

УДК 534.213

## ВОЛНЫ В СЛОЕ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТАНГЕНЦИАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

В. И. Ерофеев, Н. В. Ключева, И. Н. Солдатов

Нижегородский филиал Института машиноведения РАН, 603024 Нижний Новгород  
E-mail: igor@sinn.ru

Исследуется структура волнового поля в дальней зоне в упругом слое, лежащем на жестком основании. Волновое поле возбуждается тангенциальной периодической силой, приложенной к поверхности слоя. Определены амплитудно-частотные характеристики колебаний поверхности слоя для распространяющихся мод. Рассмотрено распределение энергии между различными модами.

Ключевые слова: упругий слой, периодическая нагрузка, волновое поле.

В прикладных исследованиях часто важен не столько расчет смещений в результате воздействия периодической нагрузки, сколько выяснение структуры волнового поля: из каких мод оно формируется, какие моды являются доминирующими и т. д. Так, в задачах, связанных с виброгашением, необходимо знать, какая мода несет наибольшую энергию при определенных предположениях относительно источника вибраций. Другим примером являются задачи акустодиагностики. Виброакустический контроль нередко приходится осуществлять, когда возможно возбуждение сразу нескольких форм распространяющихся колебаний. В подобных случаях нужна уверенность, что возбуждается та форма колебаний, на которой ведется диагностика, и что ее амплитуда не мала в сравнении с остальными. Схожая ситуация возможна в сейсморазведке мелких слоев, когда трудно установить соответствие между принимаемым пакетом и типом волны (поверхностная, каналовая).

**1. Постановка задачи.** К свободной поверхности упругого изотропного слоя толщиной  $h$ , покоящегося на абсолютно жестком основании без сцепления, приложена периодическая тангенциальная нагрузка. Свяжем с поверхностью слоя, соприкасающегося с недеформируемым основанием, цилиндрическую систему координат  $Or\theta z$  с осью  $z$ , направленной перпендикулярно поверхности в глубь слоя. Угол  $\theta$  будем отсчитывать от направления приложения тангенциальной нагрузки. Уравнения движения изотропной упругой среды имеют вид [1, 2]

$$-\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + (c_p^2 - c_s^2) \text{grad div } \mathbf{u} + c_s^2 \Delta \mathbf{u} = 0,$$

где  $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)^T$  — вектор перемещений;  $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ,  $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$  — скорости продольных и сдвиговых волн соответственно;  $\lambda$ ,  $\mu$  — модули упругости Ламе;  $\rho$  — плотность.

На поверхностях слоя ( $z = 0$  и  $z = h$ ) вне области действия периодической нагрузки должны выполняться условия отсутствия напряжений на свободной поверхности и непрерывности нормальных перемещений на границе с основанием:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}|_{z=h} = 0, \quad \sigma_{zr}|_{z=h} = -\Pi(r, \theta) \cos \theta e^{-i\omega t}, \quad \sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \\ \sigma_{z\theta}|_{z=h} = \Pi(r, \theta) \sin \theta e^{-i\omega t}, \quad \sigma_{z\theta}|_{z=0} = 0, \quad u_z|_{z=0} = 0, \end{aligned}$$

где  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{zr}$ ,  $\sigma_{z\theta}$  — компоненты тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \sigma_{zr} &= \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad \sigma_{z\theta} = \mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right); \end{aligned}$$

$\Pi(r, \theta)$  — функция, описывающая распределение касательных напряжений.

**2. Волновое поле в дальней зоне.** Будем рассматривать волновое поле, создаваемое точечной тангенциальной нагрузкой  $\Pi(r) = P\delta(r)/r$ , где  $\delta(\mathbf{x})$  — дельта-функция;  $P = \text{const}$ . Для получения выражений для поля перемещений воспользуемся методом, достаточно подробно изложенным в [1–5], который заключается в применении интегрального преобразования Фурье — Бесселя по пространственным переменным  $r, \theta$  к уравнениям движения и граничным условиям с последующим решением возникающей алгебраической задачи. В результате находятся выражения для перемещений в форме некоторых двойных интегралов. Для вычисления интегралов используются методы контурного интегрирования в комплексной плоскости. Ниже все выражения будем записывать в безразмерных переменных

$$z' = \frac{z}{h}, \quad r' = \frac{r}{h}, \quad t' = \frac{tc_s}{h}, \quad P' = \frac{P}{\mu}, \quad \Omega = \frac{\omega h}{c_s}$$

(далее штрихи опускаем). Достаточно далеко от источника основной вклад в волновое поле будут вносить распространяющиеся моды (т. е. моды с вещественным волновым числом), что позволяет на основе формулы для вычисления вычетов в полюсах первого порядка (полюса второго порядка могут появиться только при определенных значениях коэффициента Пуассона  $\nu$ ) записать

$$\begin{aligned} u_z(r, \theta) &= iP e^{-i\Omega t} \cos \theta \sum_{n=0}^{N(\Omega)} k_n^2 \Lambda_n(\Omega) g_{zn}(\Omega, z) H_1^{(1)}(k_n r), \\ u_r &= iP e^{-i\Omega t} \cos \theta \sum_{n=0}^{N(\Omega)} k_n \Lambda_n(\Omega) g_{rn}(\Omega, \theta, z) H_0^{(1)}(k_n r), \\ u_\theta &= iP e^{-i\Omega t} \sin \theta \sum_{n=0}^{N(\Omega)} k_n \Lambda_n(\Omega) g_{\theta n}(\Omega, \theta, z) H_0^{(1)}(k_n r). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $N(\Omega)$  — число распространяющихся мод, возбуждаемых на данной частоте  $\Omega$ ;  $H_j^{(1)}(k_n r)$  ( $j = 0, 1$ ) — функции Ганкеля  $j$ -го порядка;

$$\begin{aligned} g_{zn}(\Omega, z) &= 2\eta \operatorname{ch} \zeta \operatorname{sh} \eta z + (\Omega^2 - 2k_n^2) \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \zeta z / \zeta; \\ g_{rn}(\Omega, \theta, z) &= 2k_n^2 \operatorname{ch} \zeta \operatorname{ch} \eta z - (2k_n^2 - \Omega^2) \operatorname{ch} \eta \operatorname{ch} \zeta z + 4k_n^2 \Omega^{-2} \zeta \operatorname{sh}^{-1} \zeta g_{zn}(\Omega, 1) \sin^2 \theta \operatorname{ch} \zeta z; \\ g_{\theta n}(\Omega, \theta, z) &= [(2k^2 - \Omega^2) \operatorname{ch} \eta + k^2 \Omega^{-2} \zeta \operatorname{sh}^{-1} \zeta g_{zn}(\Omega, 1) \cos 2\theta] \operatorname{ch} \zeta z; \end{aligned}$$

$$\Lambda_n = \zeta / (2S'(k_n, \Omega)); \quad \eta = \sqrt{k_n^2 - \Omega^2 c_s^2 c_p^{-2}}; \quad \zeta = \sqrt{k_n^2 - \Omega^2};$$

$$S'(k, \Omega) = 8(2k^2 - \Omega^2)k \operatorname{sh} \zeta \operatorname{ch} \eta + (2k^2 - \Omega^2)^2 k \left[ \frac{\operatorname{ch} \zeta}{\zeta} \operatorname{ch} \eta + \frac{\operatorname{sh} \eta}{\eta} \operatorname{sh} \zeta \right] - \\ - \operatorname{ch} \zeta \operatorname{sh} \eta (8k\zeta\eta + 4k^3\eta/\zeta + 4k^3\zeta/\eta) - 4k^3(\eta \operatorname{sh} \zeta \operatorname{sh} \eta + \zeta \operatorname{ch} \zeta \operatorname{ch} \eta);$$

$k_n$  — безразмерное волновое число (вещественное)  $n$ -й моды, удовлетворяющее дисперсионному уравнению для симметричных нормальных волн Лэмба в упругом слое  $S(k_n, \Omega) = 0$ ;  $S = (2k^2 - \Omega^2)^2 \operatorname{sh} \zeta \operatorname{ch} \eta - 4k^2 \zeta \eta \operatorname{ch} \zeta \operatorname{sh} \eta$ .

**3. Нормальные перемещения поверхности слоя.** На рис. 1 представлены зависимости  $A_n(\Omega) = k_n^2 \Lambda_n(\Omega) g_{zn}(\Omega, 1)$  при  $\nu = 0,3$  для первых пяти мод ( $n = 0, \dots, 4$ ). Видно, что в случае сосредоточенной тангенциальной нагрузки вертикальные перемещения поверхности обусловлены в основном распространяющейся низшей модой. Амплитуда колебаний поверхности, вызванных распространением любой другой моды, не превышает трети амплитуды низшей моды. Но если учесть конечность размеров площадки, к которой приложена тангенциальная нагрузка, то преобладания вклада низшей моды в поверхностные перемещения на всех частотах уже не будет. В случае равномерно распределенной по круговой площадке радиуса  $a/h$  периодической касательной нагрузки  $\Pi(r) = PH(a-r)/(\pi a^2)$  ( $H(r)$  — функция Хевисайда) функции  $A_n(\Omega)$  должны быть умножены на  $2hJ_1(ka/h)/(ka)$ . Таким образом, выражение для нормальных перемещений поверхности слоя имеет вид

$$u_z(r, \theta) = iP e^{-i\Omega t} \cos \theta \sum_{n=0}^{N(\Omega)} A_n^a(\Omega) H_1^{(1)}(k_n r),$$

где  $A_n^a(\Omega) = 2ha^{-1} k_n \Lambda_n(\Omega) g_{zn}(\Omega, 1) J_1(k_n a h^{-1})$ . Зависимости  $A_n^a(\Omega)$  ( $n = 0, \dots, 4$ ) при  $a/h = 0,5$ ,  $\nu = 0,3$  показаны на рис. 2. Видно, что существуют частоты, при которых вертикальные перемещения поверхности обусловлены только высшими модами.

Полезно сравнить зависимости нормальных перемещений от тангенциальной и вертикальной точечных нагрузок. Выражение для нормальных перемещений, вызванных воз-

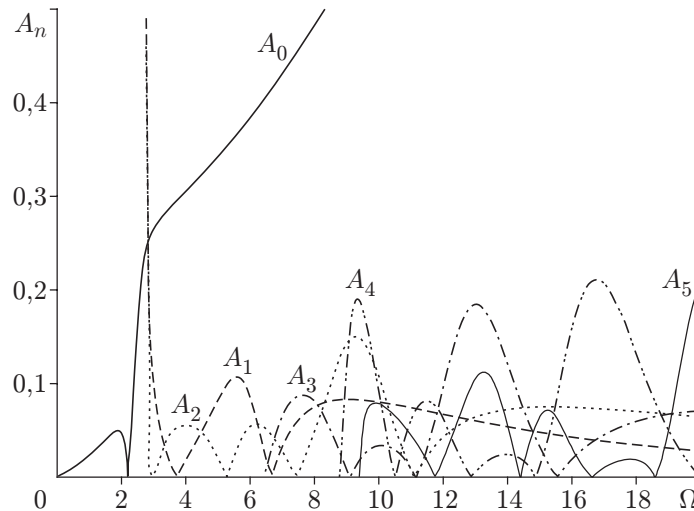


Рис. 1

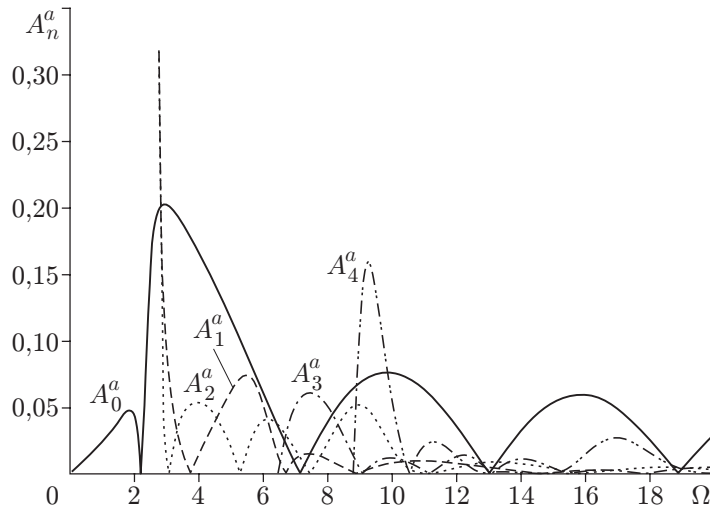


Рис. 2

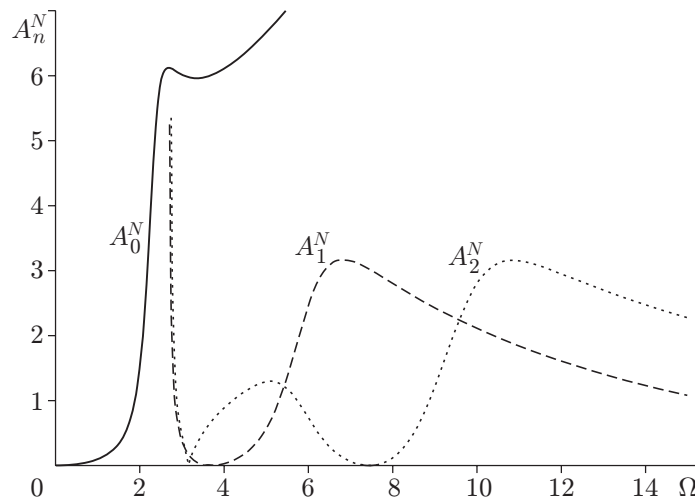


Рис. 3

действием вертикальной сосредоточенной периодической силы, известно (см. [5]):

$$u_z(r) = iP e^{-i\Omega t} \sum_{n=0}^{N(\Omega)} A_n^N H_0^{(1)}(k_n r),$$

где  $A_n^N(\Omega) = \pi\Omega^2 k_n \eta \operatorname{sh} \eta \operatorname{sh} \zeta / S'(k_n, \Omega)$ . На рис. 3 приведены зависимости  $A_n^N(\Omega)$  для первых трех мод ( $n = 0, 1, 2, \nu = 0, 3$ ). В отличие от вертикальной нагрузки в случае тангенциальной нагрузки амплитуды нормальных перемещений зависят от угла  $\theta$  и характеризуются меньшей величиной и более сложной зависимостью от частоты  $\Omega$ .

Отметим, что, используя асимптотические разложения для функций Ганкеля, справедливые в дальней зоне при любом  $\Omega$ , за исключением частот, близких к частотам записания  $\Omega_{lj} = \pi l (c_p/c_s)^j - (\pi c_p/(2c_s) + 1)^j + 1$  ( $l = 1, 2, \dots, j = 0, 1$ ), первое выражение из (1) можно привести к виду

$$u_z(r, \theta) \approx \frac{\sqrt{2}P \cos \theta}{\sqrt{\pi r}} \sum_{n=0}^{N(\Omega)} k_n^{-1/2} A_n(\Omega) \exp \left[ -i \left( \Omega t - k_n r + \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

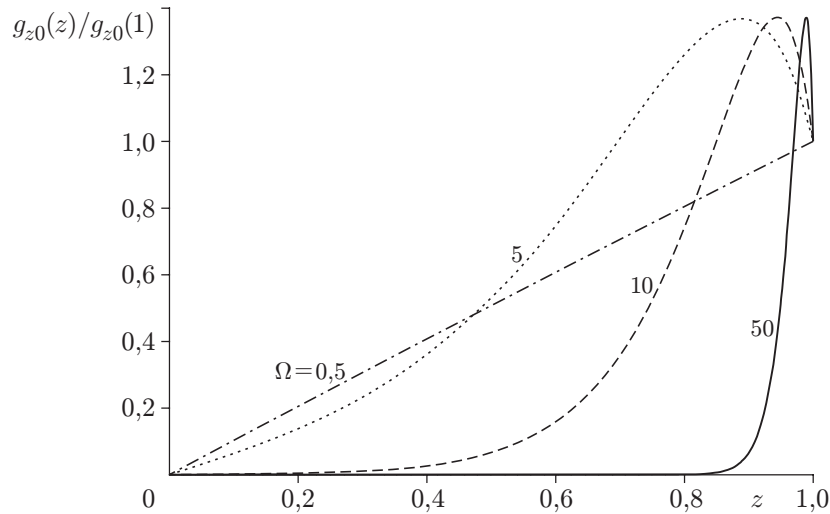


Рис. 4

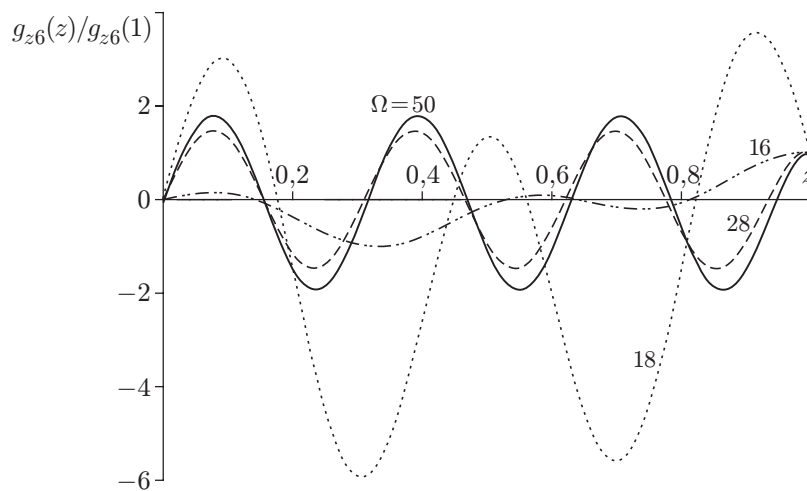


Рис. 5

**4. Энергия, переносимая симметричными модами.** Распределение энергии между различными типами волн в упругом полупространстве рассматривалось в работах [6–12]. Для ряда задач виброгашения и вибродиагностики представляет интерес распределение энергии между симметричными нормальными модами в упругом слое. В отличие от низшей моды, у которой с ростом частоты достаточно быстро происходит концентрация энергии вблизи поверхности, у мод с более высокими номерами подобной локализации энергии не происходит. На рис. 4 показана структура вертикальных перемещений по толщине слоя для низшей моды при частотах  $\Omega = 0,5; 5; 10; 50$ . Распределения перемещений по  $z$  для мод с номерами  $n > 1$  представляют собой осциллирующие функции, число осцилляций тем больше, чем выше номер моды  $n$ . На рис. 5 показано изменение амплитуды вертикальных перемещений по толщине слоя для моды  $n = 6$ . На определенных частотах амплитуда перемещений частиц внутри слоя может быть больше, чем на поверхности.

Поток энергии, проходящий через поверхность  $F$ , вычисляется по формуле

$$\iint_F \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\sigma}_n \right) dS,$$

где  $\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_{ij}n_i$  — вектор напряжений на площадке поверхности  $F$  с нормалью  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ . Представим перемещения  $\mathbf{u}$  и вектор напряжений  $\boldsymbol{\sigma}_n$  в виде

$$\mathbf{u}' = \hat{\mathbf{u}} e^{-i\Omega t}, \quad \boldsymbol{\sigma}'_n = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_n e^{-i\Omega t},$$

где  $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_n$  — комплексные амплитуды (комплексно-сопряженные слагаемые опущены). Для безразмерного потока энергии  $E' = E/(\rho c_s^3 h^2)$  через поверхность  $F$ , осредненного за период колебаний  $2\pi/\Omega$ , справедливо выражение

$$E' = -\frac{\Omega}{2} \operatorname{Im} \iint_F (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_n^*) dS,$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение.

Рассмотрим мощность, переносимую волнами через цилиндрическую поверхность большого радиуса  $R$ . Высота цилиндра равна толщине слоя. В силу свойства аддитивности усредненного потока энергии в слое [13] выражение для  $E$  можно представить в виде суммы мощностей отдельных мод

$$E = -\frac{\Omega}{2} \operatorname{Im} \sum_{m=0}^{N(\Omega)} \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta (\hat{u}_r \hat{\sigma}_{rr}^* + \hat{u}_\theta \hat{\sigma}_{r\theta}^* + \hat{u}_z \hat{\sigma}_{rz}^*)$$

(индекс  $m$ , указывающий на номер моды, у символов перемещений и напряжений опущен). Из (1) следуют выражения для  $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_z$ :

$$\begin{aligned} \hat{u}_z &= iPU_z H_1^{(1)}(k_m r), & U_z &= \cos \theta k_m^2 \Lambda_m(\Omega) g_{zm}(\Omega, z), \\ \hat{u}_r &= iPU_r H_0^{(1)}(k_m r), & U_r &= \cos \theta k_m \Lambda_m(\Omega) g_{rm}(\Omega, \theta, z), \\ \hat{u}_\theta &= iPU_\theta H_0^{(1)}(k_m r), & U_\theta &= \sin \theta k_m \Lambda_m(\Omega) g_{\theta m}(\Omega, \theta, z). \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя (2) в соотношения, связывающие напряжения с перемещениями, и учитывая, что функции  $U_z, U_r, U_\theta$  являются вещественными для распространяющихся мод и что в дальней зоне справедливы соотношения

$$\frac{\partial}{\partial r} H_0^{(j)}(k_m r) = -k_m H_1^{(j)}(k_m r), \quad \frac{\partial}{\partial r} H_1^{(j)}(k_m r) \approx k_m H_0^{(j)}(k_m r) \quad (j = 1, 2),$$

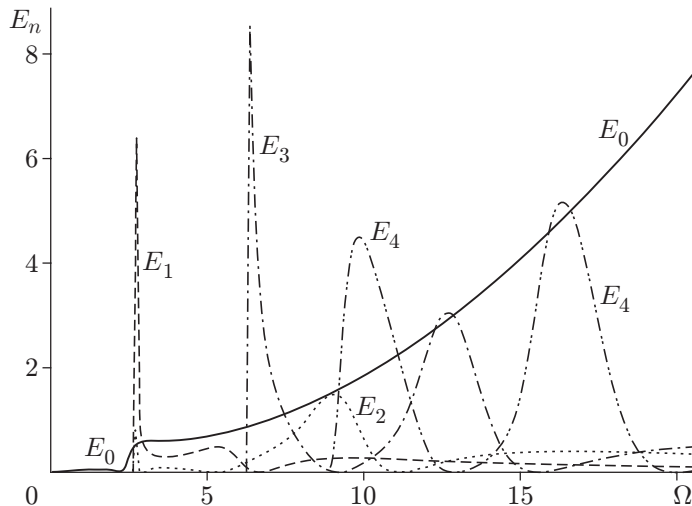


Рис. 6

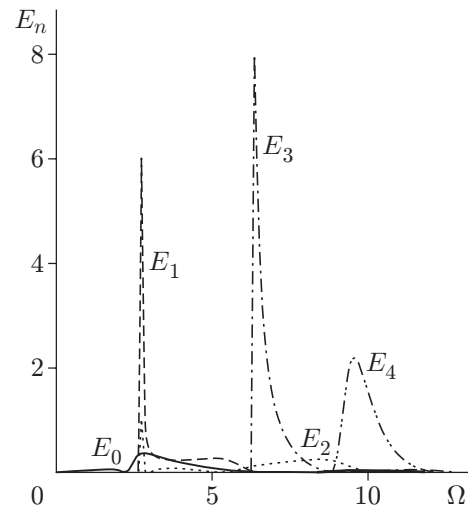


Рис. 7

$$H_j^{(1)}(k_m r) H_l^{(2)}(k_m r) \approx \frac{2(i)^{l-j}}{\pi k_m r} \quad (j, l = 0, 1),$$

получим выражение для энергии, переносимой  $m$ -й модой:

$$E_m = \frac{\Omega P^2}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \left( \frac{2-2\nu}{1-2\nu} U_r^2 + U_\theta^2 + U_z^2 - \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{1}{k_m} U_r \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{1}{k_m} U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} \right).$$

Распределение мощности между различными излучаемыми модами представлено на рис. 6, 7. Кривые на рис. 6 соответствуют случаю сосредоточенного источника, на рис. 7 — равномерно распределенного по площадке  $a/h = 0,5$  (коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Викторов И. А.** Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966.
2. **Викторов И. А.** Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981.
3. **Огурцов К. И., Петрашень Г. И.** Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии // Учен. зап. Ленингр. гос. ун-та. Сер. мат. наук. 1951. № 149, вып. 24. С. 5–117.
4. **Петрашень Г. И.** К теории колебаний тонких пластин // Там же. С. 172–249.
5. **Ерофеев В. И., Ключева Н. В., Солдатов И. Н.** Использование спектров нормальных и тангенциальных смещений волн Лэмба в задачах выделения одномодовой составляющей // Дефектоскопия. 2002. № 12. С. 34–42.
6. **Miller G. F., Pursey H.** On the partition of energy between elastic waves in semi-infinite solid // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1955. V. 223, N 1192. P. 55–63.
7. **Коган С. Я.** О сейсмической энергии, возбуждаемой источником, находящимся на поверхности // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1963. № 7. С. 1000–1013.
8. **Гущин В. В., Докучаев В. П., Заславский Ю. М., Конюхова В. Д.** О распределении мощности между различными типами излучаемых волн в полубезграничной упругой среде // Исследование Земли невзрывными сейсмическими источниками. М.: Наука, 1981. С. 113–118.
9. **Глушков Е. В.** Распределение энергии поверхностного источника в неоднородном полупространстве // Прикл. математика и механика. 1983. Т. 47, вып. 1. С. 94–100.
10. **Докучаев В. П., Разин А. В.** Возбуждение упругих волн в однородном полупространстве поверхностными источниками // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990. № 10. С. 81–87.
11. **Авербах В. С., Заславский Ю. М.** Пространственно-угловые характеристики и энергетический баланс упругих волн, возбуждаемых в полупространстве источником типа центр расширения // Физика Земли. 1998. № 1. С. 49–53.
12. **Максимов Г. А., Меркулов М. Е., Кудрявцев В. Ю.** Распределение энергии между различными типами сейсмических волн, излучаемых источником с произвольной диаграммой направленности в упругом полупространстве // Акуст. журн. 2003. Т. 49, № 3. С. 389–399.
13. **Зильбергейт А. С., Нуллер Б. М.** Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234, № 2. С. 333–335.

Поступила в редакцию 1/VI 2004 г.,  
в окончательном варианте — 10/XI 2004 г.