ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ ГОРНЫХ НАУК Том 6, № 1, 2019

УДК 539.3 DOI: 10.15372/FPVGN2019060108

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛИТОСФЕРНОЙ ГЕОДИНАМИКИ, ОБУСЛОВЛЕННАЯ СИЛАМИ ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ И СИЛАМИ РЕАКЦИИ АСТЕНОСФЕРНОГО СЛОЯ, ПОТЕРЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

А. А. Баймухаметов[1], К. К. Коксалов[2]

[1]*Алматинский технологический университет*
E-mail: abayab@mail.ru, *ул. Толе би 100, г. Алматы 050012, Республика Казахстан*
[2]*Казахский национальный педагогический университет*
E-mail: kkapal@mail.ru, *ул. Толе би 86, г. Алматы 050012, Республика Казахстан*

Рассмотрена модель литосферной геодинамики в рамках задачи о деформации вязкоупругой литосферы под действием сил инерции вращения и вязких сил сферического течения Куэтта в астеносфере. Это течение определяет природу внутреннего геодинамического давления и тангенциальных напряжений. В зависимости от разности угловых скоростей вращения литосферы и мантии литосферная оболочка может находиться в условиях всестороннего растяжения или сжатия. Найден механизм локальных изменений толщины литосферы в результате неустойчивости деформирования литосферной оболочки Земли под действием внутреннего давления и объемных сил инерции вращения. Методом Лейбензона – Ишлинского исследована потеря устойчивости деформирования. В рамках вязкоупругой реологии литосферы проанализировано напряженно-деформированное состояние литосферной плиты при двустороннем сжатии.

Вязкоупругая литосфера, устойчивость деформирования, астеносфера, течение, напряженное состояние

MECHANICAL-MATHEMATICAL MODEL OF LITHOSPHERIC GEODYNAMICS CAUSED BY INERTIAL FORCES OF THE EARTH ROTATION AND REACTION FORCES OF ASTHENOSPHERIC LAYER, LOSS OF DEFORMATION STABILITY

A. A. Baimukhametov[1] and K. K. Koksalov[2]

[1]*Almaty Technological University,*
E-mail: abayab@mail.ru, *ul. Tole bi 100, Almaty 050012, Republic of Kazakhstan*
[2]*Kazakh National Pedagogical University,*
E-mail: kkapal@mail.ru, *ul. Tole bi 86, Almaty 050012, Republic of Kazkhstan*

The model of lithospheric geodynamics is considered within a problem on viscoelastic litosphere deformation under the influence of inertial rotation forces and viscous forces of spherical Couette flow in an astenosphere. This flow determines the nature of internal geodynamic pressure and tangential stresses. Depending on the difference of angular velocities of lithosphere and mantle rotation, the lithospheric shell can be in comprehensive expansion or compression conditions. The mechanism of local changes in the litosphere thickness as a result of instability of deformation of the Earth's lithospheric shell under the influence of internal pressure and volume inertial forces of rotation is found. Loss of deformation stability is investigated by the Leibenzon-Ishlinskiy's method. Within a viscoelastic rheology of litosphere, the stress-strain state of a litospheric plate under bilateral compression is analyzed.

Viscoelastic litosphere, stability of deformation, astenosphere, flow, stress state

Механизм взаимодействия внутренних и внешних оболочек Земли основан на динамике ее осевого вращения с предпосылкой о разделении верхней части твердой Земли на две оболочки — литосферу и астеносферу, существенно отличающиеся вязкими свойствами. Исследованию тектонического развития Земли с позиции механики деформируемого твердого тела посвящены работы [1 – 4].

В данной работе рассмотрен случай рассогласованного вращения литосферы и мантии Земли. Природа внутреннего геодинамического давления и тангенциальных напряжений определяется сферическим течением Куэтта в астеносферном слое. Сформулирована и решается задача о равновесии вязкоупругой литосферы. Предположим, что литосфера находится под воздействием объемных центробежных сил инерции и сил вязкости астеносферного слоя на ее подошве. В зависимости от разности угловых скоростей вращения литосферная оболочка Земли будет находиться в условиях всестороннего расширения или сжатия.

Исследуем возможный механизм формирования пространственной формы Земли в постановке задачи линейной теории упругости о равновесии литосферы под действием объемных центробежных сил инерции и сил вязкости астеносферного слоя на ее подошве. Для напряженно-деформированного состояния вязко-упругой литосферы распределение полей напряжений и перемещений под действием центробежных сил инерции можно получить аналитически с использованием полиномов Лежандра:

$$u_R=\frac{\gamma\omega_1^2}{60\bar{G}g(\bar{m}-1)}\left[\frac{(\bar{m}-2)R}{2}\left(\frac{3\bar{m}-1}{\bar{m}+1}R_0^2-R^2\right)+\frac{2(\bar{m}-2)(3\bar{m}-1)R_1^2(e_1^2-1)R}{(e_1^3-1)}+\frac{(3\bar{m}-1)e_1^3R_1^5(e_1^2-1)}{(e_1^3-1)R^2}\right]+$$
$$+\frac{\gamma\omega_1^2}{84\bar{G}g(\bar{m}-1)}\left[4(\bar{m}-4)R^3+\frac{12}{\bar{m}}K_8R^3+2K_{10}R_1^2R+\frac{2(5\bar{m}-4)R_1^5}{\bar{m}R^2}K_9-\frac{3e_1^2R_1^7}{R^4}K_7\right]P_2(\cos\theta),$$
$$u_\theta=\frac{\gamma\omega_1^2}{84\bar{G}g(\bar{m}-1)}\left[\left[(\bar{m}-2)\,R^3+\frac{7\bar{m}-5}{\bar{m}}R^3K_8+K_{10}R_1^2R+\frac{2(\bar{m}-2)R_1^5}{\bar{m}R^2}K_9+\frac{e_1^2R_1^7}{R^4}K_7\right]\frac{dP_2}{d\theta}\right.,$$
$$\sigma_R=\frac{\gamma\omega_1^2}{15g(\bar{m}-1)}\left[(3\bar{m}-1)(R_0^2-R^2)+\frac{(3\bar{m}-1)(e_1^2-1)}{(e_1^3-1)}R_1^2-\frac{(3\bar{m}-1)(e_1^2-1)e_1^3}{(e_1^3-1)}\frac{R_1^5}{R^3}\right]+$$
$$+\frac{\gamma\omega_1^2}{21g(\bar{m}-1)}\left[(6\bar{m}-5)R^2-\frac{3}{\bar{m}}K_8R^2+K_{10}R_1^2-\frac{2(5\bar{m}-1)}{\bar{m}}K_9\frac{R_1^5}{R^3}+6e_1^2K_7\frac{R_1^7}{R^5}\right]P_2(\cos\theta),$$
$$\tau_R=\frac{\gamma\omega_1^2}{g}\frac{\bar{m}-2}{14(\bar{m}-1)}R^2\frac{dP_2}{d\theta}+\frac{\gamma\omega_1^2}{42g(\bar{m}-1)}\left[\frac{7\bar{m}+2}{\bar{m}}K_8R^2+K_{10}R_1^2+2\frac{\bar{m}+1}{\bar{m}}K_{10}\frac{R_1^5}{R^3}-2e_1^2K_7\frac{R_1^7}{R^5}\right]\frac{dP_2}{d\theta},$$
$$(1)$$
$$\sigma_\theta=\frac{\gamma\omega_1^2}{g}\frac{3\bar{m}-1}{15(\bar{m}-1)}\left[R_0^2-R^2\frac{\bar{m}+3}{\bar{m}-1}+\frac{e_1^2-1}{e_1^3-1}R_1^2+\frac{(e_1^2-1)e_1^3}{2(e_1^3-1)}\frac{R_1^5}{R^3}\right]-\frac{\gamma\omega_1^2}{42g(\bar{m}-1)}R^2\frac{dP_2}{d\theta}\operatorname{ctg}\theta-$$
$$-\frac{\gamma\omega_1^2}{42g(\bar{m}-1)}\left[\frac{6(7\bar{m}+1)}{\bar{m}}K_8R^2+4K_{10}R_{21}^2-2\frac{\bar{m}-2}{\bar{m}}K_9\frac{R_1^5}{R^3}+9e_1^2K_7\frac{R_1^7}{R^5}-(18-2\bar{m})R^2\right]P_2(\cos\theta)+$$
$$+\frac{\gamma\omega_1^2}{42g(\bar{m}-1)}\left[-30K_8R^3+2K_{10}R^2+10\frac{\bar{m}-2}{\bar{m}}K_9\frac{R_1^5}{R^3}-e_1^2K_7\frac{R_1^7}{R^5}\right]P_2(\cos\theta)+$$
$$+\frac{\gamma\omega_1^2}{42g(\bar{m}-1)}\left[\frac{7\bar{m}-4}{\bar{m}}K_8R^3+K_{10}R_1^2+\frac{\bar{m}-2}{\bar{m}}K_9\frac{R_1^5}{R^3}+e_1^2K_7\frac{R_1^7}{R^5}\right]\frac{dP_2}{d\theta}\operatorname{ctg}\theta,$$
$$\sigma_\varphi=\frac{\gamma\omega_1^2}{g}\frac{3\bar{m}-1}{15(\bar{m}-1)}\left[R_0^2-R^2\frac{\bar{m}+3}{\bar{m}-1}+\frac{e_1^2-1}{e_1^3-1}R_1^2+\frac{(e_1^2-1)e_1^3}{2(e_1^3-1)}\frac{R_1^5}{R^3}\right]+\frac{\gamma\omega_1^2(\bar{m}-2)}{42g(\bar{m}-1)}R^2\frac{dP_2}{d\theta}\operatorname{ctg}\theta-$$
$$+\frac{\gamma\omega_1^2(2\bar{m}+3)}{21g(\bar{m}-1)}R^2P_2(\cos\theta)+\frac{\gamma\omega_1^2}{42g(\bar{m}-1)}\left[-30K_8R^2+2K_{10}R_1^2+10\frac{\bar{m}-2}{\bar{m}}K_9\frac{R_1^5}{R^3}-e_1^3K_7\frac{R_1^7}{R^5}\right]P_2(\cos\theta)+$$
$$+\frac{\gamma\omega_1^2}{42g(\bar{m}-1)}\left[\frac{7\bar{m}-4}{\bar{m}}K_8R^3+K_{10}R^2+\frac{\bar{m}-2}{\bar{m}}K_9\frac{R_1^5}{R^3}+e_1^2K_7\frac{R_1^7}{R^5}\right]\frac{dP_2}{d\theta}\operatorname{ctg}\theta.$$

где ω_1 — угловая скорость вращения литосферы; $\gamma = \rho g$ — удельный вес; G — модуль сдвига; g — ускорение силы тяжести; $m = 1/\nu$ — число Пуассона; R_0, R_1 — радиусы внешней и внутренней поверхностей литосферной оболочки; $e_1 = R_0 / R_1$; R, φ, θ — координаты сферической системы; $P_2(\cos\theta)$ — полином Лежандра. Здесь введены следующие обозначения

$$K_1 = (60\overline{m} - 72\overline{m}^2)e_1^5 + (42\overline{m}^2 - 64\overline{m} + 2)e_1^3 + 30\overline{m}^2 + 4\overline{m} - 2,$$

$$K_2 = (12\overline{m} + 42\overline{m}^2)e_1^5 + (5 - 35\overline{m}^2)e_1^3 - 7\overline{m}^2 - 12\overline{m} - 5,$$

$$K_3 = -36\overline{m}\, e_1^5 + (10 - 70\overline{m}^2)e_1^3 + 70\overline{m}^2 + 36\overline{m} - 10,$$

$$K_4 = (36\overline{m} - 18\overline{m}^2)\, e_1^5 + (18\overline{m}^2 - 36\overline{m})e_1^3 + (3\overline{m}^2 + 4\overline{m} + 1)e_1^2 - 3\overline{m}^2 - 4\overline{m} - 1,$$

$$K_5 = (28\overline{m} - 20)\, e_1^5 + (20 - 100\overline{m})e_1^2 + 72\overline{m}, \quad K_6 = (14\overline{m} - 10)\, e_1^5 + (10\overline{m} + 10)e_1^2 - 24,$$

$$K_7 = \frac{K_1 K_2 - K_3 K_4}{K_2 K_5 - K_3 K_6}, \quad K_8 = \frac{\overline{m} K_4 - K_6 K_7}{K_2},$$

$$K_9 = \frac{3\overline{m} + 1}{2} - \frac{7\overline{m} + 2}{12\overline{m}} K_8 + \frac{5}{6} e_1^2 K_7,$$

$$K_{10} = 6 - 3\overline{m} - \frac{7\overline{m} + 2}{\overline{m}} K_8 - \frac{2(\overline{m} + 1)}{\overline{m}} K_9 + 4e_1^2 K_7,$$

где $\overline{m}$, $\overline{G}$ — временные операторы. Соответствующая задача в упругой постановке решена методом А. И. Лурье.

Аналогичным образом получено поле перемещений, вызванных силами вязкости вторичного течения в астеносферном слое, которое из-за громоздкости записи не приводится.

Проведем исследование основного напряженно-деформированного состояния упругого и вязкого эллипсоида вращения. Уравнение упругого равновесия и основные соотношения представим в вырожденных эллиптических координатах s, μ, φ. Эллипсоид вращается вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью ω и находится под действием равномерного давления q, приложенного к его поверхности в положительном направлении нормали. Уравнения равновесия в перемещениях имеют вид:

$$\frac{1}{1 - 2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \overline{u} + \nabla^2 \overline{u} = \frac{1}{G} \operatorname{grad} \Phi, \tag{2}$$

где $\Phi = -\frac{1}{2}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2$ — потенциал центробежных сил; $\overline{u}$ — вектор перемещения; ρ — плотность, ν — коэффициент Пуассона.

Общее решение уравнений равновесия выражается через бигармонические функции, записанные с помощью тессеральных сферических функций

$$P_n^m(s) P_n^m(\mu) \cos m\varphi, \quad P_n^m(s) P_n^m(\mu) \sin m\varphi.$$

Определены асимметричные формы возмущений, приводящие к потере устойчивости эллипсоида вращения. Компоненты возмущений выражаются через три произвольные постоянные, которые находятся из граничных условий.

Рассмотрим также задачу об устойчивости литосферной анизотропной плиты длины a толщины H, подверженной двустороннему сжатию и лежащей на деформируемом упругом основании с помощью метода Лейбензона – Ишлинского. Найдена реакция основания при потере устойчивости литосферной плиты. Уравнения равновесия в перемещениях u, w возмущенного состояния основания представим в виде:

$$\frac{G_0}{1 - 2\nu_0} \frac{\partial \theta}{\partial x} + G_0 \nabla^2 u = 0, \quad \frac{G_0}{1 - 2\nu_0} \frac{\partial \theta}{\partial z} + G_0 \nabla^2 w = 0, \tag{3}$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа; $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}$; G_0 — модуль сдвига; ν_o — коэффициент Пуассона основания.

Найдено значение критического усилия, при превышении которого устойчивость теряется:

$$P_{kp} = \frac{1}{K^2}\left\{m^2 + K_1^2 + \frac{3K_2^2}{m^2 r^2}\left[1 + \frac{rK_0^2}{2}(4(1-\nu_0) + \rho m(1-2\nu_0))\right] - \right.$$
$$\left. -\sqrt{1 + \frac{r^2 K_0^4}{4}[4(1-\nu_0) + \rho m(1-\nu_0)]^2 + \frac{rK_0^2}{3}[4(1-\nu_0) + \rho m(1-2\nu_0)]}\right\}, \tag{4}$$

где

$$K_1^2 = \frac{12G_2(1-\nu_1^2)}{E_1\rho^3(1-\rho)}, \quad K_2^2 = \frac{12E_2(1-\nu_1^2)}{E_1\rho^3(1-\rho)}, \quad K_3^2 = \frac{12(1-\nu_1^2)P}{E_1\rho^2} = K^2 P,$$

$\rho = h_1 / h$, $h = h_1 + h_2$; E_1 — модуль упругости; ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона; h_1, h_2 — толщина жесткого и мягкого слоя, соответственно; $E_2 = \frac{2G_2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2}$ — трансверсальный модуль; G_2 — модуль сдвига; $x_1 = x / h$; $z_1 = z / h$; u, w — горизонтальные и вертикальные перемещения; $P = ph_1$ — краевое давление; $K_0^2 = \frac{(1-2\nu_2)(1-\rho)mG_0}{2(3-4\nu_0)(1-\nu_2)G_2}$, $m = m_1 h$ — безразмерное волновое число.

Выпучивание вязкоупругой литосферной плиты, лежащей на вязкой астеносфере [5], происходит в случае превышения критического усилия:

$$P_{kp} = \frac{G_1^\infty \rho^2 m^2}{6(1-\nu_1)} + \frac{G_2^\infty}{\rho(1-\rho)} + \frac{12(1-\nu_2)G_2^\infty}{r^2 m^2 \rho(1-\rho)(1-2\nu_2)}, \tag{5}$$

где G_1^∞, G_2^∞ — длительные модули сдвига компетентных и некомпетентных слоев литосферы.

ВЫВОДЫ

Исследован механизм формирования пространственной формы Земли в рамках упруго-вязкой модели.

Установлена возможная причина возникновения локальных изменений толщины литосферной оболочки при потере устойчивости деформирования.

Найдено критическое усилие потери устойчивости литосферной плиты. Выпучивание с течением времени растет по экспоненциальному закону.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. **Erzhanov Zh. S., Kalybaev A. A., Baimukhametov A. A., and Korzhymbaev T. T.** Motion and stability of shared Earth. Almaty, Nauka, 1986, 238 pp. (in Russian) **[Ержанов Ж. С., Калыбаев А. А., Баймухаметов А. А., Коржымбаев Т. Т.** Движение и устойчивость слоистой Земли. — Алма-Ата: Наука, 1986. — 238 с.]
2. **Baimukhametov A. A.** Mechanics of geooscillations, Almaty, Nauka, 2003, 244 pp. (in Russian) [**Баймухаметов А. А.** Механика геопульсаций. — Алматы: Наука, 2003. — 244 с.]
3. **Koksalov K. K.** Stability of an ellipsoidal lithospheric cover, Almaty, RIO VAK RK, 1999, 190 pp. (in Russian) [**Коксалов К. К.** Устойчивость эллипсоидальной литосферной оболочки. — Алматы: РИО ВАК РК, 1999. — 190 с.]
4. **Sorokhtin O. G., Chilingar G. V., and Sorokhtin N. O.** Theory of development of the Earth, Moscow, Institute for Computer Research, 2010, 752 pp. (in Russian) **[Сорохтин О. Г., Чилингар Дж. В., Сорохтин Н. О.** Теория развития Земли. — М.: Институт компьютерных исследований, 2010. — 752 с.**]**
5. **Bland D.** Theory of linear viscoelasticity, Moscow, Mir, 1965. (in Russian) [**Бленд Д.** Теория линейной вязкоупругости. — М.: Мир, 1965.]