УДК 539.374

ЛОКАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН С ЗАПРЕССОВАННЫМИ КОЛЬЦЕВЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

Д. В. Гоцев, А. В. Ковалев, А. Н. Спорыхин

Воронежский государственный университет, 394693 Воронеж

В рамках точных трехмерных уравнений исследована локальная неустойчивость пластин с кольцевыми включениями. Численный эксперимент проводился для случая, когда в пластину запрессовано два кольца из того же материала, что и пластина. Исследовано влияние физико-механических параметров среды на критические контактные давления.

Как известно, исследование поведения предварительно напряженных составных конструкций сводится к постановке и решению задач локальной неустойчивости [1, 2] при упругопластических деформациях. В настоящей статье в точной постановке на основе трехмерной линеаризованной теории устойчивости [3] исследуется бифуркация состояния равновесия составной пластинчатой конструкции из упругопластического материала с трансляционным упрочнением. В этом случае функция нагружения имеет вид [4]

$$F = (S_s^j - c_\beta(\varepsilon_s^j)^p)(S_s^j - c_\beta(\varepsilon_s^j)^p) - k_\beta^2 = 0, \tag{1}$$

а соотношения ассоциированного закона течения —

$$(e_s^j)^p = \eta(S_s^j - c_\beta(\varepsilon_s^j)^p). \tag{2}$$

Здесь c_β — коэффициенты упрочнения; k_β — пределы текучести; $S_s^j = \sigma_s^j - \sigma\delta_s^j$ — девиатор тензора напряжений; $\sigma = \sigma_k^k/3$; δ_s^j — символ Кронекера; ε_s^j — компоненты тензора деформаций; e_s^j — компоненты тензора скоростей деформаций; η — положительный множитель. Индексы s, j принимают значения от 1 до 3. По повторяющимся индексам проводится суммирование.

Исследуем явление локальной неустойчивости в пластинчатой конструкции, состоящей из бесконечной пластины с круговым отверстием радиуса R_N, в которое с некоторым натягом помещена система из N колец, последовательно запрессованных одно в другое. К внутреннему контуру первого кольца приложена равномерно распределенная нагрузка q_0. Предполагается, что пластина и включения выполнены из различных материалов. Из-за натягов на линиях сопряжения деталей возникают сжимающие усилия $q_1, q_2, \ldots, q_N$. Величины q_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ таковы, что образовавшиеся пластические области полностью охватывают внутренние контуры колец. Бифуркацию состояния равновесия пластинчатой конструкции исследуем в рамках второго варианта теории малых докритических деформаций [5], принимая концепцию продолжающегося нагружения.

Определение напряженно-деформированного докритического состояния составной пластинчатой конструкции при плоской деформации сводится к решению двух связанных задач о концентрации напряжений. Первая задача сводится к определению напряженно-деформированного состояния в i-м кольце, вторая — к определению напряженно-деформированного состояния в пластине.

Докритическое напряженно-деформированное состояние, соответствующее i-му кольцу, в полярных координатах (r, θ) определено в виде [5]

$$(u_r)_i^p = \frac{a_2^i}{r}, \qquad (\varepsilon_r)_i^p = -(\varepsilon_\theta)_i^p = -\frac{k_i r^2 + 2\sqrt{2}\, a_2^i}{r^2\sqrt{2}(2+c_i)},$$
$$(\sigma_r)_i^p = \frac{2c_i a_2^i}{2+c_i}\Big(\frac{1}{R_{i-1}^2} - \frac{1}{r^2}\Big) + \frac{2\sqrt{2}\,k_i}{2+c_i}\ \ln\,\frac{R_{i-1}}{r} - q_{i-1}, \tag{3}$$
$$(\sigma_\theta)_i^p = \frac{2c_i a_2^i}{2+c_i}\Big(\frac{1}{R_{i-1}^2} + \frac{1}{r^2}\Big) + \frac{2\sqrt{2}\,k_i}{2+c_i}\Big(\ln\,\frac{R_{i-1}}{r} - 1\Big) - q_{i-1}$$

в пластической области при $R_{i-1} < r < \psi_i$ и в виде

$$(u_r)_i^e = b_1^i\Big(\frac{r}{3} + \frac{1}{r}\Big) - \frac{rq_i}{6}, \qquad (\sigma_r)_i^e = 2b_1^i\Big(1 - \frac{1}{r^2}\Big) - q_i, \qquad (\sigma_\theta)_i^e = 2b_1^i\Big(1 + \frac{1}{r^2}\Big) - q_i \tag{4}$$

в упругой области при $\psi_i < r < R_i$. В (3), (4)

$$b_1^i = -\frac{\psi_i^2(3\sqrt{2}\,k_i + c_i q_i)}{2(6 - c_i\psi_i^2)}, \qquad a_2^i = b_1^i\Big(1 + \frac{\psi_i^2}{3}\Big) - \frac{q_i\psi_i^2}{6}.$$

Уравнение для определения радиуса упругопластической границы ψ_i имеет вид

$$\frac{c_i}{2+c_i}\Big(\frac{1}{\psi_i^2} + \frac{1}{R_{i-1}^2}\Big)\frac{q_i\psi_i^2}{3} -$$
$$- \frac{\psi_i^2 R_i^2(3\sqrt{2}\,k_i + c_i k_i)}{6R_i^2 - c_i\psi_i^2}\Big(\frac{1}{\psi_i^2} + \frac{1}{R_i^2} - \frac{c_i}{2+c_i}\Big(\frac{1}{\psi_i^2} + \frac{1}{R_{i-1}^2}\Big)\Big(\frac{\psi_i^2}{3R_i^2} + 1\Big)\Big) +$$
$$+ \frac{2\sqrt{2}\,k_i}{2+c_i}\Big(\ln\,\frac{\psi_i}{R_{i-1}} + 1\Big) + q_{i-1} - q_i = 0. \tag{5}$$

В равенствах (3)–(5) $i = 1, 2, 3, \ldots, N$; N — количество колец; ψ_i — радиусы упругопластических границ; R_i — радиусы колец.

Докритическое напряженно-деформированное состояние в пластине в полярных координатах определено в виде [5]

$$u_r^p = \frac{b_1}{r}, \quad \varepsilon_r^p = -\varepsilon_\theta^p = -\frac{2\sqrt{2}\,b_1 - kr^2}{r^2\sqrt{2}(2+c)}, \quad \sigma_r^p = \frac{2b_1 c}{2+c}\Big(1 - \frac{1}{r^2}\Big) + \frac{2\sqrt{2}\,k}{2+c}\ \ln\,r - q_N,$$
$$\sigma_\theta^p = \frac{2b_1 c}{2+c}\Big(1 + \frac{1}{r^2}\Big) + \frac{2\sqrt{2}\,k}{2+c}\,(\ln\,r + 1) - q_N \tag{6}$$

в пластической области при $R_N < r < \gamma$ и в виде

$$\sigma_r^e = -\sigma_\theta^e = -\frac{2b_1}{r^2} \tag{7}$$

в упругой области при $\gamma < r < \infty$.

Уравнение для определения радиуса упругопластической границы γ имеет вид

$$q_N - \frac{\sqrt{2}\,k}{2(2+c)}\,(4\,\ln\,\gamma + 2 + c\gamma^2) = 0. \tag{8}$$

В соотношениях (3), (4), (6) u_r — компонента вектора перемещения; c, k — коэффициент упрочнения и предел текучести для материала пластины.

Соотношения (3)–(8) записаны в безразмерном виде. Величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к модулю сдвига G, имеющие размерность длины, — к внешнему радиусу первого кольца R_1. Индексы e и p обозначают, что соответствующие величины относятся к упругой или пластической области.

Исследование устойчивости основного состояния (3)–(8) составной пластинчатой конструкции сводится к решению уравнений равновесия в вариациях для областей пластического и упругого деформирования при соответствующих граничных условиях. Уравнения равновесия имеют вид [5]

$$\nabla_s(\sigma_j^s + \sigma_\alpha^{0s}\nabla^\alpha u_j) = 0, \tag{9}$$

граничные условия —

$$N_s(\sigma_j^s + \sigma_\alpha^{0s}\nabla^\alpha u_j) = 0, \tag{10}$$

условия непрерывности напряжений и перемещений на поверхностях раздела зон упругого и пластического деформирования —

$$[N_s(\sigma_j^s + \sigma_\alpha^{0s}\nabla^\alpha u_j)]_\Sigma = 0, \qquad [u_j]_\Sigma = 0. \tag{11}$$

Здесь квадратные скобки обозначают разность значений стоящих в них величин в зонах упругого и пластического деформирования; Σ — поверхность раздела зон упругого и пластического деформирования.

Зависимость между значениями амплитуд напряжений и перемещений для несжимаемой упругопластической модели среды в пластической и упругой областях можно представить в виде [5]

$$\sigma_j^s = (a_{s\alpha} g^{\alpha\alpha}\nabla_\alpha u_\alpha + \rho)g_j^s + (1 - g_j^s)g^{ss}G_j^s(\nabla_s u_j + \nabla_j u_s), \tag{12}$$

где ρ — множитель Лагранжа; g_j^s — компоненты метрического тензора (отсутствует суммирование по индексам s, j). Величины $a_{s\alpha}$ и G_j^s можно представить в виде

$$a_{s\alpha} = 2\mu g_{s\alpha} - \frac{4\mu^2\chi f_{ss}^0 f_{\alpha\alpha}^0}{k_\beta^2(2\mu + c_\beta)}, \qquad G_j^s = \mu = G, \qquad f_{sj}^0 = S_{sj}^0 - c_\beta\varepsilon_{sj}^{0p}. \tag{13}$$

Значение $\chi = 1$ соответствует упругопластической среде [4], $\chi = 0$ — упругой. Индекс 0 относится к величинам в докритическом состоянии.

Уравнения (9)–(13) с учетом условия несжимаемости представляют собой связанную краевую статическую задачу устойчивости относительно амплитуд компонент векторов перемещений u, v, w и гидростатического давления p соответственно для упругих и пластических зон запрессованных колец и пластины. Нетривиальное решение этой задачи соответствует потере устойчивости основного состояния. Для нахождения собственных значений задачи перемещения и гидростатическое давление в зонах упругого и пластического деформирования для колец и пластины аппроксимируем двойными тригонометрическими рядами [5]:

$$\begin{aligned} u &= \sum_n^\infty\sum_m^\infty A_{nm}(r)\cos(m\theta)\cos(nz), \qquad v = \sum_n^\infty\sum_m^\infty B_{nm}(r)\sin(m\theta)\cos(nz), \\ w &= \sum_n^\infty\sum_m^\infty C_{nm}(r)\cos(m\theta)\sin(nz), \qquad p = \sum_n^\infty\sum_m^\infty D_{nm}(r)\cos(m\theta)\cos(nz). \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь n, m — параметры волнообразования.

Подставляя функции u, v, w, p в линеаризованные уравнения устойчивости (9) и учитывая (12), (13), а также условие несжимаемости, после ряда преобразований получим бесконечную систему дифференциальных уравнений относительно A_{nm} и B_{nm}

$$\begin{gathered}\xi_1 A(r)+\xi_2 A'(r)+\xi_3 A''(r)+\xi_4 B(r)+\xi_5 B'(r)+\xi_6 B''(r)+\xi_7 B'''(r)=0,\\ \xi_8 A(r)+\xi_9 A'(r)+\xi_{10} A''(r)+\xi_{11} A'''(r)+\xi_{12} B(r)+\xi_{13} B'(r)+\xi_{14} B''(r)=0,\end{gathered}\tag{15}$$

где

$$\xi_1=\sigma^0_\theta(1-m^2)-m^2-2r\sigma^0_{\theta,r}-n^2r^2+1,\qquad \xi_2=r^2\sigma^0_{r,r}-r(2\sigma^0_\theta+1-\sigma^0_r),$$

$$\xi_3=r^2(1-2a_0+\sigma^0_r),\qquad \xi_4=(1+\sigma^0_\theta)\Big(\frac{1}{m}-m\Big)-\frac{r\sigma^0_{\theta,r}(1+m^2)}{m^3}-\frac{r^2n^2}{m^3},$$

$$\xi_5=r\Big[(2a_0-1-\sigma^0_\theta)m-\frac{1}{m}\,(1+\sigma^0_\theta)\Big]+\frac{r^3}{m}\,(\sigma^0_{r,rr}-n^2)+\frac{r^2}{m}\,2\sigma^0_{r,r},$$

$$\xi_6=\frac{2r^2}{m}\,(\sigma^0_r+\sigma^0_{r,r}+1),\qquad \xi_7=\frac{r^3}{m}\,(\sigma^0_r+1),$$

$$\xi_8=nr^2(a_0-1-2\sigma^0_\theta)+\frac{m^2r}{n}\,(1+\sigma^0_\theta)-\frac{r}{n}\,(1+\sigma^0_r-r\sigma^0_{r,r}),$$

$$\xi_9=nr^3(1-a_0)-\frac{m^2r}{n}\,(1+\sigma^0_\theta)-\frac{r}{n}\,(1+\sigma^0_r-r\sigma^0_{r,r}),\qquad \xi_{10}=\frac{r^2}{n}\,(2+2\sigma^0_r+r\sigma^0_{r,r}),$$

$$\xi_{11}=\frac{r^3}{n}\,(1+\sigma^0_r),\quad \xi_{12}=mnr^2a_0-\frac{n^3r^2}{m}-\Big(\frac{1}{m}+\frac{m^3}{nr^2}\Big)(\sigma^0_\theta+1)+\frac{m}{nr^2}\,(1+\sigma^0_r-r\sigma^0_{r,r}),$$

$$\xi_{13}=\frac{rm}{n}\,(\sigma^0_{r,r}-\sigma^0_r-1)-\frac{r^3n}{m}\,(1+\sigma^0_r+r\sigma^0_{r,r}),\quad \xi_{14}=(1+\sigma^0_r)\Big(\frac{mr^2}{n}+\frac{r^4n}{m}\Big).$$

В (15) и далее индекс nm у величин A, B опущен.

Используя соотношения (11), (13), запишем условия непрерывности возмущений компонент вектора перемещений на внутреннем контуре первого кольца при $r=R_0$:

$$\begin{gathered}A^p_1\Big\{\frac{2}{R_0}\,[a_0-(\sigma^0_\theta)^p_1-1]\Big\}+(A')^p_1[2-2a_0+(\sigma^0_r)^p_1]+\\ +B^p_1\Big\{\frac{1}{R_0}\Big[ma_0-\frac{1}{m}\,(1+(\sigma^0_\theta)^p_1)+m^2((\sigma^0_\theta)^p_1+1-a_0)\Big]-\frac{n^2R_0}{m}\Big\}+\\ +(B')^p_1\,\frac{1}{m}\,[1+(\sigma^0_r)^p_1+R_0(\sigma^0_{\theta,r})^p_1]+(B'')^p_1\,\frac{R_0}{m}\,[1+(\sigma^0_r)^p_1]=0,\\ mA^p_1+B^p_1-R_0(B')^p_1[1+(\sigma^0_r)^p_1]=0,\\ A^p_1\Big[n-\frac{1+(\sigma^0_r)^p_1}{nR_0^2}\Big]+\frac{1+(\sigma^0_r)^0_1}{nR_0}\Big[(A')^p_1-\frac{m}{R_0}\,B^p_1+m(B')^p_1+R_0(A'')^p_1\Big]=0\end{gathered}\tag{16}$$

и на границе ψ_i $(i=1,2,\dots,N)$ упругой и пластической зон включений:

$$\begin{gathered}A^p_i\,\frac{1}{\psi_i}-(A')^p_i+B^p_i\,\frac{m}{\psi_i}+(B')^p_i\Big\{\frac{\psi_i}{2ma_0}\,[(\sigma^0_{r,r})^p_i-(\sigma^0_{r,r})^e_i]\Big\}+\frac{\psi_i}{2ma_0}\,[(\sigma^0_r)^e_i+1][(B'')^p_i-(B'')^e_i]=0,\\ (A'')^p_i-(A'')^e_i=0.\end{gathered}\tag{17}$$

На границе раздела γ упругой и пластической областей пластины имеют место условия, аналогичные (17).

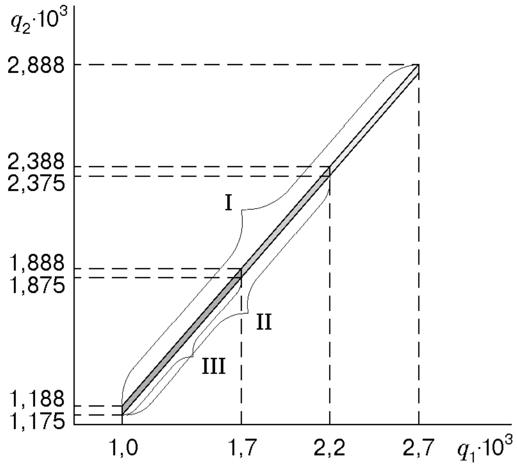

Рис. 1

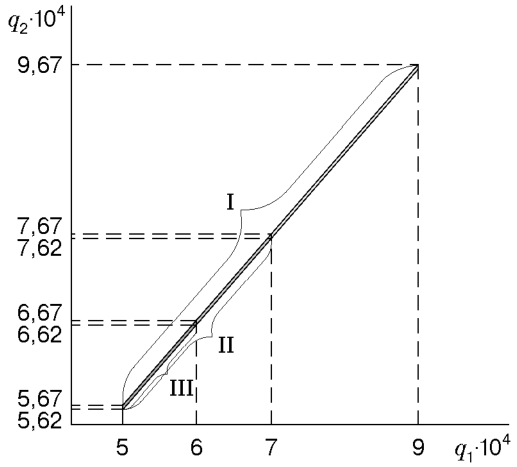

Рис. 2

На границе запрессованных i-го и $(i+1)$-го колец согласно (10) имеют место соотношения

$$A_{i+1}^p - (A')_{i+1}^p + \frac{m}{R_i} B_{i+1}^p + (B')_{i+1}^p \Big\{ \frac{R_i}{2ma_0} [(\sigma_{r,r}^0)_{i+1}^p - (\sigma_{r,r}^0)_i^e] \Big\} + \\ + \frac{R_i}{2ma_0} [(\sigma_r^0)_i^e + 1][(B'')_{i+1}^p - (B'')_i^e] = 0, \qquad (18)$$

$$(A'')_{i+1}^p - (A'')_i^e = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Из условия локальности возмущений $u_j \to 0$ при $r \to \infty$ $(j = 1,\ 2,\ 3)$ следует

$$(A')^e = 0, \qquad (A'')^e = 0, \qquad (B')^e = 0, \qquad (B'')^e = 0. \qquad (19)$$

Найти точное аналитическое решение краевой задачи (15)–(19) не представляется возможным, поэтому будем искать ее приближенное решение методом конечных разностей [6]. В результате получаем бесконечную систему однородных алгебраических уравнений, линейных относительно параметров A_{nm} и B_{nm}, решать которую необходимо с учетом уравнений, определяющих упругопластические границы колец (5) и пластины (8). Локальной потере устойчивости соответствуют значения A_{nm} и B_{nm}, отличные от нуля. Минимизация q_i должна производиться по шагу разностной сетки h, параметрам волнообразования по контуру m и образующей n, параметрам материала и конструкции λ_j.

Таким образом, получаем задачу многомерной оптимизации величин q_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ в зависимости от m, n из условия равенства нулю определителя полученной алгебраической системы: $\det(q_i, m, n, \lambda_j) = 0$.

Численный эксперимент проводился для случая, когда в пластину запрессовано два кольца $(N = 2)$ из того же материала, что и пластина. В качестве материала использовались сталь Ст. 3 ($c = 0{,}002$, $k = 0{,}0014$, $G = 0{,}81 \cdot 10^6$ кг/см^2) и медь ($c = 0{,}006$, $k = 0{,}0005$, $G = 0{,}81 \cdot 10^6$ кг/см^2).

На рис. 1 показаны области критических значений параметров контактных давлений q_1, q_2 при $n = m = 3$ в предположении $q_0 = 0$ на внутреннем контуре первого кольца из Ст. 3. Область I соответствует $R_0 = 0{,}002$; $R_2 = 1{,}1$ и включает область II ($R_0 = 0{,}007$; $R_2 = 1{,}1$), которая, в свою очередь, содержит область III ($R_0 = 0{,}02$; $R_2 = 1{,}1$).

На рис. 2 показаны области критических значений параметров контактных давлений q_1, q_2 при $n = m = 4$ в предположении $q_0 = 0$ на внутреннем контуре первого кольца из меди. Область I соответствует $R_0 = 0{,}002$; $R_2 = 1{,}1$ и включает область II ($R_0 = 0{,}007$; $R_2 = 1{,}1$), которая, в свою очередь, содержит область III ($R_0 = 0{,}02$; $R_2 = 1{,}1$).

Из анализа результатов численного расчета следует:

— при увеличении ширины внутреннего кольца область критических значений параметров q_1, q_2 увеличивается;

— при уменьшении значений физико-механических характеристик c, k область критических значений параметров q_1, q_2 уменьшается;

— при одночленной аппроксимации параметров перемещений значения критических параметров q_1, q_2 оказываются завышенными.

Локальная потеря устойчивости в пластине с включениями для материала Ст. 3 происходит по несимметричной форме с первоначальным образованием трех полуволн в направлении оси θ и стольких же полуволн в перпендикулярном направлении z. Для меди локальная потеря устойчивости происходит при $m = n = 4$. При $R_2 = R_1$ получим значения критической нагрузки q_1 для пластины с одним кольцевым включением.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Спорыхин А. Н., Чиканова Н. Н.** К локальной неустойчивости пластины с включением // Прикл. механика. 1991. Т. 27, № 8. С. 106–110.
2. **Спорыхин А. Н., Чиканова Н. Н.** Локальная неустойчивость составных упругопластических конструкций // Механика композит. материалов. 1995. Вып. 31, № 2. С. 248–260.
3. **Гузь А. Н.** Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища шк., 1986.
4. **Ишлинский А. Ю.** Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. мат. журн. 1954. Вып. 6, № 3. С. 36–43.
5. **Спорыхин А. Н.** Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1997.
6. **Корнишин М. С.** Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. М.: Наука, 1964.

Поступила в редакцию 19/VI 2000 г.