УДК 519.677: 004.021

Теоретическое обоснование единого итерационного процесса совместной количественной оценки трудностей заданий и уровней подготовки студентов

И.С. Шрайфель, И.Н. Елисеев

Институт сферы обслуживания и предпринимательства (филиал), ФГБОУ ВПО "Донской государственный технический университет", ул. Шевченко, 147, г. Шахты, Ростовская обл., 346500

E-mails: shraifel17@mail.ru (Шрайфель И.С.), ein@sssu.ru (Елисеев И.Н.)

Шрайфель И.С., Елисеев И.Н. Теоретическое обоснование единого итерационного процесса совместной количественной оценки трудностей заданий и уровней подготовки студентов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 1. — С. 107–123.

Исследован итерационный процесс совместного оценивания уровней подготовки студентов и трудностей заданий диагностического средства по дихотомической матрице ответов $A = (a_{ij})$ размера $N \times M$, учитывающего вклад заданий разной трудности в получаемые оценки. Показано, что не для всякой матрицы A существуют бесконечные итерационные последовательности, а в случае существования они не всегда сходятся. Получены широкие достаточные условия их сходимости, состоящие в том, что: 1) матрица A содержит не менее трёх различных столбцов; 2) если расположить столбцы A в порядке неубывания столбцовых сумм, то для любого положения вертикальной разграничительной линии между столбцами найдётся строка, в которой левее линии имеется хотя бы одна единица, а правее линии — хотя бы один ноль. Констатировано, что полученная по результатам реального тестирования матрица ответов A практически достоверно удовлетворяет этим двум условиям. Изучены свойства таких матриц A. В частности, установлена равносильность вышеуказанных условий примитивности квадратной матрицы B порядка M с элементами $b_{ij} = \sum_{\ell=1}^{N} (1 - a_{\ell i}) a_{\ell j}$. Средствами матричного анализа доказано, что примитивность B обеспечивает сходимость исследуемых итерационных последовательностей, а также независимость их пределов от выбора начального приближения. Оценена скорость сходимости этих последовательностей и найдены их пределы.

DOI: 10.15372/SJNM20160109

Ключевые слова: *итерационный процесс, итерационная последовательность, трудность задания, уровень подготовки студента, дихотомическая матрица ответов.*

Shreifel I.S., Eliseev I.N. Theoretical basis of the iterative process of the joint assessment of difficulties in tasks and levels of training students // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 1. — P. 107–123.

In this paper, we study the iterative process of the joint numerical assessment of levels of training students and difficulties in tasks of diagnostic tools using the dichotomous response matrix A of $N \times M$ size, with allowance for the contribution of tasks of different difficulty to the assessments obtained. It is shown that not for any matrix A there exist infinite iterative sequences, and in the case of their existence, they do not always converge. A wide range of sufficient conditions for their convergence have been obtained, which are based on the following: 1) matrix A contains at least three different columns; 2) if one places the columns of A in non-decreasing order of column sums, then for any position of the vertical dividing line between the columns there exists a row, which has, at least, one unity to the left of the line, and at least one zero to the right of the line. It is established that the response matrix A obtained as a result of testing reliability satisfies these two conditions. The properties of such matrices have been studied. In particular, the equivalence of the above conditions of primitiveness of the square matrix B of order M with the entries $b_{ij} = \sum_{\ell=1}^{N} (1 - a_{\ell i}) a_{\ell j}$ has been proved. Using the matrix analysis we have proved that the primitiveness of the matrix B ensures the convergence of iterative sequences, as well as independence of their limits of the choice of the initial approximation. We have estimated the rate of convergence of these sequences and found their limits.

Keywords: *iterative process, an iterative sequence, difficulty of test questions, level of training students, dichotomous response matrix.*

1. Постановка задачи

Эффективное управление учебным процессом в образовательных учреждениях профессионального образования существенно зависит от того, насколько достоверной является информация о результатах обучения. Под достоверностью информации понимается, прежде всего, объективность оценки уровня подготовки обучаемых. В сложившейся к настоящему времени практике обработки результатов тестирования уровень подготовки тестируемых (УПТ) и уровень трудности заданий (УТЗ) диагностического средства (теста) вычисляются в общем итерационном процессе по индивидуальным баллам X_i участников тестирования и индивидуальным баллам заданий Y_j, которые рассчитываются по дихотомической матрице результатов тестирования (матрице ответов) [1–9]. При таком подходе учитывается только количество выполненных студентом заданий и количество студентов, верно выполнивших конкретное задание. Поэтому два тестируемых, имеющих разные уровни подготовки, вносят одинаковый вклад в характеристику трудности задания. А два задания разной трудности, выполненные участником тестирования, вносят одинаковый вклад в оценку его уровня подготовки. Из-за этого погрешность количественной меры трудности заданий и уровня подготовки тестируемых увеличивается.

Авторами работы [10] был предложен эффективный совместный итерационный процесс расчета УПТ и УТЗ с учётом разного вклада заданий разной трудности и тестируемых разного уровня подготовки в получаемые оценки. Предложенный подход был обоснован экспериментально на базе результатов централизованного тестирования школьников. Было установлено, что погрешности расчёта УПТ и УТЗ могут достигать достаточно больших значений (до 30 % и более для школьников со средним уровнем подготовки и для заданий средней трудности). Данный результат является свидетельством эффективности использования предложенного подхода для обработки результатов тестирования, но для его практического применения требуется теоретическое обоснование совместного итерационного процесса оценки УПТ и УТЗ, которое авторами работы [10] сделано не было.

Рассмотрим стандартную процедуру тестирования N испытуемых, каждый из которых выполняет M автономных заданий теста. Результат a_{ij} выполнения j-го задания i-м тестируемым оценивается по двухбалльной шкале: если испытуемый справился с заданием, то $a_{ij} = 1$, и $a_{ij} = 0$ в противном случае, $i = 1, 2, \ldots, N$; $j = 1, 2, \ldots, M$. Результаты тестирования представляются так называемой дихотомической матрицей ответов A размера $N \times M$ с элементами a_{ij}. В работе [10] был предложен следующий итерационный процесс совместного оценивания УПТ и УТЗ. Положим $\bar{h}^* = (h_1^*, h_2^*, \ldots, h_M^*)$, $\bar{g}^* = (g_1^*, g_1^*, \ldots, g_N^*)$, где $\bar{h}^*$ — вектор УТЗ, а $\bar{g}^*$ — вектор УПТ, подлежащие определению (здесь и далее обозначение i-й координаты вектора получается из обозначения самого вектора удалением надчёркивания и добавлением нижнего индекса i).

Матрицу X будем называть *положительной (неотрицательной)*, если все её элементы положительны (соответственно, *неотрицательны*). Эти же два термина будем использовать по отношению к многомерному вектору $\bar{x}$; в краткой записи положительность (неотрицательность) матрицы или вектора выглядят так: $X > 0$, $X \geq 0$, $\bar{x} > 0$, $\bar{x} \geq 0$.

Пусть задано начальное приближение $\bar{h}^{(0)} \geq 0$, $\bar{h}^{(0)} \neq \bar{0}$ к вектору $\bar{h}^*$ или начальное приближение $\bar{g}^{(0)} \geq 0$, $\bar{g}^{(0)} \neq \bar{0}$ к вектору $\bar{g}^*$ (координаты исходного вектора неотрицательны, причём хотя бы одна из них положительна). Тогда путём попеременного применения рекуррентных соотношений:

$$g_i^{(k)} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{M} a_{ij} h_j^{(k)}}{\sum\limits_{j=1}^{M} h_j^{(k)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{1}$$

$$h_j^{(k+1)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} (1 - a_{ij}) g_i^{(k)}}{\sum\limits_{i=1}^{N} g_i^{(k)}}, \quad j = 1, 2, \ldots, M, \tag{2}$$

строится смешанная последовательность

$$(\bar{h}^{(0)}), \bar{g}^{(0)}, \bar{h}^{(1)}, \bar{g}^{(1)}, \bar{h}^{(2)}, \bar{g}^{(2)}, \ldots \tag{3}$$

приближений к искомым векторам $\bar{h}^*$ и $\bar{g}^*$. Из формул (2), (3) очевидным образом вытекает принадлежность отрезку [0;1] координат сначала второго и далее всех последующих векторов последовательности (3) (при условии, конечно, их существования). В работе [10] приведены типичные, как сообщают её авторы, результаты апробации итерационной процедуры (1), (2) на данных централизованного тестирования 1998–1999 годов; при этом в качестве начального условия использовались только векторы с единичными координатами. На этом основании авторы [10] пришли к выводу о сходимости, причём достаточно быстрой, подпоследовательностей $\bar{h}^{(k)}$ и $\bar{g}^{(k)}$ последовательности (3) (насколько можно судить по таблице 1 из [10], скорость сходимости первой подпоследовательности характеризуется неравенством $\max_{1 \le j \le M} \left| h_j^{(k+1)} - h_j^{(k)} \right| < 0,1 \max_{1 \le j \le M} \left| h_j^{(k)} - h_j^{(k-1)} \right|$). Кроме того, они констатировали независимость пределов $\bar{h}^*$ и $\bar{g}^*$ этих подпоследовательностей от выбора одного из двух начальных условий $\bar{h}^{(0)} = (1, 1, \ldots, 1)$ или $\bar{g}^{(0)} = (1, 1, \ldots, 1)$.

В настоящей работе приведены примеры, показывающие, что последовательность (3) не всегда можно продолжить до бесконечности, а в случае существования бесконечной последовательности (3) её подпоследовательности $\bar{h}^{(k)}$ и $\bar{g}^{(k)}$ могут расходиться. Первым из этих примеров является дихотомическая матрица A с одинаковыми элементами. Пусть, например, $a_{ij} = 0$, $1 \le i \le N$, $1 \le j \le M$; $\bar{h}^{(0)}$ — произвольное начальное приближение, $\bar{h}^{(0)} \ge 0$, $\bar{h}^{(0)} \ne \bar{0}$. Тогда из формулы (1) при $k = 0$ следует равенство $\bar{g}^{(0)} = \bar{0}$, не позволяющее выполнить уже следующую итерацию, т. е. найти вектор $\bar{h}^{(1)}$ по формуле (2) при $k = 0$. Если же в качестве начального условия взят неотрицательный ненулевой вектор $\bar{g}^{(0)}$, то с помощью формул (1), (2) удаётся найти лишь приближения $\bar{h}^{(1)} = (1, 1, \ldots, 1)$ и $\bar{g}^{(1)} = \bar{0}$, на чём итерационный процесс обрывается. И в случае $a_{ij} = 1$, $1 \le i \le N$, $1 \le j \le M$, в последовательности (3) существуют только два или три вектора $(\bar{h}^{(0)})$, $\bar{g}^{(0)}$, $\bar{h}^{(1)} = \bar{0}$.

Приведём пример дихотомической матрицы, для которой последовательности $\bar{h}^{(k)}$, $\bar{g}^{(k)}$ могут расходиться. Предварительно выразим координаты вектора $\bar{h}^{(k+1)}$ через координаты исходного вектора, если таковым является $\bar{h}^{(0)}$. С этой целью подставим выражение (1) в (2):

$$h_j^{(k+1)} = \frac{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N}(1-a_{ij})\sum\limits_{l=1}^{M} a_{il}h_l^{(k)}}{\sum\limits_{l=1}^{M} h_l^{(k)}}}{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{l=1}^{M} a_{il}h_l^{(k)}}{\sum\limits_{l=1}^{M} h_l^{(k)}}}.$$

Сократив эту дробь на $\left(\sum_{l=1}^{M} h_l^{(k)}\right)^{-1}$ и приняв обозначения:

$$b_{jl} = \sum_{i=1}^{N}(1-a_{ij})a_{il}, \tag{4}$$

$$c_l = \sum_{i=1}^{N} a_{il}, \tag{5}$$

получаем

$$h_j^{(k+1)} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{M} b_{jl}h_l^{(k)}}{\sum\limits_{l=1}^{M} c_l h_l^{(k)}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots; \quad j = 1, 2, \ldots, M. \tag{6}$$

Квадратную матрицу $B = (b_{jl})$ порядка M будем называть ассоциированной с дихотомической матрицей A. Введём обозначения $C = (c_l)$ (C — матрица размера $1 \times M$),

$$B^{(k)} = (b_{jl}^{(k)}) = B^k, \quad C^{(k)} = (c_l^{(k)}) = CB^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

(таким образом, $B^{(1)} = B$, $C^{(1)} = C$). Методом математической индукции докажем, что

$$h_j^{(k)} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{M} b_{jl}^{(k)}h_l^{(0)}}{\sum\limits_{l=1}^{M} c_l^{(k)}h_l^{(0)}}, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad j = 1, 2, \ldots, M. \tag{8}$$

Прежде всего заметим, что равенство (8), взятое при $k = 1$, фактически совпадает с соотношением (6) при $k = 0$. Теперь предположим, что равенство (8) справедливо при некотором $k \geq 1$. Тогда на основании (6) и (8) приходим к тому же равенству с увеличенным на 1 значением k:

$$h_j^{(k+1)} = \frac{\dfrac{\sum\limits_{l=1}^{M} b_{jl}\sum\limits_{m=1}^{M} b_{lm}^{(k)}h_m^{(0)}}{\sum\limits_{m=1}^{M} c_m^{(k)}h_m^{(0)}}}{\dfrac{\sum\limits_{l=1}^{M} c_l\sum\limits_{m=1}^{M} b_{lm}^{(k)}h_m^{(0)}}{\sum\limits_{m=1}^{M} c_m^{(k)}h_m^{(0)}}} = \frac{\sum\limits_{m=1}^{M} h_m^{(0)}\sum\limits_{l=1}^{M} b_{jl}b_{lm}^{(k)}}{\sum\limits_{m=1}^{M} h_m^{(0)}\sum\limits_{l=1}^{M} c_l b_{lm}^{(k)}} = \frac{\sum\limits_{m=1}^{M} b_{jm}^{(k+1)}h_m^{(0)}}{\sum\limits_{m=1}^{M} c_m^{(k+1)}h_m^{(0)}}.$$

Итак, соотношение (8) установлено. Рассмотрим две дихотомические квадратные матрицы A и D порядка $2n$ с элементами $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow i, j \leq n$ или $i, j > n$ и $d_{ij} = 1 - a_{ij}$, $1 \leq i,\ j \leq 2n$. Считая A матрицей ответов, для соответствующих ей матриц (7) докажем равенства:

$$B^{(k)} = n^{2k-1}D, \quad k = 1, 3, 5, \ldots; \quad B^{(k)} = n^{2k-1}A, \quad k = 2, 4, 6, \ldots; \tag{9}$$

$$C^{(k)} = n^{2k-1}F, \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{10}$$

здесь F — матрица размера $1 \times 2n$, все элементы которой равны 1. Соотношение (9) докажем методом математической индукции. В данном случае $N = M = 2n$, поэтому

$$b_{jl} = \sum_{i=1}^{n}(1 - a_{ij})a_{il} + \sum_{i=n+1}^{2n}(1 - a_{ij})a_{il}.$$

Если $1 \le j \le n$, $n+1 \le l \le 2n$, то в первой сумме $a_{ij} = 1$, а во второй сумме $a_{ij} = 0$, $a_{il} = 1$; значит, $b_{jl} = \sum_{i=n+1}^{2n} 1 = n$. В случае $n+1 \le j \le 2n$, $1 \le l \le n$ $b_{jl} = \sum_{i=1}^{n}(1-0)\cdot 1 + \sum_{i=n+1}^{2n}(1-1)\cdot 0 = n$. Наконец, при $1 \le j$, $l \le n$ $b_{jl} = \sum_{i=1}^{n}(1-1)\cdot 1 + \sum_{i=n+1}^{2n}(1-0)\cdot 0 = 0$, а если $n+1 \le j$, $l \le 2n$, $b_{jl} = \sum_{i=1}^{n}(1-0)\cdot 0 + \sum_{i=n+1}^{2n}(1-1)\cdot 1 = 0$. Во всех четырёх случаях $b_{jl} = b_{jl}^{(1)} = nd_{jl}$; этим доказано первое из равенств (9). Пусть теперь для некоторого $m \ge 1$ выполнены равенства из (9), соответствующие значениям $1 \le k \le m$. В частности, это означает, что $B = nD$, $B^{(m)} = n^{2m-1}D$ при нечётном m и $B^{(m)} = n^{2m-1}A$ при чётном m. В первом случае получаем $B^{(m+1)} = BB^{(m)} = nDn^{2m-1}D = n^{2m}D^2 = n^{2(m+1)-1}A$, во втором — $B^{(m+1)} = BB^{(m)} = nDn^{2m-1}A = n^{2m}DA = n^{2(m+1)-1}D$ (здесь использованы легко проверяемые равенства $D^2 = nA$, $DA = nD$). Этим равенства (9) доказаны. Найдём элементы матрицы $C^{(1)} = C$: $c_l = \sum_{i=1}^{2n} a_{il} = n$, $l = 1, 2, \ldots, 2n$. Очевидно, при $k = 1$ равенство (10) выполнено: $C^{(1)} = nF$. При $k \ge 2$, учитывая выражения (9), получаем $C^{(k)} = CB^{(k-1)} = Cn^{2(k-1)-1}A = n^{2k-3}CA = n^{2k-1}F$ при нечётных k и $C^{(k)} = CB^{(k-1)} = Cn^{2(k-1)-1}D = n^{2k-3}CD = n^{2k-1}F$ при чётных k; равенство (10) установлено. Для любого ненулевого начального вектора $\bar{h}^{(0)} \ge 0$ и всех $k \ge 1$ найдём координаты вектора $\bar{h}^{(k)}$ по формуле (8) с помощью равенств (9), (10). В случае нечётного k имеем

$$h_j^{(k)} = \frac{n^{2k-1}\sum\limits_{l=1}^{2n} d_{jl}h_l^{(0)}}{n^{2k-1}\sum\limits_{l=1}^{2n} h_l^{(0)}} = \frac{\sum\limits_{l=n+1}^{2n} h_l^{(0)}}{\sum\limits_{l=1}^{2n} h_l^{(0)}}$$

при $1 \le j \le n$, а если $n+1 \le j \le 2n$, то

$$h_j^{(k)} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{n} h_l^{(0)}}{\sum\limits_{l=1}^{2n} h_l^{(0)}}.$$

Для чётных k получаем

$$h_j^{(k)} = \frac{n^{2k-1}\sum\limits_{l=1}^{2n} a_{jl}h_l^{(0)}}{n^{2k-1}\sum\limits_{l=1}^{2n} h_l^{(0)}} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{n} h_l^{(0)}}{\sum\limits_{l=1}^{2n} h_l^{(0)}}$$

при $1 \le j \le n$, и

$$h_j^{(k)} = \frac{\sum\limits_{l=n+1}^{2n} h_l^{(0)}}{\sum\limits_{l=1}^{2n} h_l^{(0)}}$$

при $n+1 \le j \le 2n$. Как видим, в случае $\sum_{l=1}^{n} h_l^{(0)} \ne \sum_{l=n+1}^{2n} h_l^{(0)}$ ни при каком $1 \le j \le 2n$ не существует предела $\lim_{k\to\infty} h_j^{(k)}$.

Из приведённых примеров видно, что, действительно, последовательность (3) не всегда можно продолжить до бесконечности, а в случае её существования подпоследовательности $\bar{h}^{(k)}$ и $\bar{g}^{(k)}$ могут расходиться.

2. Решение задачи

Целью работы является теоретическое обоснование единого итерационного процесса совместной количественной оценки трудностей заданий диагностического средства и уровней подготовки студентов.

Для достижения цели в классе всех дихотомических матриц размера $N \times M$ выделен подкласс, охватывающий практически все дихотомические матрицы ответов, получаемые в результате тестирования обучаемых. Этот подкласс обладает следующими важными свойствами:

1) для всякой матрицы подкласса и любого, за некоторыми неизбежными исключениями, неотрицательного ненулевого начального вектора последовательность (3) развёртывается до бесконечности, причём

2) существуют пределы $\bar{h}^* = \lim_{k\to\infty} \bar{h}^{(k)}$, $\bar{g}^* = \lim_{k\to\infty} \bar{g}^{(k)}$, не зависящие от этого вектора, а

3) последовательности $\max_{1\le j\le M} \left|h_j^{(k)} - h_j^{(*)}\right|$ и $\max_{1\le i\le N} \left|g_i^{(k)} - g_i^*\right|$ стремятся к нулю не медленней некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Кроме того, получены формулы для вычисления пределов $\bar{h}^*$, $\bar{g}^*$.

Перечисленные свойства теоретически подтверждают пригодность итерационной процедуры (1), (2) для обработки дихотомических результатов тестирования. Больше того, свойство 2) позволяет отказаться от ограничений по выбору начального приближения при её использовании, за исключением описанных ниже ограничений по существу.

Приведём два используемых далее понятия матричного анализа. Квадратная матрица $B = (b_{ij})$ порядка M называется *разложимой*, если $M = 1$, $b_{11} = 0$, или если для некоторого собственного подмножества Q множества $\{1, 2, \ldots, M\}$ справедлива импликация $i \in Q$, $1 \le j \le M$, $j \notin Q \Rightarrow b_{ij} = 0$, и *неразложимой* — в противном случае. Квадратная матрица называется *примитивной*, если она неотрицательна, неразложима и обладает только одним собственным значением с максимальным модулем. Известно следующее свойство примитивных матриц [11, теорема 8.5.1], играющее решающую роль в нашем исследовании. Пусть B — примитивная матрица порядка M, $\rho\,(>0)$ — её спектральный радиус, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_M)^\top$ и $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_M)^\top$ — собственные векторы матриц B и $B^\top$ соответственно, найденные для их общего собственного значения ρ, и такие, что $X, Y > 0$, $X^\top Y = 1$; μ — наибольший из модулей собственных значений матрицы B, отличных от ρ, $\dfrac{\mu}{\rho} < r < 1$ (положительность ρ и существование положительных вектор-столбцов X, Y таких, что $BX = \rho X$, $B^\top Y = \rho Y$, вытекают из [11, теорема 8.4.4], а неравенство $\mu < \rho$ — из определения примитивной матрицы). Тогда для некоторой постоянной β выполнены неравенства:

$$\max_{1\le j,l\le M}\left|\rho^{-k}b_{jl}^{(k)}-x_jy_l\right|<\beta r^k,\qquad k=1,2,\ldots \tag{11}$$

(здесь $b_{jl}^{(k)}$ — элементы матрицы $B^{(k)} = B^k$). Отсюда следует (поэлементная) сходимость последовательности $\rho^{-k}B^{(k)}$ к матрице $L = XY^\top$. Кроме того, для обоснования перечисленных выше результатов исследования нам понадобится графовый критерий примитивности матрицы: пусть квадратная матрица B порядка M неотрицательна и неразложима, $\Gamma(B)$ — M-вершинный ориентированный граф матрицы B (т. е. орграф, в котором дуга, направленная от i-й вершины к j-й, присутствует тогда и только тогда, когда $b_{ij} > 0$). Обозначим через L_i множество длин всевозможных путей в $\Gamma(B)$, начинающихся и заканчивающихся в вершине P_i, и пусть g_i — наибольший общий делитель всех чисел из L_i. Тогда матрица B примитивна в том и только в том случае, если $g_i = 1$ при каждом $1 \le i \le M$ [11, теорема 8.5.3]. Более того, в силу теоремы Романовского, всегда выполнены равенства $g_1 = g_2 = \ldots = g_M$ [11, замечание 8.5.4], поэтому слова "при каждом" в предыдущем предложении можно заменить на "при некотором".

Всюду далее $A = (a_{ij})$ — дихотомическая матрица размера $N \times M$, где $M \ge 2$, $B = (b_{ij})$ — ассоциированная с A квадратная матрица порядка M. Будем говорить, что l-й столбец матрицы A *мажорирует* её j-й столбец, если имеет место импликация $1 \le i \le N$, $a_{ij} = 1 \Rightarrow a_{il} = 1$. Для столбцовых сумм матрицы A будем использовать обозначение $S_j = \sum_{i=1}^N a_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots, M$. Докажем несколько элементарных свойств ассоциированной матрицы, полезных для дальнейшего рассмотрения.

Предложение 1.

а) *Матрица B неотрицательна.*

Зафиксируем произвольные номера $1 \le j$, $l \le M$. Тогда:

б) *элемент b_{jl} матрицы B положителен, если и только если существует номер $1 \le i \le N$ такой, что $a_{ij} = 0$, $a_{il} = 1$;*

в) *для выполнения равенства $b_{jl} = 0$ необходимо и достаточно, чтобы j-й столбец матрицы A мажорировал её l-й столбец;*

г) *в случае совпадения j-го и l-го столбцов матрицы A (т. е. их взаимной мажорации) $b_{jl} = b_{lj} = 0$. В частности, так будет при $j = l : b_{jj} = 0$;*

д) *если j-й столбец матрицы A мажорирует её l-й столбец, а l-й столбец не мажорирует j-й, то $b_{jl} = 0 < b_{lj}$;*

е) *пусть ни один из столбцов матрицы A с номерами j, l не мажорирует другой (такие столбцы будем называть скрещивающимися). Тогда b_{jl}, $b_{lj} > 0$;*

ж) *если $S_j < S_l$, то $b_{jl} > 0$;*

з) *пусть $S_j = S_l$, но j-й и l-й столбцы матрицы A не совпадают. Тогда они скрещиваются и, как следствие, b_{jl}, $b_{lj} > 0$.*

Доказательство.

а) Неотрицательность матрицы B сразу следует из очевидной неотрицательности всех слагаемых суммы (4);

б) положительность суммы (4) равносильна наличию в ней слагаемого $(1-a_{ij})\,a_{il} = 1$, т. е. существованию номера $1 \le i \le N$ с указанными в пункте б) свойствами;

в) в силу утверждения б), равенство $b_{jl} = 0$ означает, что для каждого $1 \le i \le N$ $a_{ij} = 1$ или $a_{ij} = a_{il} = 0$, т. е. j-й столбец матрицы A мажорирует её l-й столбец;

г), д), е) — прямые следствия утверждения в);

ж) допустим, что $S_j < S_l$, но $b_{jl} = 0$. Тогда на основании утверждения в) получаем неравенства $a_{ij} \geq a_{il}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, сложение которых приводит к противоречию: $\sum_{i=1}^{N} a_{ij} = S_j \geq \sum_{i=1}^{N} a_{il} = S_l$. Следовательно, $b_{jl} > 0$;

з) несовпадение указанных в п. з) предложения 1 столбцов означает, что при некотором $1 \leq i \leq N$ $a_{ij} \neq a_{il}$. Пусть для определенности $a_{ij} = 1$, $a_{il} = 0$. Тогда равенство $S_j = S_l$ влечёт неравенство $N > 1$. Вычеркнув из матрицы A i-ю строку, получаем дихотомическую матрицу A' со столбцовыми суммами $S'_j < S'_l$. Последовательно применив к ней утверждения ж) и б), доказываем существование номера $1 \leq m \leq N$ такого, что $a_{mj} = 0$, $a_{ml} = 1$. Значит, j-й и l-й столбцы матрицы A скрещиваются.

Введём два понятия. Будем называть матрицу A *матрицей первого типа*, если множество всех её столбцов можно разделить на два непустых подмножества таким образом, что в A не найдётся пары скрещивающихся столбцов, принадлежащих разным подмножествам. В противном случае отнесём матрицу A ко *второму типу*, что значит: каким бы ни было разбиение множества всех столбцов матрицы на два непустых подмножества, можно выбрать по одному представителю каждого подмножества так, чтобы они скрещивались. Следующие два предложения, а также их следствия дают удобную характеризацию матриц каждого из двух данных типов.

Предложение 2. *Для принадлежности матрицы A первому типу необходимо и достаточно, чтобы в ней можно было выбрать от одного до $(M-1)$ столбцов так, чтобы любой выбранный столбец мажорировал каждый невыбранный столбец.*

Доказательство.
Достаточность. Пусть P — множество номеров всех выбранных столбцов, $Q = \{1, 2, \ldots, M\} \backslash P$. Тогда $P, Q \neq \oslash$, причём для любых $j \in P$, $l \in Q$ j-й и l-й столбцы матрицы A не скрещиваются. Следовательно, A — матрица первого типа.
Необходимость. Пусть A — матрица первого типа, т. е. существуют непустые множества $U_1 \subset \{1, 2, \ldots, M\}$, $U_2 = \{1, 2, \ldots, M\} \backslash U_1$ такие, что для любых $j \in U_1$, $l \in U_2$, по крайней мере, один из столбцов с номерами j, l мажорирует другой. Положим $S = \max_{1 \leq k \leq M} S_k$, и пусть V — множество всех номеров $1 \leq k \leq M$, для которых $S_k = S$. Имеются две возможности: 1) множество V пересекается с каждым из множеств U_1, U_2; 2) $V \subset U_1$ или $V \subset U_2$. В первом случае все столбцы с номерами из V одинаковы. В самом деле, допустим, что это не так. Тогда имеются номера $m, n \in V$ такие, что m-й и n-й столбцы матрицы A не совпадают. В силу утверждения з) предложения 1, эти столбцы скрещиваются, и поэтому $m, n \in U_i$ при некотором $1 \leq i \leq 2$. Выбрав какой-либо столбец A с номером $p \in V \cap U_{3-i}$, заметим, что он не совпадает, по крайней мере, с одним из столбцов с номерами m, n. Пусть, например, различны m-й и p-й столбцы. Тогда, согласно з), эти столбцы скрещиваются, что противоречит заданию множеств U_1, U_2. Итак, все столбцы матрицы A с номерами из V совпадают. Зафиксируем какие-либо номера $p_i \in V \cap U_i$, $i = 1, 2$. Для каждого номера $1 \leq m \leq M$, $m \notin V$, найдётся номер $1 \leq i \leq 2$ такой, что $m \in U_i$. Хотя бы один из столбцов с номерами m, p_{3-i} мажорирует другой, причём $S_m < S = S_{p_{3-i}}$; отсюда, в силу утверждений ж) и в) предложения 1, вытекает мажорация p_{3-i}-м столбцом матрицы A её m-го столбца. Ввиду совпадения столбцов A с номерами из V, это же можно сказать и о k-м столбце при всех $k \in V$. Пусть l — число элементов множества V ($l \geq 1$). В случае $l < M$ выберем столбцы с номерами из V; если же $l = M$, достаточно выбрать лишь один (произвольный) столбец множества V. В обоих случаях предложенный выбор удовлетворяет условию из предложения 2.

Рассмотрим второй случай. Будем считать, что $V \subset U_1$. Пусть W — множество всех номеров $k \in U_1 \backslash V$ таких, что k-й столбец матрицы A мажорирует каждый её столбец с номером из U_2. Приняв обозначения $P_1 = V \cup W$, $P_2 = \{1, 2, \ldots, M\} \backslash P_1$, докажем справедливость импликации $k \in P_1, m \in P_2 \Rightarrow k$-й столбец матрицы A мажорирует её m-й столбец. Для этого достаточно установить, что при замене в ней P_1 на W, P_2 на U_2 или P_1 на V, P_2 на U_2, или P_2 на $U_1 \cap P_2$ получаются верные импликации. При первой замене это сразу следует из определения множества W, при второй — из импликации $k \in V$, $1 \leq m \leq M$, $m \notin V \Rightarrow S_k = S > S_m$ и мажорации хотя бы одним из столбцов с номерами $k \in U_1$, $m \in U_2$ другого. Рассмотрим третью замену. Для всякого $m \in U_1 \cap P_2$ существует номер $n \in U_2$ такой, что m-й столбец не мажорирует n-й. Но тогда n-й столбец необходимо мажорирует m-й; кроме того, фактически уже показано, что любой столбец с номером $k \in P_1$ мажорирует n-й столбец. В силу очевидной транзитивности отношения мажорации, k-й столбец мажорирует и m-й столбец, что завершает доказательство рассматриваемой импликации. Осталось заметить, что из включений $\oslash \neq V \subset P_1$, $\oslash \neq U_2 \subset P_2$ вытекает непустота множеств P_1, P_2. Выбор столбцов с номерами из P_1 удовлетворяет условию предложения и завершает его доказательство. □

Следствие 1. *Матрица A относится ко второму типу, если и только если для любого разбиения множества её столбцов на два непустых подмножества в каждом из этих подмножеств найдётся столбец, не мажорирующий хотя бы один столбец другого подмножества.*

Предложение 3. *Пусть матрица $Z = (z_{ij})$ получена из матрицы A перестановкой её столбцов такой, что $\sum_{i=1}^{N} z_{ij} \leq \sum_{i=1}^{N} z_{i,j+1}$, $j = 1, 2, \ldots, M-1$. Матрица A относится к первому типу тогда и только тогда, когда существует номер $1 \leq k \leq M-1$, для которого выполнена импликация*

$$1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq k < l \leq M, \quad z_{ij} = 1 \Rightarrow z_{il} = 1. \tag{12}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что при перестановке столбцов матрицы множество её столбцов остаётся прежним. Следовательно, типы дихотомических матриц A и Z совпадают. Пусть при некотором $1 \leq k \leq M-1$ имеет место импликация (12). Переписав её в виде $j \in \{1, 2, \ldots, k\}\,(\neq \oslash)$, $l \in \{k+1, k+2, \ldots, M\}\,(\neq \oslash) \Rightarrow l$-й столбец матрицы Z мажорирует j-й столбец Z, сразу же приходим к заключению о принадлежности Z (а значит, и A) первому типу. Обратно, пусть A — матрица первого типа. В силу предложения 2, найдутся номер $1 \leq k \leq M-1$, k — элементное множество P и $(M-k)$ — элементное множество Q такие, что $P \cup Q = \{1, 2, \ldots, M\}$, причём любой столбец матрицы A с номером из Q мажорирует каждый её столбец с номером из P. Отсюда следует, что $p = \max_{i \in P} S_i \leq q = \min_{i \in Q} S_i$. В случае $p < q$ множество столбцов A с номерами из P совпадает с множеством первых k столбцов матрицы Z; в этой ситуации импликация (12) оказывается верной. Покажем, что в случае $p = q$ все столбцы матрицы A с суммой элементов p одинаковы. Допустим, что это не так; тогда найдутся номера $i \in P$, $j \in Q$, для которых $S_i = S_j = p$, но i-й столбец матрицы A отличен от её j-го столбца. В силу утверждения з) предложения 1, эти столбцы скрещиваются, что противоречит выбору множеств P и Q. Нужное нам утверждение доказано. Множество первых k столбцов матрицы Z можно разбить на две части — множество всех столбцов матрицы A с суммами элементов $S_j < p$ и множество (не всех) одинаковых столбцов A, для которых $S_j = p$. Множество номеров в матрице A этих последних столбцов может содержаться или не содержаться в P; это не влияет на вид матрицы Z, поэтому импликация (12) выполнена в любом случае. □

Отметим, что при совпадении некоторых столбцовых сумм матрицы A соответствующая ей матрица Z может определяться неоднозначно. Предложение 3 показывает, что в этом случае существование номера k, для которого верна импликация (12), не зависит от задания матрицы Z.

Следствие 2. *Матрица A относится ко второму типу в том и только в том случае, если для каждого $1 \leq k \leq M-1$ имеются номера $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq k < l \leq M$ такие, что $z_{ij} = 1$, $z_{il} = 0$.*

Предложение 4. *Матрица B неразложима, если и только если A является матрицей второго типа.*

Доказательство. Воспользовавшись предложением 2 и утверждением в) предложения 1, получаем цепочку равносильных утверждений: A — матрица первого типа $\Leftrightarrow$ существует разбиение множества $\{1, 2, \ldots, M\}$ на непустые подмножества P, Q такие, что каждый столбец матрицы A с номером из Q мажорирует все её столбцы с номерами из $P \Leftrightarrow$ для некоторого разбиения $\{P, Q\}$ множества $\{1, 2, \ldots, M\}$, где $P, Q \neq \oslash$, и для любой пары номеров $j \in P$, $\ell \in Q$ выполнено равенство $b_{\ell j} = 0 \Leftrightarrow$ матрица B разложима (множества P, Q из второго и третьего звеньев цепочки одни и те же). Предложение 4 эквивалентно доказанной нами равносильности первого и четвёртого звеньев приведённой цепочки. $\square$

Предложение 5. *Для примитивности матрицы B необходимо и достаточно, чтобы матрица A содержала не менее трёх попарно различных столбцов и была матрицей второго типа.*

Доказательство.
Достаточность. Пусть A — матрица второго типа, в которой имеются как минимум три различных столбца. Прежде всего отметим неотрицательность и неразложимость матрицы B (первая утверждается пунктом а) предложения 1, а вторая — предложением 4). Упорядоченную тройку столбцов дихотомической матрицы назовем *подходящей*, если второй столбец тройки скрещивается с остальными двумя её столбцами, а третий столбец тройки не мажорирует первый. Очевидно, столбцы любой подходящей тройки попарно различны. Докажем, что, во-первых, из столбцов матрицы A можно составить подходящую тройку, и, во-вторых, такая возможность влечёт примитивность матрицы B. Согласно определению матрицы второго типа, существует номер $2 \leq k \leq M$ такой, что первый и k-й столбцы матрицы A скрещиваются. Обозначим через P множество номеров всех столбцов этой матрицы, совпадающих с первым или k-м её столбцом, и пусть $Q = \{1, 2, \ldots, M\} \backslash P$. Среди столбцов матрицы A с номерами из P имеются лишь два различных, поэтому $Q \neq \oslash$. Вновь воспользуемся принадлежностью A второму типу: существует номер $\ell \in Q$ такой, что ℓ-й столбец A скрещивается с некоторым столбцом A, номер которого принадлежит P. Это означает, что ℓ-й столбец скрещивается с первым или k-м столбцом. Пусть, для определённости, скрещиваются первый и ℓ-й столбцы. Поскольку ℓ-й и k-й столбцы различны, по крайней мере один из них не мажорирует другой; пусть это будет ℓ-й столбец. Тогда $(k, 1, \ell)$ есть символическая запись подходящей тройки столбцов. На основании предложения 1 получаем неравенства $b_{1k}, b_{k1}, b_{1\ell}, b_{\ell 1}, b_{\ell k} > 0$, из которых вытекает вложение $\{3\} \cup \{2, 4, 6, \ldots\} \subset L_1$ (L_i — обозначение из приведённого выше графового критерия примитивности матрицы). В самом деле, $(1, \ell, k, 1)$ даёт пример ориентированного пути длины 3, а $(1, k, 1, k, \ldots, 1, k, 1)$ — пример ориентированного

пути длины $2n$ с началом и концом в первой вершине орграфа $\Gamma(B)$ (здесь n может быть любым натуральным числом). Следовательно, любые два элемента множества L_1 на числовой оси разделяет расстояние, не большее 2. Отсюда вытекает неравенство $g_1 \leq 2$, где g_1 — наибольший общий делитель чисел множества L_1. При этом $g_1 \neq 2$, ввиду принадлежности $3 \in L_I$. Стало быть, $g_1 = 1$, и согласно графовому критерию в усиленной формулировке, матрица B примитивна.

Необходимость. Примитивность матрицы B по определению предполагает её неразложимость, которая, в свою очередь, влечёт принадлежность матрицы A второму типу (предложение 4). Осталось показать, что в матрице A можно найти три попарно различных столбца. Допустим, что это не так, т. е. в A имеются два столбца (не ограничивая общности, можно считать их номерами 1 и 2), обладающие тем свойством, что (в случае $M \geq 3$) всякий другой столбец матрицы A совпадает с первым или вторым её столбцом. Пусть верны k из следующих двух утверждений: "i-й столбец матрицы A мажорирует её $(3-i)$-й столбец", $i = 1, 2$. Рассмотрим три логически возможных случая.

1) $k = 2$. Тогда все столбцы матрицы A одинаковы, а матрица B является нулевой и, следовательно, разложимой (для такого вывода достаточно обращения в нуль её элементов $b_{12}, b_{13}, \ldots, b_{1\mathrm{M}}$). Приступая к рассмотрению оставшихся двух случаев, обозначим через T_i множество номеров всех столбцов матрицы A, совпадающих с её i-м столбцом, $i = 1, 2$. Имеем $T_1, T_2 \neq \oslash$, $T_1 \cup T_2 = \{1, 2, \ldots, \mathrm{M}\}$, причём ввиду несовпадения первых двух столбцов A при $k < 2$, $T_1 \cap T_2 = \oslash$.

2) $k = 1$, т. е. при некотором $1 \leq i \leq 2$ i-й столбец матрицы A мажорирует её $(3-i)$-й столбец, причём эти столбцы различаются. Тогда $b_{j\ell} = 0$ при всех $j \in T_i, \ell \in T_{3-i},$ и мы вновь приходим к выводу о разложимости B.

3) $k = 0$, т. е. первые два столбца матрицы A скрещиваются. Ввиду неотрицательности и неразложимости матрицы B, к ней применим графовый критерий примитивности. Поскольку $1 \in T_1$ последовательность $(1, f_1, f_2, \ldots, f_n, 1)$ задаёт ориентированный путь в орграфе $\Gamma(B)$ тогда и только тогда, когда $f_n \in T_2$ и $f_i \in T_{\lambda(j)+1}, j = 1, 2, \ldots, n$, где $\lambda(j)$ — остаток от деления числа j на 2. В частности, при $j = n$ имеем $f_n \in T_{\lambda(n)+1} = T_2$, откуда вытекает равенство $\lambda(n) = 1$, т. е. чётность длины $(n+1)$ указанного пути. С другой стороны, для каждого положительного чётного ℓ в $\Gamma(B)$ существует ориентированный путь $(1, 2, 1, 2, \ldots, 2, 1)$ длины ℓ с началом и концом 1. Следовательно, $L_1 = \{2, 4, 6, \ldots\}$, а наибольший общий делитель g_1 всех чисел из L_1 равен 2. Неравенство $g_1 > 1$ означает, что матрица B не является примитивной. Итак, при $k = 2, 1, 0$ мы пришли к противоречию с примитивностью (в двух первых случаях — даже с неразложимостью) матрицы B, что устанавливает существование по меньшей мере трёх попарно несовпадающих столбцов матрицы A. Предложение доказано. $\square$

Всевозможные матрицы второго типа размера $N \times M$ не менее чем с тремя различными столбцами и образуют подкласс множества всех дихотомических матриц того же размера, о котором шла речь в начале статьи. Обоснуем высказанное там же утверждение о том, что практически все дихотомические матрицы ответов, получаемые в результате тестирования обучаемых, относятся к этому подклассу. Дихотомическая матрица ответов A, отражающая результаты реального тестирования, содержит несколько десятков столбцов и, как правило, гораздо большее число строк, доходящее иногда до нескольких сотен и даже тысяч. Понятно, что в этом случае крайне маловероятно совпадение профилей ответов даже на два тестовых задания, не говоря уже о массовом совпадении таких профилей, когда среди столбцов матрицы A имеется не более двух различных. Не вызывает сомнений и практическая невозможность выделения по итогам тестирования нескольких (не менее одного, но не всех) тестовых заданий таким образом, чтобы *всякий* испытуемый, справившийся хотя бы с одним невыделенным заданием, успешно выполнил и *все* выделенные задания. С учётом предложений 2, 5 сказанное означает, что при проведении тестирования принадлежность полученной матрицы ответов A рассматриваемому подклассу, а значит, и примитивность ассоциированной с ней матрицы B практически гарантированы. Осталось проверить выполнение свойств подкласса 1) – 3), а также получить формулы для вычисления пределов $\bar h^{\,*}$, $\bar g^{\,*}$ итерационных последовательностей $\bar h^{\,(k)}$, $\bar g^{\,(k)}$, построенных для произвольной матрицы подкласса.

Итак, пусть A — матрица подкласса; далее наряду с матрицей B будем использовать матрицы (7) и положительные величины ρ, r, x_i, y_i $(1 \le i \le M)$ из упомянутой выше [11, теорема 8.5.1]. Зафиксировав произвольный неотрицательный ненулевой вектор $\bar h^{\,(0)} = (h_1^{(0)}, h_2^{(0)}, \ldots, h_M^{(0)})$, докажем существование бесконечной последовательности (3). Обратим внимание на то, что принадлежность матрицы A второму типу влечёт наличие в каждом её столбце хотя бы одной единицы, в строке которой имеется по крайней мере один ноль: если бы в A нашёлся столбец, не удовлетворяющий этому условию, то любой другой столбец мажорировал бы данный столбец, что невозможно для матрицы второго типа. Пусть номер $1 \le k \le$ M таков, что $h_k^{(0)} > 0$. Тогда $\sum_{j=1}^{M} h_j^{(0)} > 0$, и по формуле (1) при $k = 0$ можно вычислить оценки $g_i^{(0)} \ge 0$, $1 \le i \le N$. Более того, существуют номера $1 \le \ell \le N$, $1 \le m \le M$, для которых $a_{\ell k} = 1$, $a_{\ell m} = 0$, откуда следует положительность $g_\ell^{(0)}$. Теперь неравенство $\sum_{i=1}^{N} g_i^{(0)} > 0$ позволяет найти оценки $h_j^{(1)}$ по формуле (2) при $k = 0$; при этом будет выполнено неравенство $h_m^{(1)} > 0$, что даст возможность получить очередной набор оценок $g_i^{(1)}$, и т. д. Таким образом, последовательность (3) может быть продолжена до бесконечности. Зададим M функций M^2 переменных

$$f_j(t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{MM}) = \frac{\sum\limits_{l=1}^{M} \sum\limits_{m=1}^{M} b_{ml} h_l^{(0)} t_{jm}}{\sum\limits_{l=1}^{M} \sum\limits_{m=1}^{M} c_m h_l^{(0)} t_{ml}}, \quad j = 1, 2, \ldots, M. \tag{13}$$

Покажем, что множество $R_+^{M^2}$ всех положительных векторов пространства R^{M^2} является частью области определения каждой из них. Так как в матрице A нет нулевых столбцов, элементы (5) матрицы C положительны. Значит, в случае $t_{m\ell} > 0$, $1 \le \ell, m \le M$, все слагаемые в знаменателе дроби (13) неотрицательны, причём не все они равны нулю. Следовательно, этот знаменатель положителен, и функции (13) определены на $R_+^{M^2}$. Рассмотрим последовательность точек $P_k\big(\rho^{1-k} b_{11}^{(k-1)}, \rho^{1-k} b_{12}^{(k-1)}, \ldots, \rho^{1-k} b_{MM}^{(k-1)}\big)$, $k = 2, 3,$ множества R^{M^2}. Заметив, что функция f_j не меняется при умножении всех её аргументов на одно и то же неравное нулю число, представим величины $h_j^{(k)}$ в виде её значений. Придадим правой части (8) форму

$$\frac{\sum\limits_{l=1}^{M} \sum\limits_{m=1}^{M} b_{jm}^{(k-1)} b_{ml} h_l^{(0)}}{\sum\limits_{l=1}^{M} \sum\limits_{m=1}^{M} c_m b_{ml}^{(k-1)} h_l^{(0)}},$$

тогда станут очевидны равенства $h_j^{(k)} = f_j(b_{11}^{(k-1)}, b_{12}^{(k-1)}, \ldots, b_{MM}^{(k-1)})$ и выражения:

$$h_j^{(k)} = f_j(P_k), \quad k = 2, 3, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots, M. \tag{14}$$

Теперь вычислим значение f_j в точке $P_0(x_1 y_1, x_1 y_2, \ldots, x_M y_M) \in R_+^{M^2}$:

$$f_j(P_0)=\frac{\sum\limits_{l=1}^{M}\sum\limits_{m=1}^{M}b_{ml}h_l^{(0)}x_jy_m}{\sum\limits_{l=1}^{M}\sum\limits_{m=1}^{M}c_mh_l^{(0)}x_my_l}=\frac{x_j\sum\limits_{l=1}^{M}h_l^{(0)}\sum\limits_{m=1}^{M}b_{ml}y_m}{\sum\limits_{l=1}^{M}h_l^{(0)}y_l\sum\limits_{m=1}^{M}c_mx_m}=\frac{x_j\sum\limits_{l=1}^{M}h_l^{(0)}\rho y_l}{\sum\limits_{l=1}^{M}h_l^{(0)}y_l\sum\limits_{m=1}^{M}c_mx_m};$$

здесь использовано определение Y как собственного вектора матрицы $B^\top$, отвечающего её собственному значению ρ. Таким образом,

$$f_j(P_0)=\frac{\rho x_j}{\sum\limits_{m=1}^{M}c_mx_m},\quad 1\le j\le M. \tag{15}$$

В силу примитивности ассоциированной с A матрицы B, найдётся положительная постоянная β, для которой выполнены неравенства (11). Зафиксируем какой-либо номер

$$K>\max\left(1;1+\log_r\frac{\min\limits_{1\le i\le M}x_i\min\limits_{1\le i\le M}y_i}{2\beta}\right)$$

и зададим последовательность вложенных, ввиду принадлежности $r\in(0;1)$, "кубических" окрестностей точки P_0:

$$T_k=\left\{(t_{11},t_{12},\dots,t_{MM})\in R^{M^2}:|t_{ml}-x_my_l|<\beta r^{k-1},\ 1\le m,\ l\le M\right\},\quad k=K,K+1,\dots.$$

Из выбора K следует, что в $R_+^{M^2}$ содержится замыкание $\bar T_K$ даже самой обширной из них. Будучи дробно-линейными и определёнными в области $R_+^{M^2}$ функции (13) непрерывны и имеют в $R_+^{M^2}$ непрерывные частные производные всех порядков. Следовательно, величины

$$\eta_{i\ell}^{(j)}=\max_{P\in\bar T_K}\left|\frac{\partial f_j(P)}{\partial t_{i\ell}}\right|\quad\text{и}\quad\eta_{i\ell mn}^{(j)}=\max_{P\in\bar T_K}\left|\frac{\partial^2 f_j(P)}{\partial t_{i\ell}\partial t_{mn}}\right|,\quad 1\le i,j,\ell,m,n\le M,$$

существуют и конечны. Обозначив наибольшую из них через η, зафиксируем произвольные номер $k\ge K$ и точку $P(t_{11},t_{12},\dots,t_{MM})\in T_k$. Согласно [12, теорема 14.15] и сноске к ней, при каждом $1\le j\le M$ найдётся точка $Q_j\in T_k$ такая, что

$$f_j(P)-f_j(P_0)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\frac{\partial f_j(P_0)}{\partial t_{il}}(t_{il}-x_iy_l)+\frac12\sum_{i=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M}\frac{\partial^2 f_j(Q_j)}{\partial t_{il}\partial t_{mn}}(t_{il}-x_iy_l)(t_{mn}-x_my_n)$$

(это равенство представляет собой результат применения формулы Тейлора к функции f_j в окрестности T_k точки P_0). Отсюда получаем оценку

$$\begin{aligned}|f_j(P)-f_j(P_0)|\le{}&\sum_{i=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\left|\frac{\partial f_j(P_0)}{\partial t_{il}}\right||t_{il}-x_iy_l|+\\&\frac12\sum_{i=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M}\left|\frac{\partial^2 f_j(Q_j)}{\partial t_{il}\partial t_{mn}}\right||t_{il}-x_iy_l|\,|t_{mn}-x_my_n|\\\le{}&\sum_{i=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\eta\beta r^{k-1}+\frac12\sum_{i=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M}\eta(\beta r^{k-1})^2\end{aligned}$$

$$= \eta\beta r^{k-1}M^2 + \frac{1}{2}\eta\beta^2 r^{2k-2}M^4 = \eta\beta r^{k-1}M^2\left(1 + \frac{1}{2}\beta r^{k-1}M^2\right)$$

$$\le \eta\beta r^{k-1}M^2\left(1 + \frac{1}{2}\beta M^2\right) \quad \text{или}$$

$$|f_j(P) - f_j(P_0)| \le \gamma r^k, \quad P \in T_k, \quad k \ge K, \quad 1 \le j \le M, \tag{16}$$

где $\gamma = \frac{\eta\beta M^2(1+\frac{1}{2}\beta M^2)}{r}$. Неравенства (11), в частности, означают, что

$$\max_{1\le m,\ell\le M} |\rho^{1-k}\cdot b_{m\ell}^{(k-1)} - x_m \cdot y_\ell| < \beta r^{k-1}$$

при $k \ge K$ ($K \ge 2$ по определению номера K). Следовательно, $P_k \in T_k$, и неравенства (16) можно использовать при $P = P_k$ и $k = K, K+1, \ldots$. С учётом (14) и (15) для этих k имеем

$$|f_j(P_k) - f_j(P_0)| = \left| h_j^{(k)} - \frac{\rho x_j}{\sum\limits_{m=1}^{M} c_m x_m}\right| \le \gamma r^k,$$

откуда вытекает существование пределов

$$\lim_{k\to\infty} h_j^{(k)} = \frac{\rho x_j}{\sum\limits_{m=1}^{M} c_m x_m}, \quad j = 1, 2, \ldots, M. \tag{17}$$

Положив

$$\delta = \left(\gamma, \max_{\substack{1\le j\le M\\ 1\le k\le K-1}} \left|\frac{h_j^{(k)} - f_j(P_0)}{r^k}\right|\right),$$

получаем неравенства

$$\left| h_j^{(k)} - \frac{\rho x_j}{\sum\limits_{m=1}^{M} c_m x_m}\right| \le \delta r^k, \quad j = 1, 2, \ldots, M, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{18}$$

Теперь получим аналогичные результаты в случае задания начального условия $\bar g^{\,(0)}$, правда, с одной оговоркой: вектор $\bar g^{\,(0)}$ должен быть не просто ненулевым неотрицательным, а обязан содержать хотя бы одну положительную координату $g_{\,i}^{(0)}$ такую, что в i-й строке матрицы A имеется по крайней мере один ноль (очевидно, что при нарушении этого требования уже второй шаг итерационной процедуры окажется невыполнимым, ввиду обращения в ноль оценок $h_{\,j}^{(1)}$, $j = 1, 2, \ldots, M$). Пусть вектор $\bar g^{\,(0)}$ удовлетворяет данному ограничению, т. е. существуют номера $1 \le i \le N$, $1 \le j \le M$, для которых $g_i^{(0)} > 0$, $a_{ij} = 0$. Тогда $h_{\,j}^{(1)} > 0$, и значит, как и при задании начального приближения $\bar h^{\,(0)}$, бесконечная последовательность (3) может быть построена. И в этом случае существуют пределы (17), а неравенства (18) остаются в силе при $\delta = \frac{\delta_0}{r}$, где δ_0 — постоянная из правой части неравенств (18), полученных для начального вектора трудностей заданий теста с координатами $\frac{\sum_{i=1}^{N}(1-a_{ij})g_i^{(0)}}{\sum_{i=1}^{N} g_i^{(0)}}$, $j = 1, 2, \ldots, M$.

Итак, достигнуты все заявленные выше цели в части, относящейся к оценкам уровня трудности заданий $\bar h_{\,j}^{(k)}$. Осталось получить аналогичные выводы для оценок уровня подготовки тестируемых $g_i^{(k)}$. Перейдя в равенствах (1) к пределу при $k \to \infty$, с помощью (17) получаем соотношения:

$$g_i^* = \lim_{k\to\infty} g_i^{(k)} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{M} a_{ij} \lim\limits_{k\to\infty} h_j^{(k)}}{\sum\limits_{j=1}^{M} \lim\limits_{k\to\infty} h_j^{(k)}} = \frac{\frac{\rho \sum\limits_{j=1}^{M} a_{ij}x_j}{\sum\limits_{m=1}^{M} c_m x_m}}{\frac{\rho \sum\limits_{j=1}^{M} x_j}{\sum\limits_{m=1}^{M} c_m x_m}};$$

$$g_i^* = \frac{\sum\limits_{j=1}^{M} a_{ij}x_j}{\sum\limits_{j=1}^{M} x_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{19}$$

Далее, используя функции $F_i(t_1, t_2, \ldots, t_M) = \frac{\sum_{j=1}^{M} a_{ij}t_j}{\sum_{j=1}^{M} t_j}$ и опираясь на неравенства (18), тем же способом, что и выше, доказываем существование постоянной ε, для которой

$$\left| g_i^{(k)} - \frac{\sum\limits_{j=1}^{M} a_{ij}x_j}{\sum\limits_{j=1}^{M} x_j} \right| \le \varepsilon r^k, \quad k \ge 1, \quad 1 \le i \le N.$$

В заключение отметим, что в формулы (17) и (19) можно подставлять координаты не специально подобранного, а произвольного собственного вектора X матрицы B, отвечающего её собственному значению ρ. Это следует из того, что ρ есть алгебраически (а значит, и геометрически) простое собственное значение примитивной матрицы B [11, теорема 8.4.4].

Таким образом, итерационный процесс совместного оценивания уровней подготовки студентов и трудностей заданий диагностического средства по дихотомической матрице ответов A, учитывающего вклад в получаемые оценки заданий разной трудности и участников тестирования с разным уровнем подготовки, сходится, если:

– матрица A содержит не менее трёх различных столбцов;

– при расположении её столбцов в порядке неубывания столбцовых сумм для любого положения вертикальной разграничительной линии между столбцами найдётся строка, в которой левее линии имеется хотя бы одна единица, а правее линии — хотя бы один ноль.

Полученные в работе результаты могут быть использованы в качестве основы создания новых информационных технологий в решении задач управления образованием, разработки эффективных методов и алгоритмов интеллектуальной поддержки принятия управленческих решений в различных образовательных системах.

Литература

1. **Rasch G.** Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests / With a Foreword and Afterword by B.D. Wright. — Chicago & London: The Univ. of Chicago Press., 1980.
2. **Wright B.S., Masters G.N.** Rating Scale Analysis: Rasch Measurement. — Chicago: MESA Press, 1982.
3. **Елисеев И.Н.** Алгоритмы итерационных процедур вычисления оценок уровня подготовки студентов // Известия вузов. Электромеханика. — 2013. — № 3. — С. 83–90.

4. **Елисеев И.Н.** Исследование существования и единственности оценок максимального правдоподобия параметров латентных переменных однопараметрической дихотомической модели Раша / И.Н. Елисеев, И.С Шрайфель // Информатизация образования и науки. — 2011. — № 3 (11). — С. 117–129.
5. **Елисеев И.Н.** Методы, алгоритмы и программные комплексы для расчёта характеристик диагностических средств независимой оценки качества образования: монография. 2 изд., перераб. и доп. — Новочеркасск: Лик, 2013.
6. **Елисеев И.Н.** Модель оценивания латентных параметров дихотомической модели Раша / И.Н. Елисеев, И.С. Шрайфель // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. — 2011. — № 6. — С. 37–46.
7. **Елисеев И.Н.** О состоятельности дихотомической модели Раша / И.Н. Елисеев, И.С. Шрайфель // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. — 2012. — № 5. — С. 127–136.
8. **Елисеев И.Н.** Теоретические основы алгоритма расчёта латентных переменных программным комплексом RILP-1M // Программные продукты и системы. — 2011. — № 2. — С. 67–71.
9. **Елисеев И.Н.** Теоретические основы алгоритма расчёта латентных переменных программным комплексом RILP-2 // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. — 2011. — № 3. — С. 3–8.
10. **Сёмов А.М., Сёмова М.А., Хлебников В.А.** Единый итерационный процесс совместной количественной оценки трудностей заданий и уровней подготовленности участников тестирования / Тр. Центра тестирования, выпуск 2. — М.: Прометей, 1999. — С. 54–60.
11. **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. Пер. с англ. — М.: Мир, 1989.
12. **Ильин В.А., Позняк Э.Г.** Основы математического анализа. Часть I. 7-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — (Учебник для вузов.)

Поступила в редакцию 17 февраля 2015 г.

Литература в транслитерации

1. **Rasch G.** Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests / With a Foreword and Afterword by B.D. Wright. — Chicago & London: The Univ. of Chicago Press., 1980.
2. **Wright B.S., Masters G.N.** Rating Scale Analysis: Rasch Measurement. — Chicago: MESA Press, 1982.
3. **Eliseev I.N.** Algoritmy iteratsionnykh protsedur vychisleniya otsenok urovnya podgotovki studentov // Izvestiya vuzov. Elektromekhanika. — 2013. — № 3. — S. 83–90.
4. **Eliseev I.N.** Issledovanie sushchestvovaniya i edinstvennosti otsenok maksimal'nogo pravdopodobiya parametrov latentnykh peremennykh odnoparametricheskoy dikhotomicheskoy modeli Rasha / I.N. Eliseev, I.S Shrayfel' // Informatizatsiya obrazovaniya i nauki. — 2011. — № 3 (11). — S. 117–129.
5. **Eliseev I.N.** Metody, algoritmy i programmnye kompleksy dlya rascheta kharakteristik diagnosticheskikh sredstv nezavisimoy otsenki kachestva obrazovaniya: monografiya. 2 izd., pererab. i dop. — Novocherkassk: Lik, 2013.
6. **Eliseev I.N.** Model' otsenivaniya latentnykh parametrov dikhotomicheskoy modeli Rasha / I.N. Eliseev, I.S. Shrayfel' // Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Tekhnicheskie nauki. — 2011. — № 6. — S. 37–46.
7. **Eliseev I.N.** O sostoyatel'nosti dikhotomicheskoy modeli Rasha / I.N. Eliseev, I.S. Shrayfel' // Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Tekhnicheskie nauki. — 2012. — № 5. — S. 127–136.

8. **Eliseev I.N.** Teoreticheskie osnovy algoritma rascheta latentnykh peremennykh programmnym kompleksom RILP-1M // Programmnye produkty i sistemy. — 2011. — № 2. — S. 67–71.

9. **Eliseev I.N.** Teoreticheskie osnovy algoritma rascheta latentnykh peremennykh programmnym kompleksom RILP-2 // Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Tekhnicheskie nauki. — 2011. — № 3. — S. 3–8.

10. **Semov A.M., Semova M.A., Khlebnikov V.A.** Edinyy iteratsionnyy protsess sovmestnoy kolichestvennoy otsenki trudnostey zadaniy i urovney podgotovlennosti uchastnikov testirovaniya / Tr. Tsentra testirovaniya, vypusk 2. — M.: Prometey, 1999. — S. 54–60.

11. **Khorn R., Dzhonson Ch.** Matrichnyy analiz. Per. s angl. — M.: Mir, 1989.

12. **Il'in V.A., Poznyak E.G.** Osnovy matematicheskogo analiza. Chast' I. 7-e izd. — M.: FIZMATLIT, 2005. — (Uchebnik dlya vuzov.)