УДК 532.5

КОРРЕКТНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ АВТОМОДЕЛЬНОМ ТЕЧЕНИИ ВДОЛЬ СЖИМАЮЩЕГОСЯ ЛИСТА

А. Мехмуд, М. Усман

Международный исламский университет, 44000 Исламабад, Пакистан
E-mails: ahmerqau@yahoo.co.uk, usman725.iiui@gmail.com

Проведено исследование течения вязкой жидкости вдоль непрерывно сжимающейся поверхности. Установлено, что в отличие от задачи о течении вдоль непрерывно растягивающейся поверхности задача о течении вдоль непрерывно сжимающейся поверхности при отсутствии всасывания поверхностью не имеет физически значимых решений, а при достаточно большой скорости всасывания имеет более одного решения. Показано, что течение вдоль сжимающихся поверхностей сопровождается нелинейными эффектами и имеет особые характеристики пограничного слоя. С использованием корректного определения автомодельных двумерных течений вдоль сжимающейся поверхности доказано, что эти особенности течений вдоль сжимающихся поверхностей характерны также для течений вдоль растягивающихся поверхностей. Это означает, что утверждение об исключительной значимости течений вдоль сжимающихся поверхностей неверно.

Ключевые слова: растягивающиеся и сжимающиеся поверхности, ламинарное течение пограничных слоев, всасывание поверхностью стенки.

DOI: 10.15372/PMTF20190310

Введение. Исследование течений вдоль сжимающегося листа впервые проведено в работе [1], в которой установлено, что при недостаточной скорости всасывания стенкой таких течений не существует, а при достаточной скорости всасывания существует несколько течений. В результате многочисленных исследований установлено, что течения вдоль сжимающейся поверхности, в отличие от течений вдоль растягивающейся поверхности, сопровождаются различными нелинейными эффектами [2–4].

Согласно выводам, сделанным в работе [5], утверждение о том, что решения не существует, приведенное в [1], верно лишь частично и не относится к течениям вдоль любых сжимающихся поверхностей. Это утверждение справедливо лишь для поверхностей, сжатие которых происходит с замедлением, и не относится к поверхностям, сжатие которых происходит с ускорением, даже в том случае, когда всасывание поверхностью отсутствует. В [5] также отмечается, что полученные в [1] автомодельные течения вдоль сжимающейся поверхности являются следствием некорректной формулировки задачи. В [5] дана корректная формулировка задачи об автомодельных течениях вдоль сжимающейся поверхности.

На основе анализа работ, посвященных исследованию течений вдоль сжимающейся поверхности, можно сделать вывод, что корректное изучение течений вдоль сжимающейся поверхности не проводилось. При исследовании течения вдоль сжимающейся поверхности авторы работы [1] привели неверную формулировку задачи об автомодельном течении (см. [5]), которая была использована во всех последующих работах. Вследствие этого были получены неверные результаты и при попытке их обоснования дана неверная физическая интерпретация. Приведенное в работе [1] ошибочное утверждение о том, что решения не существует, считалось верным для любой сжимающейся поверхности, в то время как оно верно только для поверхностей, сжатие которых происходит с замедлением. Случай сжимающейся поверхности, скорость сжатия которой увеличивается, не рассматривался. Однако именно в этом случае существует имеющее физический смысл решение задачи о течении вдоль сжимающейся поверхности даже при отсутствии всасывания на стенке [5]. На основе неполного и некорректного анализа течения вдоль сжимающейся поверхности был сделан вывод о том, что такое течение существенно отличается от течения вдоль растягивающейся поверхности. В действительности такой вывод неверен и является следствием некорректной формулировки задачи об автомодельном течении.

Отсутствие решения задачи о течении вдоль сжимающейся поверхности детально обсуждено в работе [5]. Целью данной работы является доказательство утверждения о том, что особенности течений вдоль растягивающейся и сжимающейся поверхностей одинаковы. Для этого рассматривается простая двумерная задача о течении вдоль растягивающейся (сжимающейся) поверхности.

1. Постановка задачи. Рассматривается установившееся двумерное автомодельное течение несжимаемой жидкости вдоль непористого растягивающегося (сжимающегося) листа. Уравнения течения в пограничном слое имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \tag{1}$$

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{2}$$

Для уравнений (1), (2) ставятся следующие краевые условия:

$$u(x,0) = u_w(x), \qquad v(x,0) = 0, \qquad u(x,\infty) = 0. \tag{3}$$

В работе [5] доказано, что двумерное автомодельное течение вблизи растягивающегося (сжимающегося) листа существует, если скорость частиц стенки изменяется либо по степенному, либо по экспоненциальному закону:

$$u_w(x) = \pm a x^m, \qquad u_w(x) = \pm U_0\,\mathrm{e}^{mx/L}\,. \tag{4}$$

При формулировке задачи об автомодельном течении следует отметить ошибки, допущенные ранее при исследовании течения вдоль сжимающейся поверхности. В данной работе рассматривается случай степенного закона изменения скорости стенки (случай экспоненциального закона рассматривается аналогично). Для степенного закона изменения скорости стенки автомодельное преобразование переменных записывается в следующем виде [5]:

$$\eta = x^{(m-1)/2} y, \qquad u = x^m f'(\eta), \qquad v = -x^{(m-1)/2}\Big(\frac{m+1}{2}\,f + \frac{m-1}{2}\,\eta f'\Big). \tag{5}$$

При такой замене переменных уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно, а уравнение движения (2) сводится к уравнению

$$m f'^2 - [(m+1)/2] f f'' = \nu f'''. \tag{6}$$

При приведении уравнений (5), (6) к безразмерному виду авторами более ранних работ была допущена ошибка.

В случае течения вдоль листа, растягивающегося по степенному закону, при переходе к безразмерным величинам скорость растяжения стенки $u_w(x) = ax^m$ используется в качестве отсчетной скорости:

$$u = ax^m f'(\eta). \tag{7}$$

Переменная подобия η обезразмеривается с помощью константы A соответствующей размерности:

$$\eta = Ax^{(m-1)/2} y. \tag{8}$$

С учетом (7), (8) из уравнения неразрывности следует

$$v = -\frac{a}{A}\, x^{(m-1)/2} \Big(\frac{m+1}{2}\, f + \frac{m-1}{2}\, \eta f'\Big). \tag{9}$$

С учетом преобразований подобия (7)–(9) из уравнения (2) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка вида (6) с модифицированной правой частью:

$$mf'^2 - \frac{m+1}{2}\, ff'' = \frac{\nu A^2}{a}\, f'''. \tag{10}$$

Из (10) следует выражение для константы A

$$A = \sqrt{a/\nu}. \tag{11}$$

В результате уравнение (10) принимает вид

$$mf'^2 - \frac{m+1}{2}\, ff'' = f''', \tag{12}$$

а преобразования подобия (7)–(9) — вид

$$\eta = \sqrt{\frac{u_w(x)}{\nu x}}\, y, \qquad u = u_w(x) f'(\eta), \qquad v = -\sqrt{\frac{u_w(x)\nu}{x}}\, \Big(\frac{m+1}{2}\, f + \frac{m-1}{2}\, \eta f'\Big). \tag{13}$$

Здесь $u_w(x) = ax^m$ — степенной закон растяжения стенки ($a > 0$). Заметим, что уравнения (12), (13) в таком же виде получены также авторами других работ. В силу преобразований (13) краевые условия (3) принимают вид

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f'(\infty) = 0. \tag{14}$$

В случае течения вдоль листа, сжимающегося по степенному закону $u_w(x) = -ax^m$ ($a > 0$), в качестве отсчетной скорости должна использоваться скорость стенки $u_w(x) = ax^m$ ($a > 0$). В опубликованных ранее работах при исследовании течения вдоль сжимающейся поверхности для приведения уравнений к безразмерному виду в качестве отсчетной скорости использовалась скорость растягивающейся стенки $u_w(x) = ax^m$. В этом и заключалась ошибка. При использовании в качестве отсчетной скорости $u_w(x) = -ax^m$ уравнения (7), (9) записываются в следующем виде:

$$u = -ax^m f'(\eta); \tag{15}$$

$$v = \frac{a}{A}\, x^{(m-1)/2} \Big(\frac{m+1}{2}\, f + \frac{m-1}{2}\, \eta f'\Big). \tag{16}$$

Вид уравнения (8) сохраняется, константа A должна быть определена. С учетом соотношений (8), (15), (16) уравнение (2) приводится к виду

$$mf'^2 - \frac{m+1}{2}\, ff'' = -\frac{\nu A^2}{a}\, f'''. \tag{17}$$

Таким образом, уравнения (17) и (10), решениями которых являются автомодельные течения вдоль сжимающейся и растягивающейся поверхностей, различаются. В случае растягивающейся поверхности (уравнение (10)) в правой части безразмерного уравнения движения стоит коэффициент $+1$, а в случае сжимающейся поверхности (уравнение (17)) — коэффициент -1. Константа A в этих уравнениях одна и та же и определяется уравнением (11). Поскольку в случае сжимающейся поверхности $u_w(x) = -ax^m$, в силу (11) выражение для переменной η имеет вид

$$\eta = \sqrt{\frac{ax^m}{\nu x}}\, y = \sqrt{\frac{-u_w(x)}{\nu x}}\, y, \tag{18}$$

а уравнение (17) приводится к виду

$$mf'^2 - \frac{m+1}{2} ff'' = -f'''. \tag{19}$$

В силу (15), (16), (18) краевые условия (3) преобразуются к виду (14). Таким образом, при корректной формулировке задачи краевые условия имеют один и тот же вид и в случае растягивающейся поверхности, и в случае сжимающейся, а уравнения движения имеют различный вид.

В работе [1] и других работах была неверно выбрана отсчетная скорость, а именно: при исследовании течения вдоль сжимающейся поверхности в качестве отсчетной скорости выбиралась скорость растягивающейся стенки. Вследствие этого было получено одно и то же уравнение движения и в случае растягивающейся поверхности, и в случае сжимающейся, а в краевом условии для задачи о течении вдоль сжимающегося листа появился знак “$-$”: $f'(0) = -1$. Следует отметить, что корректную формулировку задачи об автомодельном течении можно получить из некорректной, заменив функцию $f(\eta)$ на функцию $-f(\eta)$. Именно поэтому результаты, полученные при решении некорректно сформулированной задачи, противоположны результатам, полученным при решении корректно сформулированной задачи.

Запишем уравнения (12), (19) в виде одного уравнения

$$mf'^2 - \frac{m+1}{2} ff'' = \pm f''', \tag{20}$$

где знак “$+$” соответствует растягивающейся поверхности, знак “$-$” — сжимающейся.

Приведенные выше утверждения справедливы для случая изменения скорости стенки как по степенному закону, так и по экспоненциальному. Ниже рассматривается случай степенного закона (случай экспоненциального закона рассматривается аналогично).

2. Опровержение утверждения об уникальности течения вдоль сжимающейся поверхности. В данном пункте доказываются утверждения, приведенные в п. **1**. Результаты анализа работ, посвященных исследованию течения вдоль сжимающейся поверхности, позволяют сделать следующие заключения. Все выводы об уникальности течения вдоль сжимающейся поверхности основаны на следующих утверждениях: решение задачи существует только при достаточном количестве жидкости, всасываемой через поверхность стенки, и в этом случае существует более одного решения [2–4]. Утверждение об уникальности течения вдоль сжимающейся поверхности может быть легко опровергнуто, если будут доказаны следующие утверждения.

1. Задача о течении вдоль листа, сжимающегося по степенному закону с уменьшающейся скоростью (с замедлением), при наличии достаточного количества жидкости, всасываемой через поверхность стенки, имеет несколько решений. Данный факт был известен и отмечался в литературе, однако при этом не учитывалось, что он справедлив только

для случая листа, сжимающегося с замедлением. Более того, соответствующие результаты, содержащиеся в опубликованных работах, неверны, поскольку получены в результате решения некорректно поставленной задачи об автомодельном течении.

2. Задача о течении вдоль растягивающегося листа не имеет физически содержательных решений при отсутствии всасывания через поверхность стенки и имеет несколько решений при достаточном количестве жидкости, всасываемой через поверхность стенки, в случае ее растяжения по степенному закону с уменьшающейся скоростью. Насколько известно авторам данной работы, ранее этот факт в литературе не отмечался. Считалось, что в случае растягивающегося листа решение существует всегда. В действительности при отсутствии всасывания в случае растягивающегося листа решение существует только в том случае, если растяжение стенки происходит с ускорением.

3. Течение вдоль сжимающегося листа обладает теми же свойствами, что и течение вдоль растягивающегося листа.

4. Течения вдоль растягивающейся и сжимающейся поверхностей различаются несущественно, что является следствием формулировки соответствующих математических задач.

Поскольку краевые условия (3) справедливы для непористого растягивающегося (сжимающегося) листа, они не учитывают скорость всасывания (впрыскивания). Для того чтобы имело место всасывание (впрыскивание) через поверхность стенки, необходимо, чтобы на стенке была отлична от нуля нормальная составляющая скорости, которую обозначим через $v_w(x,0)$. В соответствии с предложенной в работе [5] постановкой задачи об автомодельном течении вдоль растягивающейся (сжимающейся) поверхности нормальная составляющая скорости должна изменяться по степенному закону $v_w(x,0) = dx^{(m-1)/2}$. В этом случае первое краевое условие в (14) принимает вид

$$f(0) = \pm\frac{-2\alpha}{m+1}, \tag{21}$$

где $\alpha = d/\sqrt{a\nu}$; знаки “+” и “−” соответствуют впрыскиванию и всасыванию.

2.1. *Доказательство утверждения 1.* Течение в пограничном слое вдоль сжимающегося по степенному закону листа описывается уравнением (20) со знаком “−” в правой части. Краевыми условиями, соответствующими всасыванию или впрыскиванию на стенке по степенному закону, являются условие (21) и последние два условия в (14). В работе [5] доказано, что при отсутствии всасывания на стенке уравнение (20) (со знаком “−” в правой части) допускает имеющее физический смысл решение при $m < -1$ (сжатие с ускорением) и не имеет решения при $m > 0$ (сжатие с замедлением). В данной работе уравнение (20) (со знаком “−” в правой части) решено при $m > 0$ (сжатие с замедлением) с краевыми условиями (14), (21) при наличии всасывания (впрыскивания). Установлено, что для существования решения при заданном значении параметра m необходимо, чтобы значение величины $|\alpha|$ было достаточно большим. Например, при $m = 3$ решения не существует, если $\alpha \leqslant -3{,}0222$. Для функции скорости и коэффициента поверхностного трения существует два решения (рис. 1, 2). Для того чтобы решение существовало при увеличении параметра m ($m > 0$) и уменьшении скорости сжатия стенки, значение параметра α должно увеличиваться (см. рис. 2). Следует отметить, что в ряде работ аналогичные результаты получены при решении некорректно поставленной задачи. Данные, приведенные в настоящей работе, получены при решении корректно поставленной задачи. Значения некоторых физических величин приведены в табл. 1, 2.

2.2. *Доказательство утверждения 2.* В соответствии с имеющимися в литературе данными решение задачи о течении вдоль растягивающегося листа существует при отсутствии всасывания через поверхность стенки. Более того, считалось, что при отсутствии

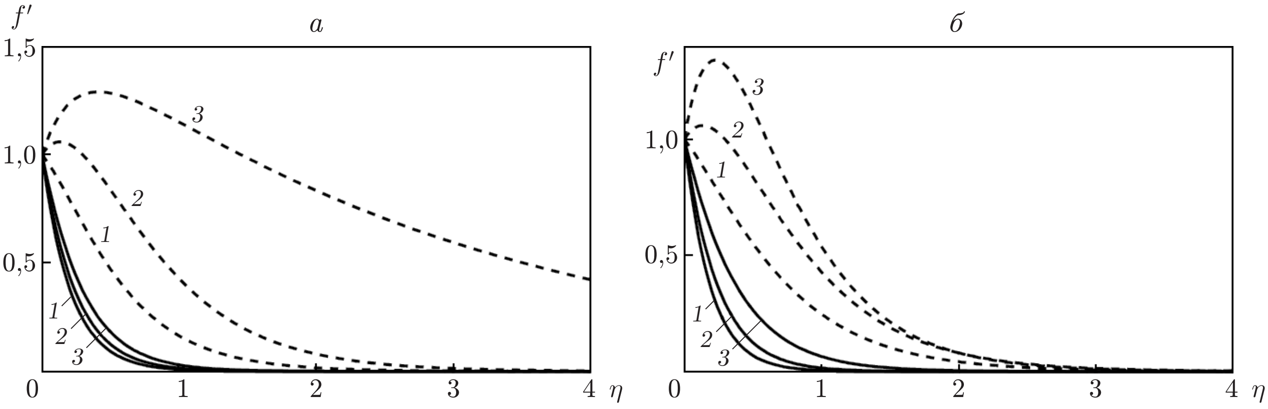

Рис. 1. Зависимости скорости течения вдоль сжимающейся поверхности от координаты η при различных значениях показателя m в степенном законе и параметра всасывания α:
а — $\alpha = -5$ (*1* — $m = 1$, *2* — $m = 5$, *3* — $m = 8$), *б* — $m = 5$ (*1* — $\alpha = -4$, *2* — $\alpha = -5$, *3* — $\alpha = -6$); сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение

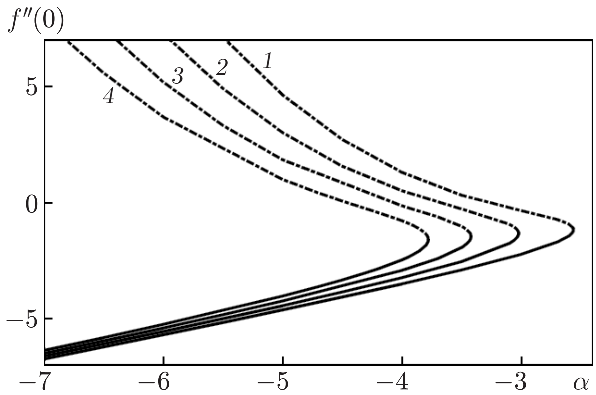

Рис. 2. Зависимость коэффициента поверхностного трения (в случае сжимающегося листа) от параметра всасывания α при различных значениях параметра m:
1 — $m = 2$, *2* — $m = 3$, *3* — $m = 4$, *4* — $m = 5$; сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение

всасывания решение задачи о течении вдоль растягивающегося листа, в отличие от задачи в случае сжимающегося листа, имеет единственное решение, поскольку в этом случае энергия не затрачивается. В работе [6] строго доказано, что при степенном законе растяжения листа задача имеет несчетное множество решений при $-1/3 < m < 0$ и не имеет решений при $m \leqslant -1/3$. Насколько известно авторам данной работы, в литературе этот факт не отмечался и не исследовался. Напомним, что отрицательные значения параметра m ($m < 0$) соответствуют растяжению листа с уменьшающейся скоростью, и решение существует не при всех значениях $m \leqslant -1/3$. Поэтому в данной работе задача о течении вдоль растягивающегося с замедлением листа исследуется для значений $m \leqslant -1/3$.

Уравнение (20) (со знаком “+” в правой части) описывает автомодельное течение вдоль листа, растягивающегося по степенному закону. При отсутствии всасывания уравнение (20) с краевыми условиями (14) при $m \leqslant -1/3$ не допускает решения, имеющего физический смысл [5, 6]. Поэтому краевое условие (21) нужно заменить первым краевым

Таблица 1

Значения коэффициента поверхностного трения f'' при $\alpha = -3$

m	Растягивающийся лист		Сжимающийся лист	
	Первое решение	Второе решение	Первое решение	Второе решение
−2,0	−2,5233	4,3224	−3,3783	—
−1,5	−2,6830	9,7166	−3,2727	—
−0,7	−2,9069	215,5061	−3,0903	—
0	−3,0805	—	−2,9133	—
1,5	−3,4052	—	−2,4408	−0,1335
2,0	−3,5029	—	−2,2285	−0,3445
2,5	−3,5964	—	−1,9460	−0,6587

Таблица 2

Пороговые значения величины α, разделяющие области, в которых решение существует и не существует

m	Растягивающийся лист ($m < -1/3$)	Сжимающийся лист ($m > 0$)
±1,5	−1,562 136 380	−2,298 354 5
±2,0	−1,929 123 100	−2,562 363 4
±3,0	−2,507 536 950	−3,022 133 7
±4,0	−2,975 814 690	−3,420 743 2
±5,0	−3,379 899 701	−3,777 558 3

условием (14). Тогда при $m \leqslant -1/3$ решение будет существовать при достаточно большой скорости всасывания через поверхность стенки. Например, при $m = -2{,}2$ значение α не должно быть меньше $-2{,}057\,794\,7$. В этом случае существует более одного решения задачи о течении вдоль растягивающегося листа. Зависимости скорости и коэффициента поверхностного трения от параметров η, α приведены на рис. 3, 4. При уменьшении параметра m пороговое значение величины α увеличивается (см. рис. 4). Это означает, что при уменьшении скорости движения стенки требуется увеличение скорости всасывания. Аналогичные закономерности имеют место в случае течения вдоль сжимающегося листа, что отмечалось ранее в других работах.

2.3. *Доказательство утверждения 3.* В соответствии с доказанными утверждениями 1, 2 при отсутствии всасывания через поверхность стенки существует течение вдоль листа, сжимающегося с увеличивающейся скоростью ($m < -1$) [5], и не существует течения вдоль листа, сжимающегося с уменьшающейся скоростью ($m > 0$). Однако решение задачи о течении вдоль листа, сжимающегося с уменьшающейся скоростью, будет существовать только при наличии достаточного количества жидкости, всасываемой через поверхность стенки. В данном случае существует более одного решения (эти утверждения соответствуют имеющимся в литературе утверждениям о течении вдоль сжимающихся листов). Аналогично при отсутствии всасывания через поверхность стенки существует решение задачи о течении вдоль листа, растягивающегося с ускорением ($m > 0$), и не существует решения задачи о течении вдоль листа, растягивающегося с замедлением ($m \leqslant 1/3$). Так же как в случае течения вдоль сжимающегося листа, решение задачи о течении вдоль листа, растягивающегося с замедлением, может существовать при $m \leqslant -1/3$ и наличии достаточного количества жидкости, всасываемой через поверхность стенки. При этом существует более одного решения. Насколько известно авторам данной работы, эти утверждения о течении вдоль растягивающегося листа ранее не отмечались и, более

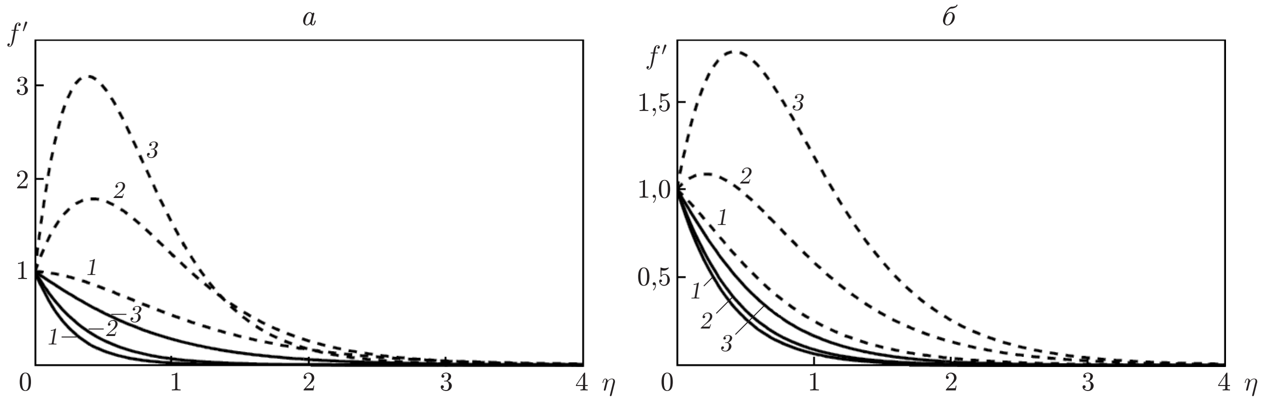

Рис. 3. Зависимость скорости течения вдоль растягивающейся поверхности от координаты η при различных значениях показателя m и параметра всасывания α:
а — $m = -2$ (*1* — $\alpha = -2$, *2* — $\alpha = -3$, *3* — $\alpha = -4$), *б* — $\alpha = -3$ (*1* — $m = -2$, *2* — $m = -3$, *3* — $m = -4$); сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение

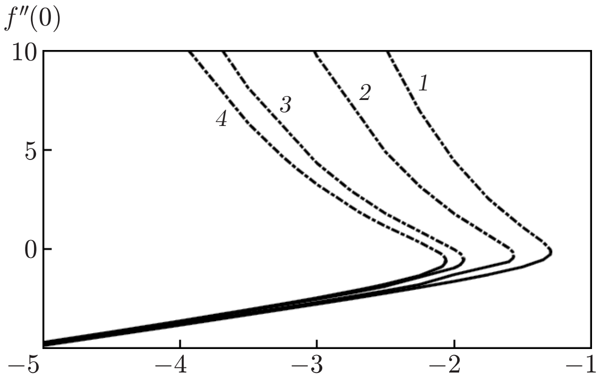

Рис. 4. Зависимость коэффициента поверхностного трения (в случае растягивающегося листа) от параметра α при различных значениях показателя m:
1 — $m = -1{,}2$, *2* — $m = -1{,}5$, *3* — $m = -2{,}0$, *4* — $m = -2{,}2$; сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение

того, отрицались (см., например, [2–4]). Таким образом, с учетом сказанного выше характер течений вдоль растягивающегося и сжимающегося листов сопоставим. Очевидно, что все особенности течения вдоль сжимающегося листа имеют место и в случае течения вдоль растягивающегося листа.

2.4. *Доказательство утверждения 4.* Доказательство утверждения 4 является математическим обоснованием утверждения, согласно которому два рассмотренных выше типа течений практически не имеют различий, а также математическим обоснованием утверждения 3. Запишем уравнения движения задачи об автомодельных течениях вдоль растягивающегося и сжимающегося листов соответственно в следующем виде:

$$c_1 f'^2 - c_2 f f'' = f''', \qquad \bar{c}_1 f'^2 - \bar{c}_2 f f'' = f'''. \tag{22}$$

Здесь $c_1 = m$; $c_2 = (m+1)/2$; $\bar{c}_1 = -m$; $\bar{c}_2 = -(m+1)/2$. Для различных значений параметра m диапазоны значений коэффициентов c_i и $\bar{c}_i$ $(i = 1, 2)$, при которых существуют решения задач о течениях вдоль листов, растягивающихся (сжимающихся) с ускорением

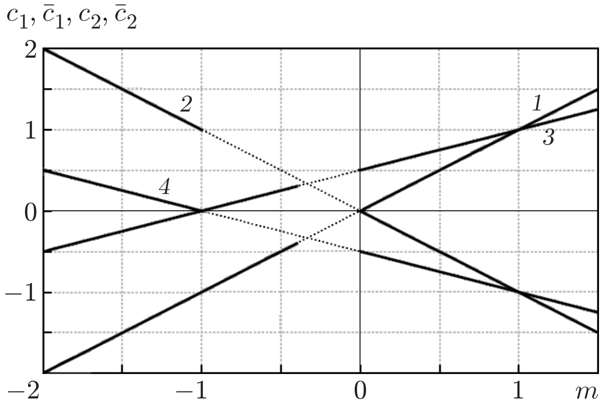

Рис. 5. Зависимости коэффициентов c_1 (*1*), $\bar{c}_1$ (*2*), c_2 (*3*), $\bar{c}_2$ (*4*) в уравнениях (22) от показателя m

Таблица 3

Диапазоны значений коэффициентов c_1, $\bar{c}_1$, c_2, $\bar{c}_2$ при различных значениях показателя m

Ускоренное течение		Замедленное течение	
Растягивающийся лист ($m \geqslant 0$)	Сжимающийся лист ($m \leqslant -1$)	Растягивающийся лист ($m \leqslant -1/3$)	Сжимающийся лист ($m \geqslant 0$)
$c_1 \in [0, \infty)$ $c_2 \in [1/2, \infty)$	$\bar{c}_1 \in [1, \infty)$ $\bar{c}_2 \in [0, \infty)$	$c_1 \in (-\infty, -1/3]$ $c_2 \in (-\infty, 1/3]$	$\bar{c}_1 \in (-\infty, 0]$ $\bar{c}_2 \in (-\infty, -1/2]$

(замедлением), приведены на рис. 5 и в табл. 3. Более подробная информация об этих диапазонах содержится в работе [5].

Заметим, что вид уравнений в (22) одинаков. В случае течения вдоль сжимающегося (растягивающегося) с ускорением листа указанные интервалы коэффициентов c_1, c_2, $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ в достаточно большой области перекрываются (см. табл. 3 и рис. 5). Это означает, что в случае сжимающегося (растягивающегося) листа при соответствующим образом подобранном значении параметра m (например, при $m \leqslant -2$ в случае сжимающегося листа и при $m \geqslant 0$ в случае растягивающегося листа) диапазоны значений коэффициентов в уравнениях (22) имеют полностью перекрывающиеся области, т. е. при $m \geqslant 0$ и $m \leqslant -2$ соответственно в случаях растягивающегося и сжимающегося с ускорением листов нужно решать одно и то же уравнение. Следовательно, характер течений в обоих случаях один и тот же. Однако следует отметить, что коэффициенты в уравнениях (22) совпадают не для всех значений параметра m для двух типов течений. В случае растягивающегося и сжимающегося с замедлением листов диапазоны значений коэффициентов соответствующих уравнений также перекрываются в большой области изменения параметра m. Следовательно, и в этих двух случаях необходимо решать одно и то же уравнение, при этом решения в случаях растягивающегося и сжимающегося листов будут совпадать.

Таким образом, задачи о течениях и вдоль растягивающегося, и вдоль сжимающегося листов имеют одинаково много физически значимых решений.

Заключение. В работе дана корректная постановка задачи о течении вдоль сжимающегося листа. Показано, что явления, присущие течению вдоль сжимающегося листа, характерны и для течения вдоль растягивающегося листа. Все нелинейные эффекты, характерные для течения вдоль сжимающегося листа, имеют место и в случае течения вдоль растягивающегося листа.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Miklavcic M., Wang C. Y.** Viscous flow due to a shrinking sheet // Quart. Appl. Math. 2006. V. 64. P. 283–290.
2. **Fang T.** Boundary layer flow over a shrinking sheet with power-law velocity // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2008. V. 51. P. 5838–5843.
3. **Fang T., Zhang J.** Closed-form exact solutions of MHD viscous flow over a shrinking sheet // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2009. V. 14. P. 2853–2857.
4. **Wang C.** Stagnation flow towards a shrinking sheet // Intern. J. Nonlinear Mech. 2008. V. 43. P. 377–382.
5. **Mehmood A.** Viscous flows: Stretching and shrinking of surfaces. S. l.: Springer, 2017.
6. **Paullet J. E., Previte J. P.** Comment on “Existence and uniqueness results for a non-linear differential equation arising in viscous flow over a nonlinearly stretching sheet” // Appl. Math. Lett. 2012. V. 25. P. 1114–1117.

Поступила в редакцию 3/X 2018 г.,
после доработки — 3/X 2018 г.
Принята к публикации 28/I 2019 г.