов (полное исчезновение площадок контакта, как уже было показано, в общем случае невозможно). На фиг. 1 такому процессу соответствует перемещение изображающей точки по горизонтали над прямой S вплоть до этой прямой. При дальнейшем увеличении нагрузки P тело должно разрушиться, так как, по предположению, начальная длина трещины значительно превосходит величину l_1, а из обобщенной гипотезы автономности в этом случае вытекает, что равновесной трещины не существует.

При безграничном увеличении сжимающей нагрузки p характерная длина l_1 стремится к нулю. Вместе с ней уменьшается минимальная длина равновесной трещины. Это явление аналогично тому, которое имеет место для трещины в однородном материале, растягиваемом на бесконечности нормальными к трещине напряжениями. Максимальная равновесная длина такой трещины стремится к нулю при безграничном возрастании растягивающей нагрузки (см., например, [1]). Однако интересная, уже отмеченная выше, особенность рассматриваемого случая заключается в том, что это явление наступает при сжатии, а не при растяжении.

Если сжимающие напряжения p уменьшаются, то область под прямой S увеличивается и в пределе при $p \to 0$ занимает всю первую четверть. Точка пересечения кривой $l(P)$ с прямой S при этом уходит в бесконечность. Таким образом, когда на трещину действуют только растягивающие нагрузки, то концевая область всегда получается малой, что является необходимым условием применимости обобщенной гипотезы автономности. Применив эту гипотезу, получим для случая $p = 0$ результат, качественно не отличающийся от соответствующего результата для трещины в однородном теле.

Заметим также, что если различие в свойствах склеенных тел исчезает, то петля на фиг. 1 превращается в разомкнутую уходящую в бесконечность кривую, а прямая S занимает некоторое предельное положение. Над этой прямой, как и прежде, лежат точки, соответствующие случаю взаимного налегания противоположных берегов трещины. Но теперь напряжения на продолжении трещины конечны и трещина остается неподвижной при любых изменениях P в интервале $0 < P < P_*(l)$. При $P > P_*(l)$ распространение трещины происходит так, как уже было описано для малых длин l в случае, когда склеенные материалы неодинаковы. Отличие лишь в том, что теперь участок подвижно-равновесного развития не ограничен. При очень больших значениях сдавливающего напряжения p влияние удельной поверхностной энергии T становится не существенным и в пределе кривая $l(P)$ переходит в прямую $P = P_*(l)$. Именно таким образом, без учета сил сцепления, рассматриваются задачи о трещинах в однородных горных породах (см. обзор [1]), где большие сжимающие напряжения получаются от давления вышележащей толщи пород.

Если трещина распространяется не в однородном пласте, а по границе раздела между двумя однородными пластами с различными упругими свойствами, то при больших значениях сжимающих усилий учет удельной поверхностной энергии становится несущественным в некотором промежуточном интервале квазистатического развития трещины. Этот промежуточный интервал тем шире, чем меньше различие между свойствами пластов и в пределе, когда различие исчезает, он становится неограниченным сверху.

В разобранной в этом параграфе задаче концевая область оказывалась малой только при определенном соотношении между нагрузками. Другой случай, когда концевая область всегда мала, представляет собой задача о расклинивании.

§ 2. Расклинивание вдоль границы склейки клином постоянной толщины. Предположим, что вдоль границы склейки (оси x) вдвинут жесткий, гладкий полубесконечный клин постоянной толщины $2h$, так что конец образовавшейся перед ним свободной трещины длины l находится в начале координат. Сам клин расположен в интервале $l \leqslant x \leqslant \infty$. Предположим также, что к системе клин — тело никаких внешних сил не приложено. Толщину клина $2h$ будем считать малой сравнительно с длиной свободной трещины. Тогда задачу можно решать в линейной постановке аналогично тому, как такая задача решается для однородного тела [8]. При этом граничные условия сносятся на ось x. Предположение о гладкости клина означает, что на его щеках трение отсутствует, т. е. касательные напряжения равны нулю. Так как толщина клина постоянна, то вдоль него остается неизменным поперечное смещение v. Поверхность трещины считается не нагруженной. Таким образом, имеем

$$\tau_{xy} = 0, \qquad \sigma_y = 0 \qquad (0 < x < l, \quad y = \pm 0)$$
$$(\partial v / \partial x) = 0, \qquad \tau_{xy} = 0 \qquad (l < x < \infty, \ y = \pm 0)$$

Решение задачи о расклинивании при $y > 0$ дается формулами Мусхелишвили (1.2). На основании результатов работы [4] можно показать, что

$$\Omega = m\Phi \tag{2.1}$$

где Φ — функция, аналитическая во всей плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, кроме, может быть, полуоси $x > 0$. Эта функция при $z \to \infty$ обращается в нуль, а на полуоси $x > 0$ удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\Phi(x + i0) + m\Phi(x - i0) = 0, \quad \operatorname{Im}\Phi(x \pm i0) = 0 \tag{2.2}$$
$$(0 < x < l) \qquad\qquad (l < x < \infty)$$

Вводя функцию $\overline{\Phi}(z) \equiv \overline{\Phi(\bar z)}$, задачу (2.2) можно свести к задаче сопряжения для системы двух функций [9]. В данном случае задача для системы при помощи несложных преобразований сводится к задаче Римана для одной функции [9-11]. В результате решения этой задачи получается, что

$$\Phi = \frac{C}{\sqrt{z(z-l)}} \exp\left\{ i\beta \ln \frac{\sqrt{z-l} - i\sqrt{l}}{\sqrt{z-l} + i\sqrt{l}} \right\} \tag{2.3}$$

Здесь при $z = x < 0$

$$\sqrt{z - l} = i\,{}_{+}\sqrt{l - x}, \qquad \sqrt{z(z-l)} = {}_{+}\sqrt{x(x-l)} \tag{2.4}$$

и мнимая часть логарифма равна нулю.

Постоянная C в выражении (2.3) определяется из условия, чтобы раскрытие трещины $[v]$ при изменении x от 0 до l изменялось от нуля до $2h$. Эта постоянная равна

$$C = -\frac{4h}{\pi\beta}\operatorname{ch}\pi\beta \tag{2.5}$$

Исследуя, как и в предыдущем параграфе, упругое поле вблизи конца трещины, можно показать, что размер области действия сил реакции всегда мал по сравнению с длиной трещины l. Применение обобщенной гипотезы автономности приводит к следующему выражению для длины l подвижно-равновесной трещины

$$l = \frac{8h^2\mu_1\mu_2 \operatorname{ch}^2 \pi\beta}{\pi T\,[\mu_2(\varkappa_1+1)+\mu_1(\varkappa_2+1)]} \tag{2.6}$$

где T — удельная поверхностная энергия.

Таким образом, как и в аналогичной задаче о расклинивании однородного материала, длина свободной трещины l пропорциональна квадрату толщины клина $2h$. Если бы упругие свойства склеенных тел были одинаковы, то в каждое из этих тел клин углубился бы на величину h. В общем случае величины углублений h_1 и h_2 в первую и вторую среды соответственно равны

$$h_1 = 2h\left(1+\frac{\varkappa_2+1}{\varkappa_1+1}\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{-1}, \qquad h_2 = 2h\left(1+\frac{\varkappa_1+1}{\varkappa_2+1}\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{-1} \tag{2.7}$$

Полученные качественные и количественные результаты можно проверить на опыте. В частности, используя эти результаты, можно найти экспериментально удельную поверхностную энергию T и проверить, остается ли она постоянной при изменении внешних параметров.

Авторы благодарят Г. И. Баренблатта за предложение заняться разобранными здесь вопросами и постоянное внимание к работе. Авторы благодарят С. С. Григоряна за обсуждение результатов работы.

Институт механики
МГУ

Поступила 14 VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.
2. Салганик Р. Л. О хрупком разрушении склеенных тел. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 5.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
4. Черепанов Г. П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
5. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О механизме гидравлического разрыва нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 5.
6. Баренблатт Г. И. Об условиях конечности в механике сплошных сред. Статические задачи теории упругости. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 2.
7. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О конечности напряжений на краю произвольной трещины. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 4.
8. Баренблатт Г. И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
9. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
10. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
11. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958.