

УДК 532.536

ЭФФЕКТИВНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРОВОДИМОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИ УСТОЙЧИВОЙ СТАТИСТИКОЙ

О. Н. Соболева

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
630090 Новосибирск
E-mail: olga@nmsf.sccc.ru

В рамках теории ренормализационной группы Вилсона получены уравнения для эффективных коэффициентов случайных полей проводимости жидкости через пористую среду с логарифмически устойчивым распределением. Результаты теоретического моделирования сравниваются с данными численного моделирования.

Ключевые слова: фильтрация, логарифмически устойчивое распределение проводимости, подсеточное моделирование.

Введение. Полевые и лабораторные наблюдения показывают, что поле проводимости жидкости нерегулярно, причем разброс масштаба нерегулярностей растет с увеличением количества измерений на ограниченном интервале. Это привело к созданию фрактальных моделей проводимости с логарифмически устойчивыми распределениями проводимости [1]. Статистические модели с логарифмически нормальным распределением проводимости рассматривались в работах [2, 3]. В [4, 5] с использованием идеи ренормализационной группы (РГ) Вилсона [6] выведены подсеточные формулы для эффективного коэффициента проводимости и исследована диффузия фронта раздела жидкостей при их совместном течении в многомасштабной пористой среде при логарифмически нормальном распределении проводимости и пористости. Формула Ландау — Лифшица для эффективной проводимости в рамках строгой полевой ренормализационной группы выведена в работе [7], в которой анализируются предыдущие исследования полевой РГ. В частности, упоминаются аргументы работы [8], согласно которым методы ренормализационной группы частично учитывают высшие порядки теории возмущений и должны улучшить точность получаемых формул. Такие же аргументы применимы и для подсеточного моделирования. Если предположить, что среда удовлетворяет усовершенствованной гипотезе подобия Колмогорова [9, 4], то эффективные коэффициенты приобретают особенно простой вид. В настоящей работе идеи метода РГ Вилсона применяются для нахождения формул подсеточного моделирования при решении задач фильтрации во фрактальной пористой среде с логарифмически устойчивым распределением проводимости. Дифференциальные уравнения для получения эффективных констант выведены и для сред, которые не удовлетворяют усовершенствованной гипотезе подобия. Полученные формулы проверяются прямым численным моделированием.

Постановка задачи. При малых числах Рейнольдса скорость фильтрации \mathbf{v} и давление p связаны законом Дарси $\mathbf{v} = -\varepsilon(\mathbf{x})\nabla p$, где $\varepsilon(\mathbf{x})$ — коэффициент проводимости (случайная функция координат). В случае несжимаемой жидкости имеем уравнение

$$\nabla[\varepsilon(\mathbf{x})\nabla p(\mathbf{x})] = 0. \quad (1)$$

Пусть поле проводимости известно. Это означает, что путем продавливания жидкости через образец очень малого размера l_0 в каждой точке \mathbf{x} выполнено измерение проводимости. Случайная функция пространственных координат $\varepsilon(\mathbf{x})$ рассматривается как предел проводимости: $\varepsilon(\mathbf{x})_{l_0} \rightarrow \varepsilon(\mathbf{x})$ при $l_0 \rightarrow 0$. Чтобы перейти на более грубую сетку l_1 , нельзя просто сгладить полученное поле $\varepsilon(\mathbf{x})_{l_0}$ по масштабу $l_1 > l_0$. Полученное поле не будет истинной проводимостью, которая описывает фильтрацию в области масштабов (l_1, L) , где L — наибольший масштаб. Чтобы найти проводимость на более крупной сетке, надо выполнить измерение заново, продавливая жидкость через более крупные образцы размера l_1 . Необходимость этой процедуры вызвана тем, что флуктуации проводимости из интервала (l_0, l_1) коррелируют с индуцируемыми ими флуктуациями давления. Аналогично [9] рассматривается безразмерное поле ψ , равное отношению проводимости, сглаженной по двум различным масштабам (l, l_1) . Подробно данный подход описан в работе [4]. Пусть $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{x})_l$ — сглаженная по масштабу l проводимость $\varepsilon(\mathbf{x})_{l_0}$, тогда $\psi(\mathbf{x}, l, l_1) = \tilde{\varepsilon}(\mathbf{x})_{l_1}/\tilde{\varepsilon}(\mathbf{x})_l$. При $l_1 \rightarrow l$ получаем поле $\varphi(\mathbf{x}, l) = d\psi(\mathbf{x}, l, l\lambda)/(l d\lambda)|_{\lambda=1}$, которое определяет все статистические свойства пористой среды. Полученное соотношение представляет собой дифференциальное уравнение, решение которого дает проводимость как функцию поля φ :

$$\varepsilon(\mathbf{x})_{l_0} = \varepsilon_0 \exp \left[- \int_{l_0}^L \varphi(\mathbf{x}, l) \frac{dl}{l} \right]. \quad (2)$$

Предполагается, что проводимость характеризуется неоднородностью масштаба l из интервала $l_0 < l < L$, а поле φ изотропное и однородное. Поля $\varphi(\mathbf{x}, l)$, $\varphi(\mathbf{y}, l')$ с различными масштабами для любых \mathbf{x} , \mathbf{y} статистически независимы. Эта гипотеза обычно предполагается верной в различных моделях и отражает тот факт, что статистическая зависимость затухает, когда флуктуации масштабов становятся различными по величине [9]. Масштабные свойства модели определяются полем $\varphi(\mathbf{x}, l)$. Для масштабнo-инвариантных моделей должно выполняться условие $\varphi(\mathbf{x}, l) \rightarrow \varphi(K\mathbf{x}, Kl)$. Согласно теореме о суммах независимых случайных полей [10], если дисперсия $\varphi(\mathbf{x}, l)$ в данной точке конечна, то для больших значений L/l_0 интеграл в (2) стремится к нормальному полю; когда дисперсия бесконечна и существует невырожденное (не сосредоточенное в одной точке) предельное распределение суммы случайных величин, это распределение обязательно будет устойчивым. Для упрощения предполагается, что поле $\varphi(\mathbf{x}, l)$ имеет устойчивое распределение.

Логарифмически устойчивая модель. Увеличение хаотичности и перемежаемости в поведении физических полей при увеличении масштаба измерения заставило многих исследователей отказаться от логарифмически нормальной модели и рассматривать более общий случай логарифмически устойчивых распределений [11, 12]. В работе [1] по экспериментальным данным для скважин получены распределения полей проводимости и некоторые статистические характеристики, показано, что поля проводимости могут подчиняться логарифмически устойчивым распределениям.

Устойчивые распределения зависят от четырех параметров: α , β , μ , σ [13]. Параметр α лежит в области $0 < \alpha \leq 2$, где $\alpha = 2$ соответствует распределению Гаусса. Статистические моменты порядка t при $t \geq \alpha$ не существуют за исключением случая $\alpha = 2$, для которого все статистические моменты определены. Таким образом, дисперсия бесконечна при $\alpha < 2$ и среднее значение случайной величины бесконечно при $\alpha < 1$. Параметры β ,

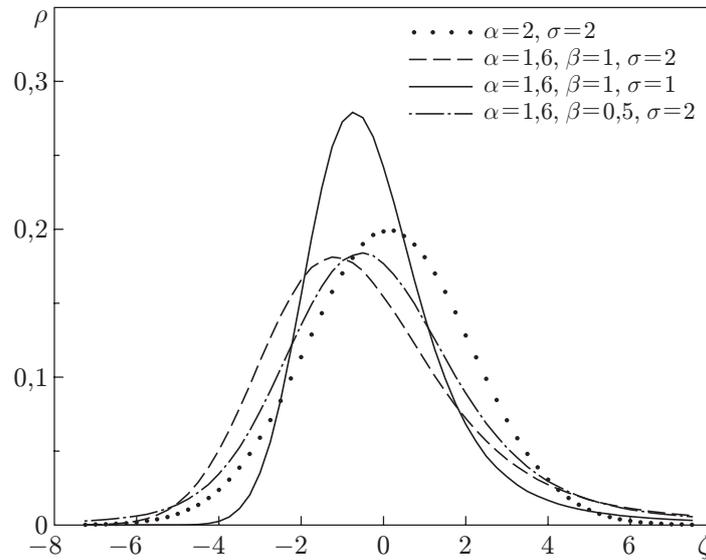


Рис. 1. Одномерные функции плотностей вероятности устойчивых законов при $\mu = 0$ (ζ — значения случайной величины; $\alpha = 2$ соответствует нормальному распределению)

μ , σ (вне зависимости от того, с какой формой представления устойчивого распределения они связаны) являются соответственно характеристиками асимметрии, сдвига и масштаба распределения. Параметр β изменяется в диапазоне $[-1, 1]$. При $\beta = 0$ распределение симметрично, значению $\beta = -1$ соответствует несимметричное распределение, в котором вероятность появления больших отрицательных значений случайной величины высока, другой крайний случай — $\beta = 1$. Параметр σ равен половине дисперсии при $\alpha = 2$ и может играть роль меры ширины распределения в случае $\alpha < 2$. На рис. 1 приведены одномерные плотности вероятностей устойчивых законов при $\mu = 0$. Для моделирования поля $\varphi(\mathbf{x}, l)$ с устойчивым законом распределения используется подход работы [14, с. 69, формула 2.3.6]. В точках (\mathbf{x}_j, l) поле φ определяется через сумму случайных независимых величин, имеющих устойчивые распределения с одинаковыми параметрами α , β , $\mu = 0$, $\sigma = 1$ (рассматривается форма A [13]):

$$\varphi(\mathbf{x}_j, l) = \left(\frac{\Phi_0(l)}{2(\delta\tau \ln 2)^{\alpha-1}} \right)^{1/\alpha} a_{j\mathbf{i}}^l \zeta_{\mathbf{i}}^l + \varphi_0(l), \quad (3)$$

где $l = 2^\tau$; $\delta\tau$ — шаг дискретизации по логарифму от масштаба; коэффициенты $a_{j\mathbf{i}}^l$ имеют носитель (support) размера l^3 , зависят только от модуля разности индексов $a_{j\mathbf{i}}^l \equiv a^l(|\mathbf{i} - \mathbf{j}|)$, поэтому индекс j в дальнейшем может быть опущен. Для всех l выполняется условие $\sum_{k_x} \sum_{k_y} \sum_{k_z} (a_{k_x k_y k_z}^l)^\alpha = 1$. При $1 \leq \alpha \leq 2$ построенное таким образом поле φ будет устойчивым, однородным и изотропным по пространственным переменным [14]. Если коэффициенты $a_{j\mathbf{i}}^l$ удовлетворяют условию $a_{j\mathbf{i}}^l \equiv a^l(|\mathbf{i} - \mathbf{j}|/l)$ и константы $\Phi_0(l)$, $\varphi_0(l)$ одинаковы при всех l , то поле φ будет инвариантным относительно масштабного преобразования. Среднее значение поля φ существует и равно $\varphi_0(l)$, что касается вторых моментов, то для $\alpha \neq 2$ они бесконечны. Это затрудняет проведение корреляционного анализа, использованного, например, в [4], и применение подхода, изложенного в [7]. Тем не менее для крайней точки $\beta = 1$ вторые моменты для самого поля проводимости существуют, несмотря на отсутствие дисперсии поля φ . Этот случай представляет интерес, поскольку имеет экспе-

риментальное подтверждение [1]. Так как l_0 — минимальный масштаб, можно положить $\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x})_{l_0}$. Таким образом, поле проводимости $\varepsilon(\mathbf{x})$ в рамках описанной выше модели имеет вид

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \exp \left[- \left(\ln 2 \sum_{\hat{l}_0}^{\hat{L}} \varphi(\mathbf{x}, \tau_l) \delta\tau \right) \right], \quad (4)$$

где $L = 2^{\hat{L}\delta\tau}$, $l_0 = 2^{\hat{l}_0\delta\tau}$, а интеграл в формуле (2) заменен суммой. Вычисление моментов первого и второго порядков приведено в Приложении. Рассмотрим корреляционную функцию проводимости

$$\langle \varepsilon(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = \varepsilon_0^2 \left\langle \exp \left[- \sqrt{\frac{1}{2}} \delta\tau \ln 2 \sum_{\hat{l}_0}^{\hat{L}} \sqrt{\Phi_0(\hat{l})} \sum_k (a_{\mathbf{k}}^l \xi_{\mathbf{k}}^l + a_{\mathbf{k}}^l \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_r}^l) - 2\varphi_0(\hat{l}) \right] \right\rangle. \quad (5)$$

Сумма в показателе степени в (5) относительно масштаба \hat{l} разбивается на группы $\hat{l}_0 \leq \hat{l} \ll \hat{l}_r$ и $\hat{l}_r < \hat{l} < \hat{L}$, где $r = 2^{\hat{l}_r\delta\tau}$. Первая группа при оценке дает константу C . Для второй группы используется формула (П2) из Приложения. При этом принимается во внимание тот факт, что для $\zeta_{\mathbf{k}}$ параметры в форме A следующие: $\mu = 0$, $\sigma = 1$, $\beta = 1$, $1 < \alpha \leq 2$. Среднее от проводимости вычисляется по формуле (П3). Окончательно получим оценку

$$\langle \varepsilon(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \simeq C \exp \left[2\delta\tau \ln 2 \left(- 2^{\alpha-2} \sum_{\hat{l}_r}^{\hat{L}} \Phi_0(\hat{l}) \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \alpha \right) \right]^{-1} - \varphi_0(\hat{l}) \right) \right].$$

В масштабно-инвариантной среде вторая группа дает степенной вклад

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle &\simeq C \exp [2(-2^{\alpha-2}\Phi_0[\cos(\pi\alpha/2)]^{-1} - \varphi_0)(\ln L - \ln r)] \simeq \\ &\simeq C(L/r)^{-2(2^{\alpha-2}\Phi_0[\cos(\pi\alpha/2)]^{-1} + \varphi_0)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Постоянная C не универсальна, а показатель степени в (6) во фрактальной среде универсален и согласно [15] может быть измерен.

Подсеточная модель. При достаточно большом разбросе масштабов ($L/l_0 \gg 1$) рассчитать давление из уравнения (1) невозможно или для этого требуется большой объем вычислений. Поэтому ставится задача: получить эффективные коэффициенты в уравнениях для крупномасштабных компонентов фильтрации. Используются идеи метода РГ Вилсона при нахождении формул подсеточного моделирования. Подробно данный подход описан в работе [4] при логарифмически нормальной модели проводимости. Функцию проводимости $\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x})_{l_0}$ разделим на два компонента относительно масштаба l . Крупномасштабный компонент $\varepsilon(\mathbf{x}, l)$ получен статистическим осреднением по всем $\varphi(\mathbf{x}, l_1)$ с $l_1 < l$, мелкомасштабный равен $\varepsilon'(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x}) - \varepsilon(\mathbf{x}, l)$:

$$\varepsilon(\mathbf{x}, l) = \varepsilon_0 \exp \left[- \int_{l_0}^L \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right] \left\langle \exp \left[- \int_{l_0}^l \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right] \right\rangle_{<}, \quad (7)$$

$$\varepsilon'(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x}, l) \left[\exp \left[- \int_{l_0}^l \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right] / \left\langle \exp \left[- \int_{l_0}^l \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right] \right\rangle_{<} - 1 \right], \quad (8)$$

где $\langle \rangle_{<}$ означает осреднение по $\varphi(\mathbf{x}, l_1)$ от малого масштаба l_1 . Крупномасштабная (надсеточная) компонента давления $p(\mathbf{x}, l)$ получается как осредненное решение уравнения (1),

в котором крупномасштабный компонент $\varepsilon(\mathbf{x}, l)$ фиксирован, а мелкомасштабный ε' — случайная величина, $p(\mathbf{x}, l) = \langle p(\mathbf{x}) \rangle_{<}$. Подсеточный компонент $p' = p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x}, l)$. Подставим выражения для $p(\mathbf{x})$, $\varepsilon(\mathbf{x})$ в уравнение (1) и осредним по мелкомасштабному компоненту:

$$\nabla[\varepsilon(\mathbf{x}, l)\nabla p(\mathbf{x}, l) + \langle \varepsilon'(\mathbf{x})\nabla p'(\mathbf{x}) \rangle] = 0. \quad (9)$$

Второе слагаемое в уравнении (9) неизвестно. Оно не может быть отброшено без предварительной оценки, поскольку корреляция между проводимостью и градиентом давления может быть существенной [2]. Выбор вида второго члена в (9) определяет подсеточную модель. Для оценки этого выражения используется теория возмущений. В методе РГ Вилсона начальное значение масштаба l близко к наименьшему масштабу l_0 , что дает возможность получить дифференциальное уравнение по масштабу l . Вычитая (9) из (1), получим подсеточное уравнение для давления $p'(\mathbf{x})$:

$$\nabla[\varepsilon(\mathbf{x})\nabla p(\mathbf{x})] - \nabla[\varepsilon(\mathbf{x}, l)\nabla p(\mathbf{x}, l) + \langle \varepsilon'(\mathbf{x})\nabla p'(\mathbf{x}) \rangle] = 0. \quad (10)$$

Это уравнение используется для нахождения подсеточного давления $p'(\mathbf{x})$. Оно не может быть решено точно. Из подсеточного уравнения (10), пренебрегая членами второго порядка малости, получаем:

$$\Delta p'(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{x}, l)} \nabla \varepsilon'(\mathbf{x}) \nabla p(\mathbf{x}, l). \quad (11)$$

Величины $\varepsilon(\mathbf{x}, l)$, $p(\mathbf{x}, l)$, входящие в правую часть уравнения (11), в соответствии с методом РГ Вилсона считаются известными, а их производные меняются медленнее, чем $\varepsilon'(\mathbf{x})$. Это соответствует намерению вывести правильное надсеточное уравнение в крупномасштабном пределе (в представлении Фурье — в пределе малых волновых чисел). Поэтому

$$p'(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon(\mathbf{x}, l)} \int \frac{1}{r} \nabla \varepsilon'(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \nabla p(\mathbf{x}, l), \quad (12)$$

где $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. Для градиента давления из (12) в крупномасштабном пределе следует

$$\nabla p'(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon(\mathbf{x}, l)} \nabla \int \frac{1}{r} \nabla \varepsilon'(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \nabla p(\mathbf{x}, l). \quad (13)$$

Используя полученные равенства, приходим к следующему выражению для подсеточного слагаемого в уравнении (9):

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon'(\mathbf{x})\nabla p'(\mathbf{x}) \rangle &\approx \frac{1}{4\pi D\varepsilon(\mathbf{x}, l)} \int \Delta \frac{1}{r} \langle \varepsilon'(\mathbf{x})\varepsilon'(\mathbf{x}') \rangle d\mathbf{x}' \nabla p(\mathbf{x}, l) \approx \\ &\approx -\frac{1}{D\varepsilon(\mathbf{x}, l)} \langle \varepsilon'(\mathbf{x})\varepsilon'(\mathbf{x}) \rangle \nabla p(\mathbf{x}, l), \end{aligned}$$

где D — размерность пространства, в данном случае $D = 3$. Модель, полученная в настоящей работе, аналогична модели, приведенной в [16] для вычисления эффективной диэлектрической проницаемости смеси при упрощающих предположениях о малости флуктуаций и их пространственного масштаба.

Согласно формулам (7), (П3)

$$\varepsilon(\mathbf{x}, l) = \varepsilon_0 \exp \left[-\delta\tau \ln 2 \left(\sum_{\hat{l}_1=\hat{l}}^{\hat{L}} \varphi(\mathbf{x}, \tau_{\hat{l}_1}) + \sum_{\hat{l}_1=\hat{l}_0}^{\hat{l}} \frac{\Phi_0(\tau_{\hat{l}_1})}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \alpha \right) \right]^{-1} + \varphi_0(\tau_{\hat{l}_1}) \right) \right]. \quad (14)$$

Используя формулы (8), (14), находим подсеточный компонент ε' :

$$\varepsilon'(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x}, l) \left[\exp \left(\delta\tau \ln 2 \sum_{\hat{l}_1=\hat{l}_0}^{\hat{l}} -\varphi(\mathbf{x}, \tau_{\hat{l}_1}) + \frac{\Phi_0(\tau_{\hat{l}_1})}{2 \cos(\pi\alpha/2)} + \varphi_0(\tau_{\hat{l}_1}) \right) - 1 \right].$$

Тогда

$$\langle \varepsilon'(\mathbf{x}) \varepsilon'(\mathbf{x}) \rangle = \varepsilon^2(\mathbf{x}, l) \left[\exp \left(\delta\tau \ln 2 \sum_{\hat{l}_1=\hat{l}_0}^{\hat{l}} -\varphi(\mathbf{x}, \tau_{\hat{l}_1}) + \frac{\Phi_0(\tau_{\hat{l}_1})^{-1}}{2 \cos(\pi\alpha/2)} + \varphi_0(\tau_{\hat{l}_1}) \right) - 1 \right]^2.$$

Оставляя в формуле (14) члены только первого порядка малости относительно $\delta\tau$, получим

$$\langle \varepsilon'(\mathbf{x}) \varepsilon'(\mathbf{x}) \rangle \approx \varepsilon^2(\mathbf{x}, l) \delta\tau \ln 2 [\cos(\pi\alpha/2)]^{-1} (1 - 2^{\alpha-1}) \Phi_0(\tau_{\hat{l}}). \quad (15)$$

Используя формулы (14), (15), приходим к следующей формуле для второго члена в уравнении (9):

$$\langle \varepsilon'(\mathbf{x}) \nabla p'(\mathbf{x}) \rangle_{<} \approx -(\delta\tau \ln 2 / D) [\cos(\pi\alpha/2)]^{-1} (1 - 2^{\alpha-1}) \Phi_0(\tau_{\hat{l}}) \varepsilon(\mathbf{x}, l) \nabla p(\mathbf{x}, l). \quad (16)$$

Подставляя (16) в (9) и оставляя члены только первого порядка малости, находим

$$\nabla \left[\left(1 - \delta\tau \ln 2 \left(\Phi_0(\tau_{\hat{l}}) \frac{2(1 - 2^{\alpha-1}) + D}{2D \cos(\pi\alpha/2)} + \varphi_0(\tau_{\hat{l}}) \right) \right) \varepsilon(\mathbf{x}, l) \nabla p(\mathbf{x}, l) \right] = 0.$$

При подсеточном моделировании эффективный коэффициент проводимости на масштабе l должен правильно описывать поведение решения уравнения (1) на интервале масштабов (l, L) , т. е. после отбрасывания масштабов из интервала (l_0, l) , и вычисляться по формуле того же вида, что и коэффициент $\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x})_{l_0}$. Эффективная проводимость определяется по формуле

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_{0l} \exp \left[- \left(\ln 2 \sum_{\hat{l}}^{\hat{L}} \varphi(\mathbf{x}, \tau_{\hat{l}}) \delta\tau \right) \right],$$

где

$$\varepsilon_{0l} = \varepsilon_0 \left[1 - \delta\tau \ln 2 \left(\Phi_0(\tau_{\hat{l}_1}) \frac{2(1 - 2^{\alpha-1}) + D}{2D \cos(\pi\alpha/2)} + \varphi_0(\tau_{\hat{l}_1}) \right) \right].$$

Заменяя переменную τ на l и устремляя δl к нулю, получим уравнение

$$\frac{d \ln \varepsilon_{0l}}{d \ln l} = -\Phi_0(l) \frac{2(1 - 2^{\alpha-1}) + D}{2D \cos(\pi\alpha/2)} - \varphi_0(l), \quad \varepsilon_{0l}|_{l=L} = \varepsilon_{00}. \quad (17)$$

Для масштабно-инвариантной среды решение уравнения (17) имеет вид

$$\varepsilon_{0l} = \varepsilon_{00} (l/L)^{\Phi_0(2(1-2^{\alpha-1})+D)/(2D \cos(\pi\alpha/2))+\varphi_0}. \quad (18)$$

Константа ε_{00} описывает движение среды на самом большом масштабе при $l = L$.

Численное моделирование. Уравнение (1) численно решается в кубе с ребром L_0 . На гранях куба $y = 0$, $y = L_0$ задается постоянное давление $p(x, y, z)|_{y=0} = p_1$, $p(x, y, z)|_{y=L_0} = p_2$, $p_1 > p_2$. Давление на других гранях куба задается линейной зависимостью по y : $p = p_1 + (p_2 - p_1)/L_0$. Основной фильтрационный поток направлен вдоль оси y . В расчетах используются безразмерные переменные. Все расстояния измеряются в единицах L_0 , за единицу разности давлений выбирается разность $p_1 - p_2$, проводимость измеряется в единицах ε_0 . Таким образом, задача решается в единичном кубе, с единичным скачком давления и $\varepsilon_0 = 1$. Поле проводимости моделируется по формуле (4). По пространственным переменным используется сетка $256 \times 256 \times 256$; шаг по масштабу $\delta\tau = 1$, $\tau_l = 0, \dots, -8$. Коэффициенты a_{ji}^l выбирались в виде

$$a_{ji}^l = \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2^{\tau_l} \sqrt{\pi}} \right)^{3/\alpha} \exp \left(- \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^2}{2^{2\tau_l}} \right).$$

Поле $\varphi(\mathbf{x}, \tau_l)$ генерируется независимо для каждого τ_l . Общий показатель степени в (4) суммируется по статистически независимым слоям. В конкретных задачах масштабы L, l_0 могут принимать различные значения. В данной работе они не конкретизируются, поскольку ее целью является поиск универсальной подсеточной модели и ее универсальных показателей степени типа показателя степени в формуле (18). Для приближенного расчета можно использовать некоторое ограниченное количество слоев. В нашем случае их три: $\tau_l = -4, -5, -6$. Количество слоев и масштабы выбирались так, чтобы масштаб самых крупных пульсаций проводимости позволил заменить приближенно вероятностные средние величины осредненными по пространству, а масштаб самых мелких — так, чтобы разностная задача хорошо аппроксимировала уравнение (1). Независимые случайные величины ζ_i^l в формуле (4) моделировались по алгоритму и программе, приведенным в [17].

Для масштабнo-инвариантных сред константы Φ_0, φ_0 могут быть выбраны из экспериментальных данных для пористых природных сред. Согласно [15] показатель степени в формуле (6) для некоторых природных сред лежит в диапазоне $0,25 \div 0,3$. На рис. 2, 3 приведены линии уровня масштабнo-инвариантной проводимости в среднем сечении $z = 1/2$ при $\alpha = 2$ (что соответствует логарифмически нормальной модели проводимости) и $\alpha = 1,6$; $\beta = 1$ (что соответствует логарифмически устойчивой модели). Параметры $\Phi_0 = 0,3$; $\varphi_0 = 0$. Хорошо видна разница между двумя моделями. Если на рис. 2 светлых (больших значений) и темных пятен (малых значений) практически поровну, то на рис. 3 большие значения функции проводимости редки. Из-за этого свойства устойчивых распределений при статистической обработке результатов требуется значительно больший объем данных, чем для нормального распределения. Поэтому при расчетах используется только три слоя. Для логарифмически нормальной модели проводимости в работе [4] использовалось четыре слоя.

В соответствии с процедурой вывода подсеточной формулы для ее проверки необходимо численно решить полную задачу и выполнить вероятностное осреднение по мелко-масштабным пульсациям. В результате получится подсеточное слагаемое, которое можно сравнивать с теоретическим выражением. Вероятностное осреднение требует многократного решения полной задачи с заданным крупномасштабным компонентом проводимости и случайным подсеточным компонентом с последующим осреднением по нему. В работе выполнен более экономный вариант проверки, основанный на степенной зависимости полного расхода от отношения максимального и минимального масштабов в надсеточной области при расчете проводимости по формуле (4), если вклад подсеточной области не учитывается. Чтобы показать это, выполним следующие преобразования полученных формул. Эффективная проводимость (17) должна приводить к истинной скорости в области (L, l) . В частности, полный расход жидкости через образец должен совпадать с истинным независимо от масштаба обрезки l . Для среднего расхода жидкости через объем в направлении, параллельном координатным плоскостям, учитывая, что рассматривается единичный куб, имеем

$$\left\langle \varepsilon_{0l} \exp \left[- \left(\ln 2 \sum_{\hat{l}}^{\hat{L}} \varphi(\mathbf{x}, \tau_l) \delta \tau \right) \right] \nabla_i p \right\rangle = Q_i.$$

Учитывая уравнение (17), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0l} \left\langle \exp \left[- \left(\ln 2 \sum_{\hat{l}}^{\hat{L}} \varphi(\mathbf{x}, \tau_l) \delta \tau \right) \right] \nabla_i p \right\rangle &= \varepsilon_{00} \left(\frac{l}{L} \right)^{\delta \tau \ln 2 \sum_{\hat{l}_1=\hat{l}}^{\hat{L}} \left(\Phi_0(\tau_{\hat{l}_1})^{\frac{2(1-2^{\alpha-1})+D}{2D \cos(\pi\alpha/2)}} + \varphi_0(\tau_{\hat{l}_1}) \right)} \times \\ &\times \left\langle \exp \left[- \left(\ln 2 \sum_{\hat{l}_1=\hat{l}}^{\hat{L}} \varphi(\mathbf{x}, \tau_{\hat{l}_1}) \delta \tau \right) \right] \nabla_i p \right\rangle = Q_i. \end{aligned}$$

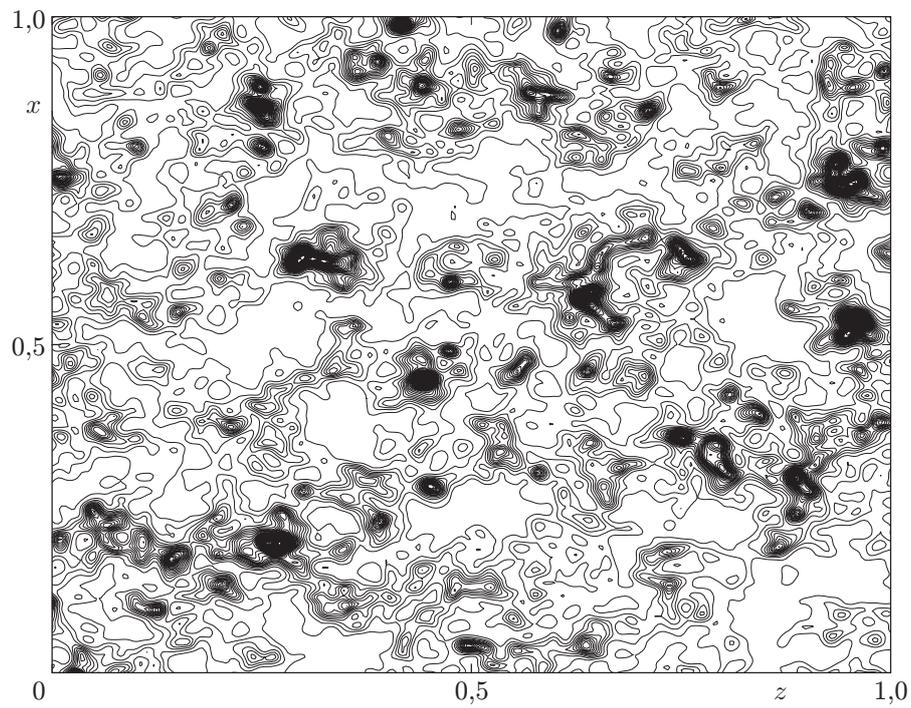


Рис. 2. Изолинии проводимости для логарифмически нормального закона ($\alpha = 2$): число уровней 50

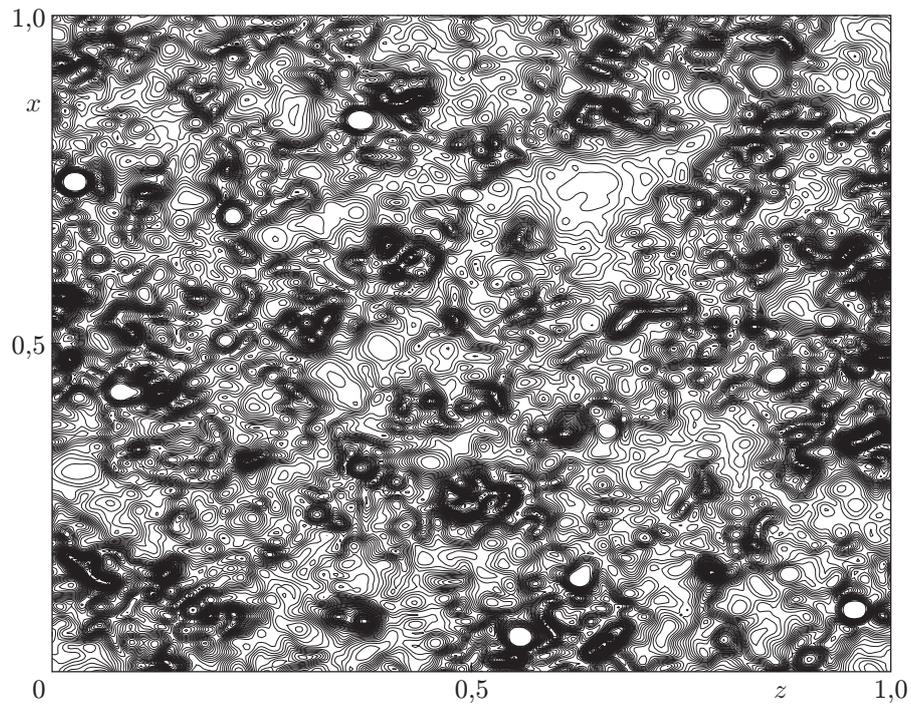


Рис. 3. Изолинии проводимости для логарифмически устойчивого закона ($\beta = 1$, $\alpha = 1,6$): число уровней 50

Следовательно,

$$\left\langle \exp \left[- \left(\ln 2 \sum_{\hat{l}}^{\hat{L}} \varphi(\mathbf{x}, \tau_l) \delta\tau \right) \right] \nabla_i p \right\rangle = \frac{Q_i}{\varepsilon_{00}} \left(\frac{l}{L} \right)^{-\delta\tau \ln 2 \sum_{\hat{l}_1=\hat{l}}^{\hat{L}} \left(\Phi_0(\tau_{\hat{l}_1}) \frac{2(1-2^{\alpha-1})+D}{2D \cos(\pi\alpha/2)} + \varphi_0(\tau_{\hat{l}_1}) \right)}.$$

В соответствии с законом Дарси, записанным на масштабе $L_0 \gg L$, суммарный расход определяется соотношением

$$\sum_i^3 Q_i = \varepsilon_{00} \frac{p_2 - p_1}{y_2 - y_1}.$$

В настоящих расчетах считается, что масштаб L_0 достаточно велик по сравнению с L и вероятностное среднее можно заменить осреднением по пространству (эргодическая гипотеза). Таким образом, численной проверке подлежит формула

$$\sum_i^3 \left\langle \exp \left[- \left(\ln 2 \sum_{\hat{l}}^{\hat{L}} \varphi(\mathbf{x}_j, \tau_l) \delta\tau \right) \right] \nabla_i p \right\rangle = \frac{p_2 - p_1}{y_2 - y_1} \left(\frac{l}{L} \right)^{-\delta\tau \ln 2 \sum_{\hat{l}_1=\hat{l}}^{\hat{L}} \left(\Phi_0(\tau_{\hat{l}_1}) \frac{2(1-2^{\alpha-1})+D}{2D \cos(\pi\alpha/2)} + \varphi_0(\tau_{\hat{l}_1}) \right)},$$

где среднее понимается как среднее по пространству.

Далее численно решается сеточный аналог безразмерного уравнения (1). Для численного решения используется один из вариантов итерационного метода [18]. Затем получаем левую часть формулы (19), используя численное решение уравнения (1), когда пульсациями самого мелкого масштаба являются $\varepsilon_{-4}, \dots, \varepsilon_{-6}$. Максимальный масштаб $\tau_l = -4$. Для масштабнo-инвариантной модели график имеет вид прямой (поскольку получена степенная зависимость) с тангенсом угла наклона $\chi = \Phi_0(2(1 - 2^{\alpha-1}) + D)/(2D \cos(\pi\alpha/2)) + \varphi_0$ к оси абсцисс. Результаты численной проверки для значений $\Phi_0 = 0,3$, $\Phi_0 = 0,6$, $\varphi_0 = 0$ приведены на рис. 4. Значения параметров $p_1 - p_2 = 1$, $y_2 - y_1 = 1$, где

$$\Omega_{\tau_{\hat{l}}} = \sum_i^3 \log_2 \left\langle \exp \left[- \sum_{\hat{l}}^{\hat{L}} \varphi(\mathbf{x}_j, \tau_{\hat{l}}) \delta\tau \right] \frac{\nabla_i p}{P_2 - P_1} \right\rangle \text{ — логарифм от расхода жидкости; } \alpha = 1,6;$$

$\beta = 1$; $\tau_{\hat{l}} = -6, -5, -4$. Если параметры Φ_0, φ_0 зависят от масштаба, то масштабная инвариантность отсутствует и зависимость логарифма расхода от логарифма l должна иметь вид ломаной, угол наклона к оси абсцисс каждого звена которой задается значениями параметров $\Phi_0(\tau_l), \varphi_0(\tau_l)$. Результаты расчета для значений параметров $\Phi_0(-4) = 0,3$;

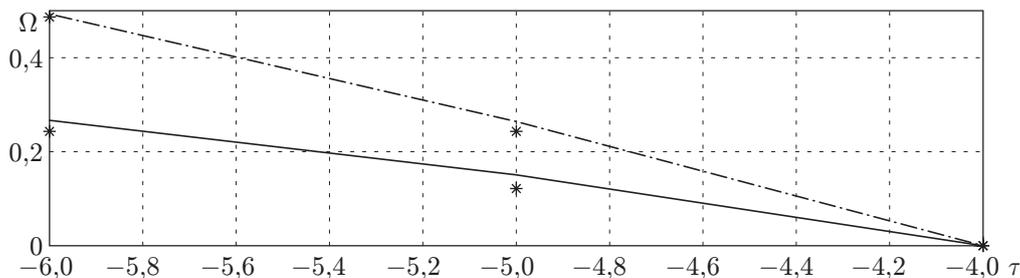


Рис. 4. Зависимость $\Omega(\tau)$ для масштабнo-инвариантной модели проводимости: точки — численное моделирование; сплошная линия — теоретические значения, полученные по формуле (19) для $\Phi_0 = 0,3$; штрихпунктирная линия — теоретические значения при $\Phi_0 = 0,6$

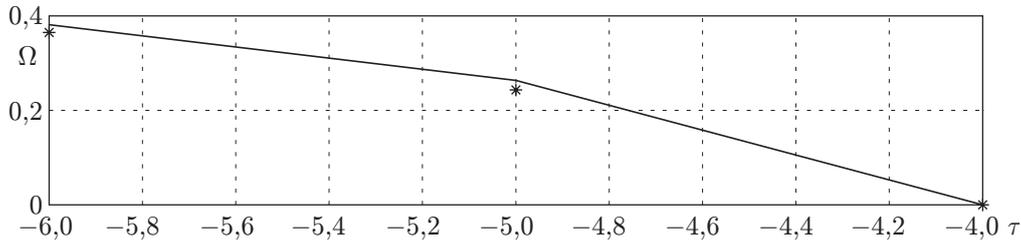


Рис. 5. Зависимость $\Omega(\tau)$ для модели проводимости, в которой не выполняется требование масштабной инвариантности:
 точки — численное моделирование; сплошная линия — значения, полученные по формуле (19)

$\Phi_0(-5) = 0,6$; $\Phi_0(-6) = 0,3$; $\varphi_0(i) = 0$ приведены на рис. 5. Отметим достаточно хорошее соответствие результата, полученного подсеточным моделированием, и результата, полученного с помощью численного моделирования.

Обсуждение. В настоящей работе получены формулы для вычисления эффективной проводимости (17), позволяющие учесть вклад мелкомасштабного компонента в вычисление средних характеристик, таких как, например, средний расход жидкости при течении через неоднородную пористую среду. Самым простым способом вычисления эффективных коэффициентов является использование теории возмущений, когда решение представляется в виде разложения по степеням некоторой амплитуды флуктуаций [2]. В рамках подобного подхода, как правило, приходится ограничиваться только низшими приближениями теории возмущений. Для улучшения теории возмущений применяется метод ренормализационной группы. Как показано в настоящей работе, идеи РГ Вилсона позволяют получить хороший результат не только для логарифмически нормальной модели проводимости [4], но и для проводимости, моделируемой логарифмически устойчивыми законами. Эффективные коэффициенты получены для устойчивых распределений параметров при $1 < \alpha \leq 2$, $\beta = 1$. Это объясняется тем, что в работе используется аппарат корреляционных функций. Если $-1 < \beta < 1$, то вторые моменты функции проводимости не существуют и решать задачу можно только используя аппарат функций распределения вероятности. Для устойчивых распределений явные аналитические выражения для плотностей вероятности (за редким исключением) тоже отсутствуют. Вариант, рассмотренный в данной работе, имеет некоторое экспериментальное подтверждение [1]. В случае масштабного подобия в среде эффективная формула преобразования (17) содержит в правой части константы. При отсутствии масштабного подобия константы заменяются на функции от масштаба. Если эти функции от масштаба известны (например, из эмпирических данных), то выведенные формулы полезны и в общем случае логарифмически устойчивой неоднородной среды. Прямая численная проверка при использовании пространственного осреднения дала неплохое соответствие теоретических формул и результатов численного эксперимента.

Приложение. Вычислим статистические средние поля проводимости. Характеристическая функция случайной величины в форме (B) [13] имеет вид

$$\ln \chi(t) = \sigma_B(it\mu_B - |t|^\alpha \omega_B(t, \alpha, \beta_B)),$$

где

$$\omega_B(t, \alpha, \beta_B) = \begin{cases} \exp(-i(\pi/2)\beta_B(\alpha - 2) \text{sign}(t)), & \alpha > 1, \\ -\beta_B(2/\pi) \ln |t|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Пусть $\alpha \neq 1$ и $g(t, \alpha, \beta_B)$ — плотность вероятности случайной величины ζ . Статистическое среднее случайной величины $e^{-b\zeta}$ равно

$$\begin{aligned} \langle \exp(-b\zeta) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-bt)g(t, \alpha, \beta_B) dt = \\ &= \int_0^{\infty} \exp(-bt)g(t, \alpha, \beta_B) dt + \int_0^{\infty} \exp(bt)g(t, \alpha, -\beta_B) dt. \quad (\text{П1}) \end{aligned}$$

Первый интеграл сходится при $\beta_B = 1$, $\alpha \geq 1$, так как подынтегральное выражение имеет множитель $\exp(-bt)$ и $g(t, \alpha, \beta_B)$ имеет асимптотическое разложение:

$$\begin{aligned} g(t, \alpha, 1) &\sim \frac{\alpha}{\pi t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha k)}{\Gamma(k)} t^{-k\alpha} \sin[\pi k(2 - \alpha)], \quad x \rightarrow \infty, \quad \alpha > 1, \\ g(t, \alpha, 1) &\sim \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} P_k(\ln x) x^{-k-1}, \end{aligned}$$

где P_k — полиномы степени k . Второй интеграл сходится при $\alpha \geq 1$, так как $g(t, \alpha, -1)$ имеет асимптотическое разложение

$$g(t, \alpha, -1) \sim \frac{(t/\alpha)^{(2-\alpha)/(2(\alpha-1))}}{\sqrt{2\pi\alpha|1-\alpha|}} \exp\left\{-|1-\alpha|\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\alpha/(\alpha-1)}\right\}, \quad x \rightarrow \infty.$$

При $0 < \alpha < 1$ все значения случайной величины ζ положительные и, следовательно, интеграл (П1) сходится. Поскольку сходимость интеграла (П1) доказана, можно ввести в подынтегральное выражение множитель $\exp[-(x/d)^2]$ ($d \rightarrow \infty$) и применить метод седловой точки [19] (седловая точка $t_0 = ib$). В результате получим

$$\langle \exp(-b\zeta) \rangle = \exp[-\sigma_B \mu_B b + \sigma_B b^\alpha]. \quad (\text{П2})$$

Используя формулу (П2) и принимая во внимание тот факт, что для $\zeta_{\mathbf{k}}$: $\mu = 0$, $\sigma = 1$, $\beta = 1$, $1 < \alpha < 2$ (параметры в форме B связаны с параметрами в форме A соотношениями $\beta = \beta_B = 1$, $\mu = \mu_B / \cos(\pi\alpha/2)$, $\sigma = \sigma_B \cos(\pi\alpha/2)$), получим для $\varepsilon(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(\mathbf{x}) \rangle &= \varepsilon_0 \left\langle \exp \left[-\delta\tau \ln 2 \left(\sum_{\hat{l}=\hat{l}_0}^{\hat{L}} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\Phi_0(\tau_{\hat{l}})}{2(\delta\tau \ln 2)^{\alpha-1}} \right)^{1/\alpha} a_{\mathbf{k}}^{\hat{l}} \zeta_{\mathbf{k}} + \varphi_0(\tau_{\hat{l}}) \right) \right] \right\rangle = \\ &= \prod_{\hat{l}=\hat{l}_0}^{\hat{L}} \left\langle \exp \left[-\delta\tau \ln 2 \left(\sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\Phi_0(\tau_{\hat{l}})}{2(\delta\tau \ln 2)^{\alpha-1}} \right)^{1/\alpha} a_{\mathbf{k}}^{\hat{l}} \zeta_{\mathbf{k}} + \varphi_0(\tau_{\hat{l}}) \right) \right] \right\rangle = \\ &= \prod_{\hat{l}=\hat{l}_0}^{\hat{L}} \exp \left[\frac{\Phi_0(\tau_{\hat{l}}) \delta\tau \ln 2}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right]^{-1} \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^{\hat{l}})^{\alpha} - \varphi_0(\tau_{\hat{l}}) \delta\tau \ln 2 \right] = \\ &= \varepsilon_0 \exp \left[-\frac{\delta\tau \ln 2}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right]^{-1} \sum_{\hat{l}=\hat{l}_0}^{\hat{L}} \Phi_0(\tau_{\hat{l}}) - \varphi_0(\tau_{\hat{l}}) \delta\tau \ln 2 \right]. \quad (\text{П3}) \end{aligned}$$

Если среда масштабно-инвариантна, то $\varphi_0(l)$, $\Phi_0(l)$ не зависят от l и средняя величина $\varepsilon(\mathbf{x})$ определяется по формуле

$$\langle \varepsilon(\mathbf{x}) \rangle = \varepsilon_0 \exp [-(\Phi_0 / (2 \cos(\pi\alpha/2)) + \varphi_0)(\ln L - \ln l_0)] = \varepsilon_0 (L/l_0)^{-(\Phi_0 / (2 \cos(\pi\alpha/2)) + \varphi_0)}.$$

Вычислим второй одноточечный момент для $\varepsilon(\mathbf{x})$, используя формулу (П2) (параметры устойчивых распределений в форме A):

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^2(\mathbf{x}) \rangle &= \varepsilon_0^2 \left\langle \exp \left[- \sum_{\hat{l}_0}^{\hat{L}} 2\varphi(\mathbf{x}, \tau_l) \delta\tau \ln 2 \right] \right\rangle = \\ &= \varepsilon_0^2 \exp \left[- 2\delta\tau \ln 2 \left(2^{\alpha-2} \left[\cos \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right]^{-1} \sum_{\hat{l}=\hat{l}_0}^{\hat{L}} \Phi_0(\tau_l) + \varphi_0(\tau_l) \right) \right]. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Bouffadel M. C., Lu S., Molz Fred J., et al. Multifractal scaling of the intrinsic permeability // *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 2000. V. 36, N 11. P. 3211–3222.
2. Швидлер М. И. Статистическая гидродинамика пористых сред. М.: Недра, 1985.
3. Dagan G. Flow and transport in porous formations. N. Y.: Springer-Verlag, 1989.
4. Кузьмин Г. А., Соболева О. Н. Моделирование фильтрации в пористых автомоделных средах // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 4. С. 115–126.
5. Кузьмин Г. А., Соболева О. Н. Моделирование фильтрации и вытеснения жидкости в пористых автомоделных средах // *Физическая мезомеханика*. 2002. Т. 5, № 5. С. 119–123.
6. Вилсон К., Когут Дж. Ренормализационная группа и ε -разложение. *Новости фундаментальной физики*. М.: Мир, 1975. Вып. 5.
7. Теодорович Э. В. Метод улучшенной теории возмущений при описании эффективной проницаемости случайно-неоднородной среды // *Прикл. математика и механика*. 2002. Т. 6, вып. 3. С. 448–456.
8. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.
9. Kolmogorov A. N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 13. P. 82–85.
10. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для независимых случайных величин. М.: Гостехтеоретиздат, 1949.
11. Kida S. Fractional Levy motion as a model for spatial variability in sedimentary rock // *Phys. Soc. Japan*. 1991. V. 60. P. 5–8.
12. Painter S., Paterson L. Log-stable distribution and intermittency of turbulence // *Geophys. Res. Lett.* 1994. V. 21. P. 2857–2860.
13. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983.
14. Samorodnitsky G., Taqqu M. S. Stable non-Gaussian random processes. N. Y.; London: Chapman-Hill, 1994.
15. Sahimi M. Flow phenomena in rocks: from continuum models, to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing // *Rev. Modern Phys.* 1993. V. 65, N 4. P. 1393–1534.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.

17. **Chambers J. M., Mallows C., Stuck B. W.** A method for simulating stable random variables // Journal of the American Statistical Association. 1976. V. 71, N 354. P. 340–344.
18. **Марчук Г. И.** Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
19. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.

*Поступила в редакцию 20/XII 2004 г.,
в окончательном варианте — 13/IV 2005 г.*
