

УДК 531.1.01:539.3

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Н. М. Бодунов, Г. В. Дружинин

Казанский государственный технический университет, 420111 Казань
E-mails: bodunov_nm@mail.ru, pla@pla.kstu-kai.ru

Для решения граничной задачи об осесимметричном деформировании изделий из трансверсально-изотропного материала предлагается численно-аналитический метод, основанный на аппроксимации искомого решения системой базисных функций. Приводится алгоритм построения полиномиальных функций на основе инвариантно-групповых решений.

Ключевые слова: композиционный материал, математическое моделирование, функция напряжений, напряженно-деформированное состояние, осесимметричная деформация, базисные функции.

Применение композиционных материалов (КМ) при проектировании несущих конструкций различного назначения требует разработки расчетных моделей и методов, учитывающих особенности структуры и поведения таких материалов [1]. Оценка напряженно-деформированного состояния изделий из КМ выполняется традиционными методами с использованием точных математических моделей на основе уравнений механики сплошной среды. Это позволяет исключить различные погрешности, обусловленные допущениями, используемыми в приближенных методиках расчета. При этом математические модели и алгоритмы должны быть удобными для реализации на компьютере. В настоящей работе рассматриваются однородные трансверсально-изотропные материалы, в каждой точке которых имеется плоскость изотропии (рис. 1). Детали из однонаправленных композиционных материалов (трубы, стержни, профили, оболочки и др.), в том числе тела вращения (рис. 2), часто используются в конструкциях современных летательных аппаратов.

Согласно предложенному в работе [2] алгоритму решения трехмерной задачи теории упругости для трансверсально-изотропной среды решение системы уравнений второго порядка в перемещениях сводится к решению дифференциальных уравнений в частных производных шестого (относительно компонент перемещения u , v) и пятого (относительно компоненты перемещения w в направлении l , перпендикулярном плоскости изотропии (см. рис. 1)) порядков. В работах [3–5] эти уравнения решались с использованием численно-аналитического подхода, основанного на аппроксимации искомого решения системой полиномиальных базисных функций. Недостатком данного подхода являются дополнительные вычисления, обусловленные необходимостью тождественного удовлетворения исходной системы дифференциальных уравнений в перемещениях за счет соответствующего подбора внутренних параметров при базисных функциях. В подходе, предложенном в настоящей работе, этот недостаток устранен.

Рассмотрим тело из упругого однородного трансверсально-изотропного материала (область Ω), ограниченное одной или несколькими коаксиальными поверхностями вра-

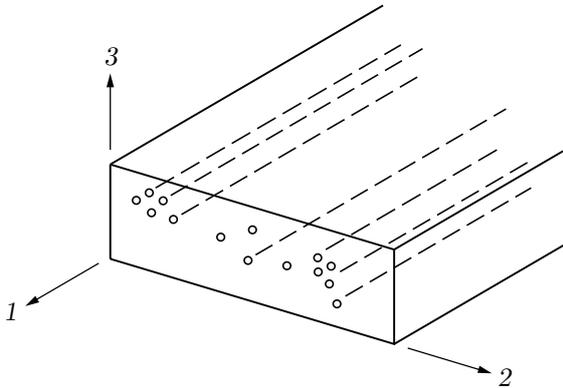


Рис. 1

Рис. 1. Модель трансверсально-изотропного однонаправленного композита:
1–3 — направления главных осей

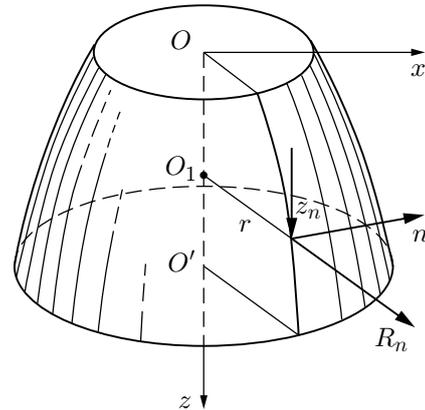


Рис. 2

Рис. 2. Модель трансверсально-изотропного тела вращения

щения и находящееся в равновесии под действием внешних усилий (объемными силами пренебрегается). Будем считать, что плоскости изотропии, проходящие через каждую точку тела, перпендикулярны его геометрической оси (оси вращения), а распределение усилий симметрично относительно этой оси. В силу симметрии в распределении усилий и упругих свойств радиальные сечения остаются плоскими и тело остается телом вращения и в деформированном состоянии, т. е. $u_r = u_r(r, z)$, $u_\theta = 0$, $w = w(r, z)$. Составляющие деформаций не зависят от θ и вычисляются по следующим формулам [6, 7]:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = 0. \quad (1)$$

В данном случае соотношения, связывающие компоненты тензоров напряжений и компоненты тензоров деформаций, принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z, & \varepsilon_\theta &= a_{12}\sigma_r + a_{11}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z, \\ \varepsilon_z &= a_{13}(\sigma_r + \sigma_\theta) + a_{33}\sigma_z, & \varepsilon_{rz} &= a_{44}\tau_{rz}, \end{aligned} \quad (2)$$

где a_{ij} — упругие постоянные материала; $a_{11} = 1/E$; $a_{12} = -\nu/E$; $a_{33} = 1/E'$; $a_{13} = -\nu'/E'$; $a_{44} = 1/G'$; $2(a_{11} - a_{12}) = [2(1 + \nu)]/E = 1/G$; E , E' — модули Юнга растяжения и сжатия в плоскости изотропии и в направлении, перпендикулярном к ней; ν — коэффициент Пуассона, характеризующий сужение материала в плоскости изотропии при растяжении в этой плоскости; ν' — коэффициент Пуассона, характеризующий сужение материала в направлении, нормальном к плоскости изотропии, при растяжении в этой плоскости; $G = E/[2(1 + \nu)]$; G' — модули сдвига для плоскостей изотропии и перпендикулярных (радиальных) им плоскостей.

Согласно работе [6] при осесимметричной деформации трансверсально-изотропного тела напряжения можно выразить через одну функцию напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{b}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right), & \sigma_\theta &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right), \\ \sigma_z &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{c}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right), & \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{c}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right), \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{z\theta} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$a = \frac{a_{13}(a_{11} - a_{12})}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}, \quad b = \frac{a_{13}(a_{13} + a_{44}) - a_{12}a_{33}}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2},$$

$$c = \frac{a_{13}(a_{11} - a_{12}) + a_{11}a_{44}}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}, \quad d = \frac{a_{11}^2 - a_{12}^2}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}.$$

Формулы (1)–(3) описывают напряженно-деформированное состояние в любой точке трансверсально-изотропного тела вращения. При этом функция напряжений φ должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\Delta_1 \Delta_2 \varphi \equiv \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + A \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{A}{r} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r \partial z^2} + B \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$\Delta_i = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{s_i^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (i = 1, 2); \quad (5)$$

$$s_1 = \sqrt{(a + c + \sqrt{(a + c)^2 - 4d}) / (2d)}, \quad s_2 = \sqrt{(a + c - \sqrt{(a + c)^2 - 4d}) / (2d)},$$

$$A = 1/s_1^2 + 1/s_2^2, \quad B = 1/(s_1^2 s_2^2).$$

Рассмотрим случай вещественных значений чисел s_1, s_2 .

Используя методику нахождения полиномиальных решений для канонических уравнений математической физики, основанную на разложении искомых решений по собственным (базисным) функциям [3–5], найдем полиномиальные решения уравнения (4) с переменными коэффициентами. Инвариантное решение уравнения (4) запишем в виде

$$\varphi(r, z) = r^\alpha J(\eta), \quad (6)$$

где $\eta = z/r$; α — произвольное действительное число. Подставляя соотношение (6) в (4), с учетом $r^{\alpha-6} \neq 0$ получаем

$$(\eta^4 + A\eta^2 + B)J^{IV} - (2\alpha - 5)(2\eta^3 + A\eta)J^{III} + [\eta^2(6(\alpha - 2)^2 - 1) + A(\alpha - 2)^2]J^{II} -$$

$$- (2\alpha - 3)[2(\alpha - 1)(\alpha - 2) - 1]\eta J^I + \alpha^2(\alpha - 2)^2 = 0, \quad (7)$$

где $J^I, J^{II}, J^{III}, J^{IV}$ — производные соответствующего порядка по переменной η . Решение уравнения (7) ищем в виде ряда

$$J(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^k. \quad (8)$$

Подставляя соотношение (8) в (7) и приравнявая коэффициенты ряда при одинаковых степенях η , находим рекуррентную формулу

$$c_{k+4} = -\frac{\Delta_k}{\Delta_0} \frac{1}{B} c_k - \frac{\Delta_{k+2}}{\Delta_1} \frac{A}{B} c_{k+2}, \quad (9)$$

где

$$\Delta_k = k(k-1)(k-2)(k-4\alpha+7) + k(k-1)[6(\alpha-2)^2 - 1] -$$

$$- k(2\alpha-3)[2(\alpha-1)(\alpha-2) - 1] + \alpha^2(\alpha-2)^2,$$

$$\Delta_{k+2} = (\alpha-k-2)^2, \quad \Delta_0 = (k+4)(k+3)(k+2)(k+1), \quad \Delta_1 = (k+4)(k+3).$$

Используя формулу (9), при $\alpha = k + 2$ можно получить решение в конечном виде

$$\begin{aligned} \varphi(r, z) = & \sum_{\alpha=2}^N A_{\alpha} r^{\alpha} P_k^{\alpha}(\eta) = A_2 r^2 (c_{02} + c_{22} \eta^2) + A_3 r^3 (c_{13} \eta + c_{33} \eta^3) + \\ & + A_4 r^4 \left[c_{04} \left(1 - \frac{8}{3B} \eta^4 \right) + c_{24} \left(\eta^2 - \frac{A}{3B} \eta^4 \right) \right] + \\ & + A_5 r^5 \left[c_{15} \left(\eta - \frac{8}{15B} \eta^5 \right) + c_{35} \left(\eta^3 - \frac{A}{5B} \eta^5 \right) \right] + \\ & + A_6 r^6 \left[c_{06} \left(1 - \frac{24}{B} \eta^4 + \frac{16A}{5B^2} \eta^6 \right) + c_{26} \left(\eta^2 - \frac{4A}{3B} \eta^4 + \frac{8}{45} \left(\frac{A^2}{B^2} - \frac{1}{B} \right) \eta^6 \right) \right] + \dots \\ & \dots + A_N r^N P_k^N(\eta). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $P_k^{\alpha}(\eta)$ — полиномы, при различных значениях α являющиеся общим решением уравнения (7); $c_{0\alpha}$, $c_{2\alpha}$ и $c_{1\alpha}$, $c_{3\alpha}$ — коэффициенты, формирующие начальный базис; A_{α} — подлежащие определению произвольные коэффициенты, количество которых зависит от выбора метода решения граничной задачи и оценки точности приближенного решения. Тривиальное решение $P_k^0(\eta) = A_0$ не рассматривается. Решения, представленные через трансцендентные функции, не учитываются, так как определялись только полиномиальные решения.

Частным случаем приведенных выше соотношений для трансверсально-изотропного тела являются соотношения для изотропного тела.

Рассмотрим представление решения поставленной задачи с помощью двух функций, которые должны удовлетворять уравнениям более низкого порядка. Введем функции $\varphi_1(r, z)$, $\varphi_2(r, z)$, удовлетворяющие уравнениям [6, 8]

$$\Delta_1 \varphi_1 = 0, \quad \Delta_2 \varphi_2 = 0, \quad (11)$$

где Δ_i — операторы (5). В данном случае выполняются все уравнения осесимметричного деформирования, а выражения для перемещений и напряжений имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_1 + \varphi_2), & u_z &= \frac{\partial}{\partial z} (k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2), \\ \sigma_r &= -\frac{A_{11} - A_{12}}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_1 + \varphi_2) - A_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [(1 + k_1) \varphi_1 + (1 + k_2) \varphi_2], \\ \sigma_{\theta} &= \frac{A_{11} - A_{12}}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} [(A_{13} k_1 - A_{12} \lambda_1^2) \varphi_1 + (A_{13} k_2 - A_{12} \lambda_2^2) \varphi_2], \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} [(A_{33} k_1 - A_{13} \lambda_1^2) \varphi_1 + (A_{33} k_2 - A_{13} \lambda_2^2) \varphi_2], \\ \tau_{rz} &= A_{44} \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} [(1 + k_1) \varphi_1 + (1 + k_2) \varphi_2]. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} k_i &= \frac{A_{11} \lambda_i^2 - A_{44}}{A_{13} + A_{44}} \quad (i = 1, 2), & A_{11} &= \frac{a_{33} a_{11} - a_{13}^2}{(a_{11} - a_{12}) e}, & A_{12} &= \frac{a_{13}^2 - a_{33} a_{12}}{(a_{11} - a_{12}) e}, \\ A_{13} &= -\frac{a_{13}}{e}, & A_{33} &= -\frac{a_{11} + a_{12}}{e}, & A_{44} &= \frac{1}{a_{44}}, & A_{11} - A_{12} &= \frac{1}{a_{11} - a_{12}}, \\ e &= (a_{11} + a_{12}) a_{33} - 2a_{13}^2, & \lambda_1 &= 1/s_1, & \lambda_2 &= 1/s_2. \end{aligned}$$

Инвариантное решение уравнений (11) запишем в виде

$$\varphi(r, z) = (a_1 r + b_1)^\alpha J(\eta), \quad \eta = \frac{a_2 z + b_2}{a_1 r + b_1} \quad (13)$$

($\alpha, a_1, b_1, a_2, b_2$ — произвольные действительные числа). Заметим, что выражение (13) можно использовать и для решения уравнения (4). Подставляя (13) в (11), с учетом $(a_1 r + b_1)^{\alpha-2} \neq 0$ получаем

$$(\eta^2 + D^2/s_i^2)J^{\text{II}} - [2(\alpha - 1) + H]\eta J^{\text{I}} + [\alpha(\alpha - 1) + H\alpha]J = 0, \quad (14)$$

где $D^2 = a_2^2/a_1^2$; $H = 1/a_1$. Решение уравнения (14) будем искать в виде ряда (8). Подставляя соотношение (8) в (14) и приравнявая коэффициенты ряда при одинаковых степенях η , находим рекуррентную формулу

$$c_{k+2} = \frac{-k(k-1) + k[2(\alpha-1) + H] - \alpha(\alpha-1 + H)}{(k+2)(k+1)} \left(\frac{s_i}{D}\right)^2 c_k, \quad (15)$$

при $\alpha = k$ позволяющую получить решение уравнений (11) в конечном виде

$$\begin{aligned} \varphi(r, z) = & \sum_{\alpha=0}^N A_\alpha U_k^\alpha(r, z) = A_0 + A_1(a_2 z + b_2) + \\ & + A_2 c_{02} \left[(a_1 r + b_1)^2 - \frac{(H+1)s_i^2}{D^2} (a_2 z + b_2)^2 \right] + \\ & + A_3 c_{13} \left[(a_1 r + b_1)^2 (a_2 z + b_2) - \frac{(H+1)s_i^2}{3D^2} (a_2 z + b_2)^3 \right] + \\ & + A_4 c_{04} \left[(a_1 r + b_1)^4 - \frac{2(H+3)s_i^2}{D^2} (a_2 z + b_2)^2 (a_1 r + b_1)^2 + \frac{(H+1)(H+3)s_i^4}{3D^4} (a_2 z + b_2)^4 \right] + \\ & + A_5 c_{15} \left[(a_1 r + b_1)^4 (a_2 z + b_2) - \frac{(2H+6)s_i^2}{3D^2} (a_2 z + b_2)^3 (a_1 r + b_1)^2 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{(H+1)(2H+6)s_i^4}{30D^4} (a_2 z + b_2)^5 \right] + \\ & + A_6 c_{06} \left[(a_1 r + b_1)^6 - \frac{3(H+5)s_i^2}{D^2} (a_2 z + b_2)^2 (a_1 r + b_1)^4 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{(H+3)(H+5)s_i^4}{D^4} (a_2 z + b_2)^4 (a_1 r + b_1)^2 + \frac{(H+1)(H+3)(H+5)s_i^6}{15D^6} (a_2 z + b_2)^6 \right] + \dots \\ & \dots + A_N U^N(r, z), \quad (16) \end{aligned}$$

где $U_k^\alpha(r, z) = (a_1 r + b_1)^\alpha P_k^\alpha(\eta)$, $P_k^\alpha(\eta)$ — полиномы, при различных значениях α являющиеся общим решением уравнения (14).

При любых N и A_α выражения (10), (16) тождественно удовлетворяют уравнениям (4), (11) в области Ω , но не удовлетворяют граничным условиям. Вид полиномов $P^\alpha(\eta)$ в выражениях (10), (16) зависит от выбора произвольных параметров $c_{0\alpha}$, $c_{1\alpha}$ и внутренних параметров a_1, b_1, a_2, b_2 в выражении (16). Эти параметры могут быть различными для каждого полинома $P^\alpha(\eta)$ и выбираются из физических, геометрических или математических соображений, например их можно выбрать таким образом, чтобы система линейных алгебраических уравнений (в случае, если граничные условия являются линейными), к которой редуцируется исходная задача, не была плохо обусловленной. Для удобства можно положить $c_{0\alpha} = c_{1\alpha} = a_1 = a_2 = 1, b_1 = b_2 = 0$.

Рассмотрим другие решения. Существует способ построения новых решений из некоторых известных решений, не требующий отыскания конечных преобразований, но применимый лишь в случае линейных однородных уравнений. Для таких уравнений решения, зависящие от параметров, порождают новые решения при дифференцировании по этим параметрам [9].

Для решения частных задач об осесимметричной деформации, в частности о деформации полого цилиндра из трансверсально-изотропного материала, можно использовать функции напряжений вида [7]

$$\varphi(r, z) = (B_{0m}z^m + B_{m2}r^2z^{m-2} + \dots + B_{mk}r^kz^{m-k} + \dots) \ln r + \\ + C_{0m}z^m + C_{m2}r^2z^{m-2} + \dots + C_{mk}r^kz^{m-k} + \dots, \quad (17)$$

где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$; $k = 0, 2, 4, 6, \dots, m$ для четных m и $k = 0, 2, 4, 6, \dots, m-1$ для нечетных m . В случае сплошного цилиндра функции напряжений имеют вид

$$\varphi(r, z) = A_{0m}z^m + A_{m2}r^2z^{m-2} + \dots + A_{mk}r^kz^{m-k} + \dots, \quad (18)$$

где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$; $k = 0, 2, 4, 6, \dots, m$ для четных m и $k = 0, 2, 4, 6, \dots, m-1$ для нечетных m . В изотропном случае существуют решения уравнений (11) вида

$$\varphi(r, z) = c_0 \left(\ln r + \frac{1}{2 \cdot 1} + b_0 \right) z^n + c_1 \left(\ln r + \frac{1}{2 \cdot 2} + b_1 \right) z^{n-2} r^2 + \\ + c_2 \left(\ln r + \frac{1}{2 \cdot 3} + b_2 \right) z^{n-4} r^4 + \dots, \quad (19)$$

где $b_0 = 1$; $b_j = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^j \frac{2t+1}{t(t+1)}$.

В силу линейности исходных уравнений решения задач можно строить, комбинируя выражения (16)–(19).

В случае осесимметричной деформации тела из изотропного материала перемещения точек выражаются через две функции Тимпе [7]

$$u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{2(1-2\nu)} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{2(1-2\nu)} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\psi}{r},$$

которые должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (20)$$

Решение первого уравнения системы (20) является частным случаем решения уравнений (11), решение второго уравнения системы (20) будем искать по рассмотренной выше методике. Выбирая $\psi = r^\alpha J(\eta)$ ($\eta = z/r$), для редуцированного уравнения $(\eta^2 + 1)J^{\text{II}} - (2\alpha - 3)\eta J^{\text{I}} + \alpha(\alpha - 2)J = 0$ получаем рекуррентную формулу $c_{k+2} = -\frac{(\alpha - k)(\alpha - k - 2)}{(k + 2)(k + 1)} c_k$, позволяющую получить конечное решение в виде

$$\psi(r, z) = \sum_{\alpha=0}^N A_\alpha U_k^\alpha(r, z) = A_0 + A_1 c_{11} z + A_2 c_{02} r^2 + A_3 c_{13} r^2 z + A_4 c_{04} (r^4 - 4r^2 z^2) + \\ + A_5 c_{15} \left(r^4 z - \frac{4}{3} z^3 r^2 \right) + A_6 c_{06} (r^6 - 12r^4 z^2 + 8r^2 z^4) + \dots + A_N U^N(r, z), \quad (21)$$

где $U_k^\alpha(r, z) = r^\alpha P_k^\alpha(\eta)$.

Следует отметить, что при $s_i = a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = b_2 = 0$ и соответствующем выборе значений $c_{0\alpha}$, $c_{1\alpha}$ в решении (16) это решение совпадает с решением первого уравнения системы (20), приведенным в работе [7]. Кроме того, за счет выбора параметров $c_{0\alpha}$, $c_{1\alpha}$ решение (21) совпадает с решением второго уравнения системы (20), представленным в [7].

В случае заданных на боковой поверхности усилий R_n , Z_n граничные условия сводятся к условиям на меридиане поверхности вращения:

$$\sigma_r \cos(n, r) + \tau_{rz} \cos(n, z) = R_n, \quad \tau_{rz} \cos(n, r) + \sigma_z \cos(n, z) = Z_n. \quad (22)$$

При заданных на поверхностях перемещениях $g_1(l)$, $g_2(l)$ имеем условия

$$u_r = g_1(l), \quad w = g_2(l). \quad (23)$$

В обоих случаях заданные усилия и перемещения считаются функциями дуги l меридиана радиального сечения. Коэффициенты разложения A_α , обеспечивающие наилучшую аппроксимацию граничных условий (22), (23), находим методом коллокаций или методом взвешенных невязок [5].

Рассмотрим следующий пример. Вычислим напряженное состояние полого цилиндра под действием постоянной радиальной нагрузки на боковые цилиндрические поверхности (задача Ламе) [7]. Граничные условия имеют вид

$$\sigma_r(a, z) = p_a, \quad \sigma_r(b, z) = p_b, \quad \tau_{rz}(a, z) = \tau_{rz}(b, z) = 0.$$

Здесь a , b — внутренний и внешний радиусы цилиндра; p_a , p_b — нормальные радиальные нагрузки на внутреннюю и внешнюю цилиндрическую поверхность соответственно. Решение задачи представим в виде

$$\varphi_0 = A_1 \left(\frac{z^2}{2} - \frac{r^2}{4} \right) + A_3 \left(\ln r + \frac{1}{2} \right), \quad \psi_0 = A_2 \frac{r^2}{2} - A_4.$$

Отсюда следует

$$u_r = (A_2 - A_1) \frac{r}{2} + \frac{1}{r} \left[A_3 - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} A_4 \right], \quad u_z = A_1 z.$$

Подстановка этих соотношений в уравнения (2) позволяет получить решение задачи в напряжениях:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 2G \left(A_1 + \frac{\nu}{1-2\nu} A_2 \right), \\ \sigma_\theta &= 2G \left\{ -\frac{1}{2} A_1 + \frac{\nu}{2(1-2\nu)} A_2 + \frac{1}{r^2} \left[A_3 - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} A_4 \right] \right\}, \\ \sigma_r &= 2G \left\{ -\frac{1}{2} A_1 + \frac{\nu}{2(1-2\nu)} A_2 - \frac{1}{r^2} \left[A_3 - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} A_4 \right] \right\}, \quad \tau_{rz} = 0. \end{aligned}$$

В случае плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$) с учетом граничных условий имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\nu}{G(1+\nu)} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}, & \sigma_r &= \frac{p_b b^2 - p_a a^2}{b^2 - a^2} - \frac{(p_b - p_a) b^2 a^2}{(b^2 - a^2) r^2}, \\ A_2 &= -\frac{1-2\nu}{G(1+\nu)} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}, & \sigma_\theta &= \frac{p_b b^2 - p_a a^2}{b^2 - a^2} + \frac{(p_b - p_a) b^2 a^2}{(b^2 - a^2) r^2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим другой пример. Вычислим напряженное состояние полого цилиндра под действием линейно изменяющейся по оси радиальной нагрузки на внутреннюю и внешнюю боковые поверхности [7]. Граничные условия имеют вид

$$\sigma_r(a, z) = p_a z, \quad \sigma_r(b, z) = p_b z, \quad \tau_{rz}(a, z) = \tau_{rz}(b, z) = 0,$$

где $p_a = \text{const}$; $p_b = \text{const}$. Решение ищем в виде

$$\varphi_1 = A_1 \left(\frac{z^3}{6} - \frac{r^2 z}{4} \right) + A_3 \left(\ln r + \frac{1}{2} \right), \quad \psi_1 = 2A_2 r^2 z + A_4 (-z).$$

Аналогично предыдущему примеру находим перемещения

$$u_r = -\frac{p_a}{E} \frac{a^2(1-\nu)rz}{b^2-a^2} \left(1 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{b^2}{r^2} \right) + \frac{p_b}{E} \frac{b^2(1-\nu)rz}{b^2-a^2} \left(1 - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{a^2}{r^2} \right),$$

$$u_z = \frac{p_a}{E} \frac{a^2}{b^2-a^2} \left[\nu z^2 + \frac{(1-\nu)r^2}{2} + (1+\nu)b^2 \left(\ln \frac{r}{b} + \frac{1}{2} \right) \right] -$$

$$- \frac{p_b}{E} \frac{b^2}{b^2-a^2} \left[\nu z^2 + \frac{(1-\nu)r^2}{2} + (1+\nu)a^2 \left(\ln \frac{r}{b} + \frac{1}{2} \right) \right]$$

и напряжения

$$\sigma_\theta = -p_a z \frac{a^2}{b^2-a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) + p_b z \frac{b^2}{b^2-a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right),$$

$$\sigma_r = -p_a z \frac{a^2}{b^2-a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) + p_b z \frac{b^2}{b^2-a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \tau_{rz} = 0.$$

Рассмотрим трансверсально-изотропное тело, которое деформируется усилиями, вызывающими деформацию общего вида, зависящую от трех координат [10]. Введем декартовы координаты, направив ось по нормали к плоскости изотропии. В этом случае имеем

$$u = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad w = \alpha \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right),$$

где $\alpha = A_{11}/(A_{13} + A_{44})$; $\gamma = A_{44}/(A_{13} + A_{44})$; A_{ij} — упругие постоянные [6].

Функции φ , ψ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta_1 \Delta_2 \varphi = 0, \quad \Delta_0 \psi = 0, \quad (24)$$

где $\Delta_i = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{s_i^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ($i = 0, 1, 2$); $s_0^2 = A_{66}/A_{44}$; s_1, s_2 — параметры, введенные ранее. Полиномиальные решения уравнений (24) приведены в работах [3, 5].

Рассмотренный подход позволяет получить достаточно простой алгоритм для последовательного построения полиномиальных решений любой степени α по рекуррентным формулам (9), (15). При этом существенно уменьшается размерность алгебраической системы уравнений относительно неизвестных коэффициентов, так как аппроксимация решения строится только на границе области. Полученные результаты могут быть использованы для решения прикладных задач механики деформируемого твердого тела из анизотропного материала, в том числе для решения задач параметрической идентификации и обратных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мэттьюз Р. Композиционные материалы. Механика и технология / Р. Мэттьюз, Р. Ролингс. М.: Техносфера, 2004.
2. Бодунов Н. М., Дружинин Г. В., Закиров И. М. Об одном алгоритме решения трехмерной задачи теории упругости для трансверсально-изотропной среды // Изв. вузов. Авиац. техника. 2007. № 1. С. 18–21.

3. **Дружинин Г. В., Бодунов Н. М.** Приближенный метод решения двумерной задачи теории упругости // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 179–185.
4. **Дружинин Г. В.** Построение базисных функций и их применение к краевым задачам механики сплошной среды // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 6. С. 35–43.
5. **Дружинин Г. В.** Базисные функции в приближенных решениях краевых задач / Г. В. Дружинин, И. М. Закиров, Н. М. Бодунов. Казань: Изд-во “Фэн”, 2000.
6. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.
7. **Колтунов М. А.** Упругость и прочность цилиндрических тел / М. А. Колтунов, Ю. Н. Васильев, В. А. Черных. М.: Высш. шк., 1975.
8. **Баблюян А. А.** Об одной задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра конечной длины из трансверсально-изотропного тела // Докл. АН АрмССР. 1961. Т. 32, № 4. С. 189–195.
9. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
10. **Новацкий В.** Функции напряжений в пространственных проблемах упругого тела с трансверсальной изотропией // Бюл. Пол. АН (отд. 4). 1954. № 1. С. 23–34.

*Поступила в редакцию 19/VI 2008 г.,
в окончательном варианте — 12/XII 2008 г.*
