Если теперь потребовать, чтобы погрешность в $\operatorname{div}\mathbf{q}$, вследствие использования приближения плоских слоев, не превосходила по порядку величины погрешности, допускаемой в уравнении энергии в теории пограничного слоя, то условие применимости приближения плоских слоев для рассматриваемого случая будет

$$\varkappa l\left\{e^{-\varkappa l}[1-E_2(\varkappa l)]+\frac{2}{\pi}E_2(\varkappa l)\right\}-(\varkappa l+1)\,e^{-\varkappa l}+\frac{2-(\varkappa\delta+2)\,e^{-\varkappa l}}{\varkappa\delta}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\rho_* u_* c_{\rho_*}(T_2-T_1)}{2\sigma\,(T_2^4-T_1^4)}\,\frac{\delta}{l} \qquad (5)$$

Величины, отмеченные звездочкой, — характерные значения параметров.

На фиг. 2 приведена кривая, полученная при знаке равенства в (5), для $\delta/l = 0.01$.

По оси абсцисс отложено $\mu=\lg\varkappa l$; по оси ординат

$$\varepsilon=\lg\frac{\rho_* u_* c_{\rho_*}(T_2-T_1)}{2\sigma\,(T_2^4-T_1^4)}$$

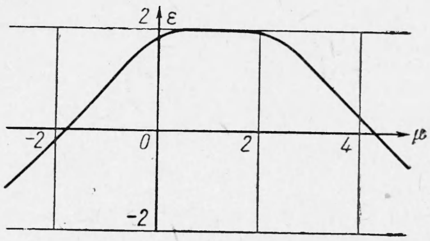
Выше этой кривой находится область применимости приближения плоских слоев.

Кривая имеет асимптоту

$$\varepsilon=-\mu+\lg[2(l/\delta)^2] \text{ при } \mu\to+\infty$$

асимптоту

$$\varepsilon=\mu+\lg(2l/\pi\delta) \text{ при } \mu\to+\infty$$



Фиг. 2

Как видно, существует значение ε, при больших значениях которого в пограничном слое для излучения справедливо приближение плоских слоев для любых значений $\varkappa l$. При $\delta/l>0.01$ кривая будет лежать ниже, и область максимума будет уже.

Следует отметить, что в реальных задачах область излучающе-поглощающего газа конечна, и полученная здесь оценка в прозрачном случае может оказаться неприемлемой.

В заключение благодарю А. Т. Онуфриева и Ю. Д. Шмыглевского за полезное обсуждение работы.

Поступила 28 VIII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлова Л. М., Шмыглевский Ю. Д. О пограничном слое в излучающем газе. ПМТФ, 1964, № 1.

О КРИТЕРИЯХ ВЫПУЧИВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

В. И. Ванько

(*Новосибирск*)

При изучении выпучивания стержней при ползучести за критерий «потери устойчивости» обычно принимается какая-то характерная особенность кривой прогиб — время. Например, обращение прогиба в бесконечность при конечном времени [1], точка минимума [2], точка перегиба [3, 4], обращение скорости прогиба в бесконечность [5, 6].

В настоящей работе на примере упруго-пластического стержня (модель Шэнли фиг. 1) выясняется качественный характер процессов выпучивания в зависимости от уровня нагрузки.

1. Рассматриваем упруго-пластический материал с линейным упрочнением (фиг. 2).

Все линейные величины будем относить к $^1/_2 h$; индексы 1, 2 обозначают величины, относящиеся к первому или ко второму стерженькам соответственно; точка вверху обозначает дифференцирование по времени t; за положительные приняты сжимающие напряжения, нагрузки и деформации сжатия; E — модуль Юнга; E_t — касательный модуль, принятый постоянным; $\sigma=P/F$, где F — суммарная площадь сечения стерженьков; все напряжения отнесены к Эйлерову напряжению $\sigma_э = Eh/4L$.

Для простоты примем степенной закон ползучести с нечетным показателем. Тогда скорости деформаций ε_1 и ε_2 в стерженьках выразятся зависимостями

$$\dot\varepsilon_i=\frac{\dot\sigma_i}{E}+k_i\,\frac{\dot\sigma_i}{\mu}+\left(\frac{\sigma_i}{\lambda}\right)^n \quad (i=1,2), \qquad \left(\mu=\frac{EE_t}{E-E_t}\right) \qquad (1.1)$$

В равенствах (1.1)

$$k_i = \begin{cases} 0 & (|\sigma_i| < \sigma_*) \\ 1 & (\sigma_i\sigma_i^{\cdot} > 0, \ |\sigma_i| > \sigma_*) \\ 0 & (\sigma_i\sigma_i^{\cdot} < 0, \ |\sigma_i| > \sigma_*) \end{cases}$$

Здесь σ_* — предел текучести.

Имеем уравнения равновесия и совместности скоростей деформаций модели Шэнли [7]

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma, \qquad \sigma_1 - \sigma_2 = 2\sigma w, \quad \varepsilon_1^{\cdot} - \varepsilon_2^{\cdot} = \gamma w^{\cdot} \qquad (w(t) \equiv u_0 + u(t)) \tag{1.2}$$

Отсюда

$$\sigma_1 = \sigma(1 + w), \qquad \sigma_2 = \sigma(1 - w) \tag{1.3}$$

Из уравнений (1.1), (1.3) и третьего уравнения системы (1.2) получим

$$\sigma^{\cdot} w\{1 + \alpha(k_1 + k_2)\} + \sigma^{\cdot}\alpha(k_1 - k_2) + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{E}{\lambda}\right)^n \sigma^n\{(1 + w)^n - (1 - w)^n\} =$$

$$= w^{\cdot}\{1 - \sigma[1 + \alpha(k_1 + k_2)]\} \tag{1.4}$$

$$w = w_0 \quad \text{при } \sigma = 0$$

Здесь

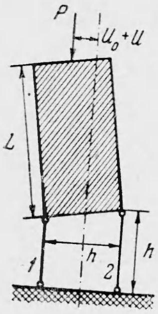
$$\left(\alpha = \frac{E}{2\mu} = \frac{1 - \sigma_t}{2\sigma_t}, \quad \sigma_t = \frac{E_t}{E}, \quad \gamma = \frac{h}{2L}\right)$$

Здесь σ_t — напряжение по касательному модулю. При монотонно возрастающих нагрузках фигурная скобка в правой части является убывающей функцией, имеющей при упруго-пластических деформациях вид

$$1 - \sigma\left[1 + \frac{1 - \sigma_t}{2\sigma_t}\right] \geqslant 0 \qquad (k_1 = 1, \ k_2 = 0) \tag{1.5}$$

или

$$1 - \sigma\left[1 + \frac{1 - \sigma_t}{\sigma_t}\right] \geqslant 0 \qquad (k_1 = k_2 = 1) \tag{1.6}$$



Фиг. 1

причем (1.5) принимает нулевое значение при $\sigma = \sigma_b$, а (1.6) обращается в нуль при $\sigma = \sigma_t$. Считаем, что начальная неправильность положительна, тогда, очевидно, $\operatorname{sgn} w = \operatorname{sgn} w_0$.

Условимся говорить, что квазистатическая постановка корректна, если решение (1.4) имеет характер $w > 0$, $\infty > W^{\cdot} \geqslant 0$.

2. Под мгновенным понимаем нагруженне, скорость которого $\sigma^{\cdot}$ такова, что ползучесть за время достижения нагрузкой максимального значения не успевает проявиться, однако динамическими эффектами можно пренебречь [8]. Имеем уравнение упруго-пластического продольного изгиба

$$\sigma^{\cdot} w\{1 + \alpha(k_1 + k_2)\} + \sigma^{\cdot}\alpha(k_1 - k_2) = w^{\cdot}\{1 - \sigma[1 + \alpha(k_1 + k_2)]\}$$

$$w = w_0 \quad \text{при } \sigma = 0 \tag{2.1}$$

Время не играет существенной роли в квазистатических упруго-пластических процессах, так как дифференциал dt может быть исключен из уравнения. Нетрудно также показать, что из (2.1) при соответствующих предпосылках относительно начального прогиба и характера нагружения можно в весьма компактной форме получить все известные результаты [9–11].

Рассмотрим последовательные этапы нагружения.

1) Пусть $\sigma_i < \sigma_*$; тогда $k_1 = k_2 = 0$. Имеем

$$\sigma^{\cdot} w = w^{\cdot}(1 - \sigma), \qquad w = w_0 \quad \text{при } \sigma = 0 \tag{2.2}$$

Отсюда

$$w = \frac{w_0}{1 - \sigma}$$

Это решение справедливо, пока $\sigma_1 < \sigma_*$. Найдем значение $\sigma^{(1)}$ и соответствующий прогиб, при котором $\sigma_1 = \sigma_*$

$$\sigma^{(1)} = {}^1\!/_2(1 + \sigma_* + w_0 - \sqrt{(1 + \sigma_* + w_0)^2 - 4\sigma_*}), \qquad w^{(1)} = w_0 / (1 - \sigma^{(1)})$$

2) Пусть $\sigma_1 > \sigma_*$; тогда $k_1 = 1$, но $|\sigma_2| < \sigma_*$, и $k_2 = 0$. Имеем

$$\sigma^{\cdot} w\{1+\alpha\} + \sigma^{\cdot}\alpha = w^{\cdot}\{1 - \sigma(1+\alpha)\}, \qquad w = w^{(1)} \quad \text{при} \quad \sigma = \sigma^{(1)}$$

Отсюда

$$w = \frac{\alpha(\sigma - \sigma^{(1)})}{1 - \sigma(1+\alpha)} + \frac{w^{(1)}[1 - \sigma^{(1)}(1+\alpha)]}{1 - \sigma(1+\alpha)} \tag{2.3}$$

Можно показать, что при малых начальных прогибах $w_0 \sim 0.1$ напряжение $\sigma^{(2)}$, при котором

$$\sigma_2 = \sigma(1 - w) = -\sigma_*$$

удовлетворяет неравенствам

$$\sigma_t < \sigma^{(2)} < \sigma_k \qquad \left(\sigma_k = \frac{2E_t}{E + E_t} \text{ напряжение Кармана}\right) \tag{2.4}$$

Сводка результатов некоторых вычислений приведена в таблице.

Неравенства (2.4) существенны для дальнейшего анализа. Дальше при $\sigma > \sigma^{(2)}$ строить квазистатическое решение нельзя, так как $k_1 = k_2 = 1$, поэтому имели бы

$$\sigma^{\cdot} w\{1+2\alpha\} = w^{\cdot}\{1 - \sigma(1+2\alpha)\}$$

$$w = w^{(2)} \quad \text{при} \quad \sigma = \sigma^{(2)}$$

и так как $\sigma > \sigma_t$, то квадратная скобка в правой части отрицательна, и решение имело бы отрицательную скорость. В работе [10] показано, что здесь происходит нарушение равновесия.

$u_\bullet$	σ_*	σ_t	σ_k	$\sigma^{(2)}$	$w^{(2)}$	$w_1^{(2)}$	w_1^*
0.05				0.566	1.7	0.295	
0.1	0.4	0.45	0.617	0.552	1.72	0.462	1.89
0.15				0.537	1.74	0.655	
0.05				0.7	1.72	0.415	
0.1	0.5	0.6	0.75	0.68	1.73	0.67	1.835
0.15				0.664	1.76	0.92	

3. Теперь исследуем такую задачу: стержень мгновенно нагружен до уровня $\sigma = \sigma_0$; выясним влияние величины σ_0 на выпучивание стержня при ползучести.

Нагружаем стержень силой $\sigma_0 = \sigma_t$, так как при этом $|\sigma_2| < \sigma_*$ (это видно из (2.4)), то $k_2 = 0$. Из (1.4) имеем

$$\frac{1}{\gamma}\left(\frac{E}{\lambda}\right)^n \sigma_0^n\{(1+w)^n - (1-w)^n\} = w^{\cdot}\{1 - \sigma_0(1+\alpha)\}$$
$$w = w_1^{(2)}\big|_{\sigma_0=\sigma_t} \quad \text{при } t = 0 \tag{3.1}$$

Это уравнение сохраняет силу до прогиба w_1^*, при котором

$$\sigma_2 = \sigma_t(1 - w_1^*) = -\sigma_*$$

Время достижения этого прогиба

$$t_1^* = [1 - \sigma_t(1+\alpha)]\left(\frac{1}{\gamma}\left(\frac{E}{\lambda}\right)^n \sigma_t^n\right)^{-1} \int\limits_{w_1^{(2)}}^{w_1^*} \frac{dw}{(1+w)^n - (1-w)^n}$$

При $w \geqslant w_1^*$ имеем $k_1 = 1$, $|\sigma_2| > \sigma_*$, $\sigma_2^{\cdot} = -\sigma_t w^{\cdot} < 0$, и так как $\sigma_2\sigma_2^{\cdot} > 0$, то $k_2 = 1$. Квадратная скобка справа обращается в нуль, и

$$w^{\cdot}(t_1^*) = \infty$$

Следовательно, при $t = t_1^*$ $(w = w_1^*)$ имеем потерю устойчивости в смысле Хоффа — Веубеке (фиг. 3, *а*). Теперь будем нагружать стержень нагрузкой, равной $\sigma_0 = \sigma_t + \delta\sigma$, где $\delta\sigma$ — положительная или отрицательная величина.

а) $\delta\sigma < 0$. Имеем уравнение (3.1) с начальным условием

$$w = w_2^{(2)}\big|_{\sigma_0<\sigma_t} \quad \text{при } t = 0$$

Так же, как и выше, это уравнение сохраняет силу до определенного прогиба $w_2^*(t_2^*)$, при котором во втором стерженьке достигается предел текучести $\sigma_2 = -\sigma_*$; после этого уравнение имеет вид

$$\frac{1}{\gamma}\left(\frac{E}{\lambda}\right)^n \sigma_0^n\{(1+w)^n - (1-w)^n\} = w^{\cdot}[1 - \sigma_0(1+2\alpha)]$$
$$w = w_2^* \quad \text{при } t = t_2^* \tag{3.2}$$

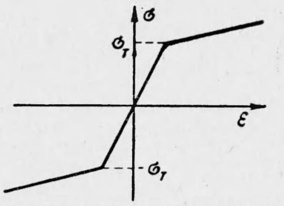
Так как в квадратных скобках стоит положительная константа, то квазистатическая постановка сохраняет свою корректность при любой величине прогиба.

Имеем

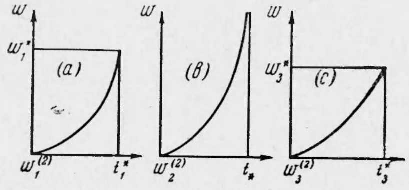
$$t = \frac{\Upsilon}{\sigma_0{}^n}\left(\frac{\lambda}{E}\right)^n \left\{[1 - \sigma_0(1+\alpha)] \int\limits_{w_2^{(2)}}^{w_2^*} \frac{dw}{(1+w)^n - (1-w)^n} + \right.$$

$$\left. + [1 - \sigma_0(1+2\alpha)] \int\limits_{w_2^*}^{w} \frac{dw}{(1+w)^n - (1-w)^n} \right\}$$

При $w \to \infty$ и $n > 1$ интеграл сходится, и критическое значение $t_* = t(\infty)$, т. е. происходит потеря устойчивости в смысле достижения бесконечно большого прогиба (фиг. 3, b).



Фиг. 2



Фиг. 3

б) При $\delta\sigma > 0$ имеем уравнение (3.1), где $\sigma_0 > \sigma_t$. Начальным условием будет мгновенный прогиб $w_3{}^{(2)}$, соответствующий σ_0. При $w = w_3{}^*$ имеем $\sigma_2 = -\sigma_*$.

Достижение этого прогиба произойдет за время

$$t_3{}^* = \frac{\Upsilon}{\sigma_0{}^n}\left(\frac{\lambda}{E}\right)^n [1 - \sigma_0(1+\alpha)] \int\limits_{w_3^{(2)}}^{w_3^*} \frac{dw}{(1+w)^n - (1-w)^n}$$

Так как при $w > w_3{}^*$ имеем $|\sigma_2| > \sigma_*$, то $k_2 = 1$, и выпучивание описывалось бы уравнением (3.2), причем в квадратных скобках справа стояла бы отрицательная константа

$$1 - \sigma_0(1+2\alpha) < 0$$

Отсюда видно, что при времени $t > t_3{}^*$ квазистатическое рассмотрение становится некорректным. Важно подчеркнуть, что

$$0 < w^{\cdot}(t_3{}^* - 0) < \infty \qquad \text{при} \quad t = t_3{}^*$$

Таким образом, кривая $w \sim t$ при $\sigma_0 = \sigma_t$ оказывается неустойчивой в том смысле, что при любом изменении мгновенно приложенной нагрузки характер выпучивания существенно изменяется.

Автор искренне благодарит Ю. Н. Работнова, Ю. В. Немировского и Л. М. Куршина за полезные обсуждения работы.

Поступила 18 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Хофф Н. Продольный изгиб и устойчивость. Изд-во иностр. литер., 1956.
2. Rabotnov J. N. The theory of creep and its applications. Plasticity, Pergamon Press, 1960.
3. Шестериков А. С. О критерии устойчивости при ползучести. ПММ, 1959, т. 23, вып. 6.
4. Куршин Л. М. Устойчивость стержней в условиях ползучести. ПМТФ, 1961, № 6.
5. Хофф Н. Продольный изгиб при ползучести. Сб. Механика, 1956, № 6.
6. Де-Веубеке Ф. Выпучивание при ползучести. Сб. Влияние высоких температур на авиаконструкции, Оборонгиз, 1961.
7. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, 1960.
8. Хофф Н. Динамика устойчивости упругих колонн. Сб. Механика, 1952, № 3.
9. Шэнли Ф. Теория расчета стоек за пределами упругости. Анализ веса и прочности самолетных конструкций. Оборонгиз, 1957.
10. Пановко Я. Г. О критической силе сжатого стержня в неупругой области. Инж. сб., 1954, т. 20.
11. Пановко Я. Г. О современной концепции упруго-пластического продольного изгиба. Докл. на Всесоюзной конф. по проблемам устойчивости в строительной механике, Тезисы докл., М., 1963.