

УДК 532.516

## ПОДЪЕМНАЯ СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЕ ТЕЛО В ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ПОЛОСТИ, СОВЕРШАЮЩЕЙ ПОСТУПАТЕЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

А. А. Иванова, В. Г. Козлов, В. Д. Щипицын

Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет,  
614990 Пермь, Россия  
E-mails: a.ivanova@pspu.ru, kozlov@pspu.ru, vital13@bk.ru

Исследуется осредненная подъемная сила, действующая на цилиндрическое тело вблизи границы полости с жидкостью, совершающей поступательные колебания. В экспериментах варьируются вязкость жидкости, размер и относительная плотность тела, параметры вибраций. Методом динамического подвеса тела в поле силы тяжести измерена подъемная сила, в случае когда тело совершает инерционные колебания, не касаясь стенок. Установлено, что вибрации генерируют силу отталкивания, удерживающую “тяжелое” тело над дном полости, а “легкое” — на некотором расстоянии от верхней стенки. Показано, что влияние силы отталкивания проявляется на расстоянии, сравнимом с толщиной слоя Стокса, и возрастает по мере приближения к стенке. Приведено описание механизма генерации подъемной силы. Показано, что в случае больших безразмерных частот экспериментальные и теоретические результаты согласуются.

**Ключевые слова:** вибрации, вибрационная механика, цилиндрическое тело, гидродинамическое взаимодействие, подъемная сила.

Поведение твердых одиночных включений, совершающих колебания в несжимаемой жидкости под действием осциллирующей внешней силы, является актуальной прикладной задачей, исследованию которой посвящен ряд экспериментальных и теоретических работ. Так, при поступательных вибрациях полости телá, плотность которых отличается от плотности жидкости, совершают инерционные колебания. Описание механизма генерации подъемной силы при колебаниях малой амплитуды симметричного тела в невязкой жидкости приведено в работе [1]. Показано, что осредненная сила генерируется при нарушении симметрии пульсационного поля скорости (распределения осредненного давления на поверхности тела).

В работах [2–4] проведено исследование сил, действующих на осциллирующие в жидкости симметричные тела, в неакустическом приближении. В [2] рассмотрена задача о поведении цилиндра в идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной твердой плоской поверхностью, совершающей поступательные колебания в поле силы тяжести; показано, что тело притягивается к границе. Найдены условия, при которых в поле силы тяжести

---

Работа выполнена в рамках программы стратегического развития Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета (код проекта 030-Ф) и при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (задание № 1.2783.2011) и Министерства образования Пермского края (код проекта С26/625).

цилиндр с плотностью, меньшей плотности окружающей его жидкости, под действием вибраций тонет. В приближении большого по сравнению с размерами тела расстояния между телом и стенкой получено аналитическое решение. В [4] с использованием численного метода рассмотрен случай, когда расстояние между телом и стенкой мало по сравнению с радиусом тела. В [5] рассмотрены силы, действующие на тела цилиндрической и сферической формы, находящиеся на произвольном расстоянии от стенки вибрирующей полости с идеальной жидкостью. Получено выражение для силы в зависимости от расстояния и параметров вибраций.

В указанных выше задачах амплитуда колебаний тела предполагается малой, а частота — высокой. При этом толщины слоев Стокса считаются пренебрежимо малыми, поэтому жидкость рассматривается как невязкая. Особенностью невязкого приближения является генерация осредненной силы притяжения тела к границе полости (или к другому телу). С увеличением расстояния эта сила быстро уменьшается и, как показывают эксперименты [6], существенна лишь на расстоянии, сравнимом с размером тела.

В [7, 8] теоретически и экспериментально установлено, что в случае непоступательных вибраций полости генерируется вибрационная подъемная сила, действующая во всем объеме полости.

В [6] обнаружено, что на расстоянии от твердой границы, сравнимом с толщиной слоя Стокса, характер взаимодействия меняется. На колеблющееся тело действует сила отталкивания. Экспериментальное исследование такого взаимодействия в случае тела сферической формы выполнено в [9].

Исследование осредненной силы, действующей на цилиндрическое тело в полости прямоугольного сечения, совершающей высокочастотные поступательные колебания вдоль широкой грани, начато в [10]. Показано, что на расстоянии, сравнимом с толщиной слоя Стокса, проявляется сила отталкивания, быстро уменьшающаяся при удалении тела от границы.

В настоящей работе обобщаются результаты экспериментального исследования динамики цилиндра, находящегося вблизи колеблющейся горизонтальной стенки полости. Рассматривается зависимость подъемной силы от относительной плотности тела и безразмерной частоты вибраций. Построена теоретическая модель, описывающая механизм генерации вибрационной силы отталкивания, действующей на цилиндрическое тело.

**1. Описание эксперимента.** Кювета (рис. 1), представляющая собой полый параллелепипед размерами  $120 \times 55 \times 95$  мм, изготовленный из прозрачных плексигласовых

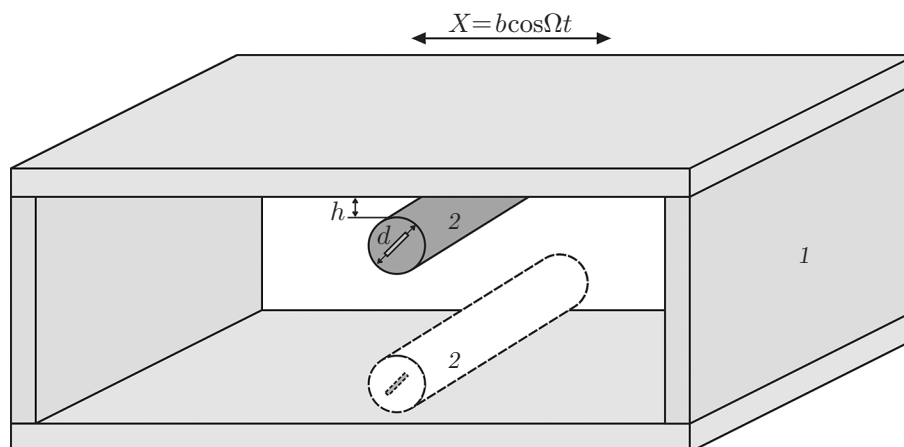


Рис. 1. Схема эксперимента:

1 — кювета, 2 — цилиндрическое тело

Параметры экспериментальных образцов

| $d$ , мм | $\rho_S$ , г/см <sup>3</sup> | $d$ , мм | $\rho_S$ , г/см <sup>3</sup> | $d$ , мм | $\rho_S$ , г/см <sup>3</sup> |
|----------|------------------------------|----------|------------------------------|----------|------------------------------|
| 20,6     | 0,06                         | 10,2     | 0,76                         | 14,7     | 1,20                         |
| 20,0     | 0,66                         | 20,2     | 0,93                         | 20,1     | 1,20                         |
| 12,3     | 0,66                         | 26,0     | 0,93                         | 20,0     | 1,43                         |

пластин, закрепляется на столике механического вибратора (описание вибратора приведено в [9]). Внутри кюветы помещается исследуемое тело, полость заполняется жидкостью, при этом контролируется отсутствие газовых и твердых включений. Эксперименты проводятся с телами, плотность  $\rho_S$  которых как меньше плотности жидкости  $\rho_L$ , так и больше нее (см. рис. 1). Колебания осуществляются вдоль широкой грани кюветы, расположенной горизонтально.

Возвратно-поступательные колебания по гармоническому закону  $X = b \cos \Omega t$  сообщаются кювете с помощью механического вибратора. Амплитуда вибраций кюветы  $b$  изменяется в диапазоне от 1 до 55 мм, линейная частота вибраций полости  $f \equiv \Omega/(2\pi)$  в ходе экспериментов варьируется в интервале от 0,1 до 25,0 Гц. Горизонтальное положение полости и оси вибраций контролируется с погрешностью 0,01 рад.

Опыты проводятся с цилиндрами, имеющими различные диаметр  $d$  и плотность  $\rho_S$  (см. таблицу). Длина всех цилиндров одинакова и равна 80 мм. На торцах цилиндров имеются светоотражающие метки, позволяющие контролировать их вращательное движение.

В качестве рабочей жидкости используются водоглицериновые смеси, а также различные масла. Кинематическая вязкость жидкости варьируется в интервале  $\nu = (0,3 \div 5,8) \times 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с; плотность жидкости изменяется в диапазоне  $\rho_L = 0,88 \div 1,26$  г/см<sup>3</sup>, при этом диапазон значений относительной плотности тела составляет  $\rho \equiv \rho_S/\rho_L = 0,05 \div 1,61$ .

Вязкость жидкости измеряется капиллярным вискозиметром (относительная погрешность не превышает 1 %), плотность — ареометром (погрешность — 0,01 г/см<sup>3</sup>), частота вибраций — цифровым тахометром (погрешность — 0,1 Гц), амплитуда вибраций — оптическим катетометром (погрешность — 0,1 мм).

В опытах с телом заданного диаметра варьируются кинематическая вязкость жидкости, частота и амплитуда вибраций полости. Визуальные наблюдения проводятся в обычном и стробоскопическом освещении. Положение тела регистрируется с помощью цифрового фотоаппарата в свете лампы-вспышки.

**2. Влияние вязкости и относительной плотности тела.** В отсутствие вибраций “легкий” (“тяжелый”) цилиндр занимает устойчивое положение в центральной части полости, соприкасаясь с верхней (нижней) стенкой. При вибрациях полости тело совершает инерционные колебания вдоль ее широкой грани, сохраняя перпендикулярную оси вибраций ориентацию. Такое действие вибраций определяется гидродинамическим взаимодействием колеблющегося тела с жидкостью. При заданной амплитуде  $b$  и достижении порогового значения частоты вибраций  $f$  тело отрывается и удаляется от стенки на некоторое расстояние  $h$ , совершая при этом колебания относительно полости и не касаясь стенки. Ширина зазора  $h$  в течение периода практически не меняется (вибрационный подвес). При уменьшении частоты  $f$  расстояние между телом и стенкой монотонно уменьшается, цилиндр постепенно приближается к стенке и при некоторой критической частоте скачком возвращается к ней.

На рис. 2 приведены зависимости критического значения частоты от амплитуды вибраций, соответствующие удалению “легкого” тела от верхней границы полости (переходу в подвешенное состояние) и возвращению к ней. С увеличением амплитуды пороговые значения частоты вибраций уменьшаются. При переходах наблюдается гистерезис.

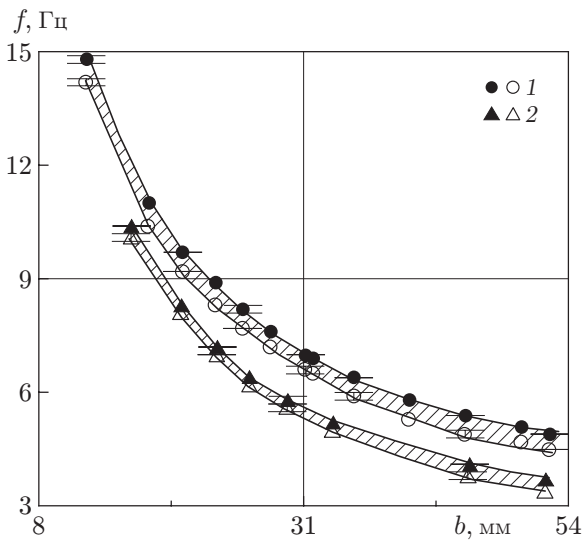


Рис. 2

Рис. 2. Кривые пороговых значений частоты отрыва тела от верхней стенки и его возвращения ( $d = 20,6$  мм,  $\rho_S = 0,06$  г/см<sup>3</sup>):

1 —  $\nu = 2,20 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с, 2 —  $\nu = 0,61 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с; темные точки — частота отрыва цилиндра от верхней стенки полости, светлые — частота его возвращения; заштрихованные области — зоны гистерезиса

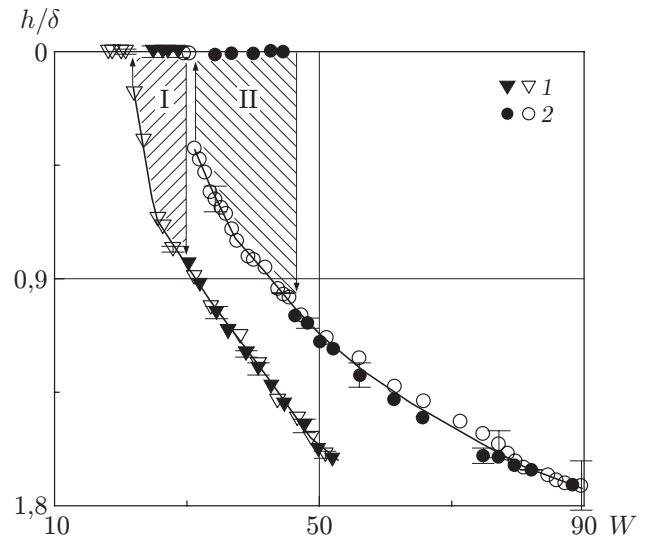


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость безразмерной величины зазора от вибрационного параметра  $W$ :

1 —  $\rho = 0,54$ , 2 —  $\rho = 0,61$ ; темные точки — значения  $h$ , полученные при увеличении  $W$ , светлые — значения  $h$ , полученные при уменьшении  $W$ ; заштрихованные области — зоны гистерезиса (I — область, соответствующая диапазону частот  $\omega = 64 \div 75$ , II — область, соответствующая диапазону частот  $\omega = 30 \div 36$ ); стрелки — направления критических перемещений тела при увеличении и уменьшении параметра  $W$

С увеличением вязкости жидкости пороговые кривые смещаются в область более высоких частот. В рассмотренных случаях гистерезис при переходах существует во всем изученном интервале амплитуд вибраций  $b$ . Величина гистерезиса возрастает с увеличением амплитуды (с уменьшением частоты вибраций) и вязкости.

Поведение тел, плотность которых больше плотности жидкости, аналогично поведению “легких” тел. Пороговые переходы тела в подвешенное состояние (отталкивание от нижней стенки полости) при повышении частоты вибраций и возвращение на дно при ее понижении происходят с гистерезисом.

Динамику тела с заданной относительной плотностью  $\rho$ , находящегося в поле силы тяжести, определяют вибрационный параметр  $W = (b\Omega)^2/(gd)$  [6] и безразмерная частота вибраций  $\omega = \Omega d^2/\nu$ , характеризующая отношение диаметра тела  $d$  к толщине слоя Стокса  $\delta = \sqrt{2\nu/\Omega}$ . Величина зазора между колеблющимся телом и гранью полости характеризует радиус действия силы отталкивания, влияние которой проявляется на расстоянии, сравнимом с толщиной слоя Стокса.

На рис. 3 представлена зависимость расстояния  $h$ , измеренного в единицах толщины слоя Стокса, от безразмерного параметра  $W$  для тел с различной плотностью. Величина  $h$  определяется по фотографиям тела в крайних точках смещения полости, когда ее скорость равна нулю. Результаты, полученные в крайних правом и левом положениях полости, согласуются. Заметим, что при изменении вибрационного параметра  $W$  (за счет изменения частоты вибраций при заданной амплитуде) безразмерная частота  $\omega$  также меняется.

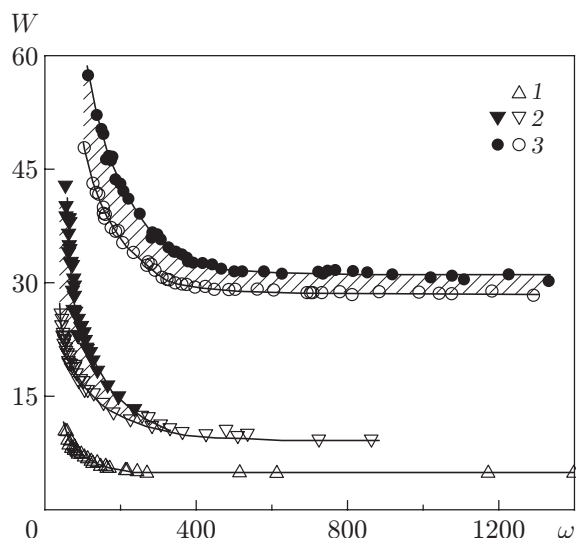


Рис. 4. Кривые пороговых значений вибрационного параметра  $W$ , при которых происходят отрыв тела от верхней стенки полости (темные точки) и возвращение в исходное положение (светлые точки):  
 1 —  $d = 20,6$  мм,  $\rho = 0,05$ ,  $\nu = (0,3 \div 2,2) \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с, 2 —  $d = 12,3; 20,0$  мм,  $\rho = 0,50 \div 0,54$ ,  
 $\nu = (0,4 \div 5,8) \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с, 3 —  $d = 20,2; 26,0$  мм,  $\rho = 0,75 \div 0,77$ ,  $\nu = (0,5 \div 2,5) \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с;  
 заштрихованные области — зоны гистерезиса

Для представленных на рис. 3 результатов справедливы зависимости  $\omega = 13,6W^{1/2}$  при  $\rho = 0,54$  и  $\omega = 5,30W^{1/2}$  при  $\rho = 0,61$ . В случае когда тело с относительной плотностью  $\rho = 0,54$  находится в подвешенном состоянии, темные точки, полученные при повышении частоты вибраций, практически совпадают со светлыми точками, полученными при понижении частоты. Некоторое несоответствие светлых и темных точек в экспериментах с “тяжелым” телом обусловлено погрешностью измерения (характерные доверительные интервалы приведены на рис. 3).

Критические перемещения тела при увеличении и уменьшении параметра  $W$  на рис. 3 показаны стрелками. При переходах наблюдается гистерезис (заштрихованные области I и II). С увеличением относительной плотности “легкого” тела кривые смещаются в область больших значений вибрационного параметра, при этом пороговое значение  $W$  и величина гистерезиса увеличиваются. Величина гистерезиса зависит также от безразмерной частоты. Ниже показано, что с уменьшением  $\omega$  величина гистерезиса возрастает.

Безразмерное расстояние  $h/\delta$ , на котором тело занимает квазиравновесное положение в поле силы тяжести, монотонно увеличивается при увеличении вибрационного параметра  $W$ . Во всех случаях максимальное расстояние от тела до границы не превышает значения  $h/\delta \approx 2$ .

На рис. 4 приведены зависимости  $W(\omega)$ , полученные в опытах с телами заданной относительной плотности, при варьировании диаметра тела и вязкости жидкости. Эти зависимости хорошо согласуются, что свидетельствует об определяющей роли параметров  $\omega$ ,  $W$  в исследуемом процессе. Для тел с различной относительной плотностью кривые равновесия имеют сходный характер: в области высоких частот кривые выходят на горизонтальные участки, т. е. при изменении  $\omega$  пороговое значение  $W$  остается практически постоянным. В области частот  $\omega < 400$  с уменьшением  $\omega$  пороговые значения  $W$  монотонно увеличиваются.

В случае  $\rho = 0,05$  гистерезис в исследованном диапазоне частот практически отсутствует. Для тела с относительной плотностью  $\rho \approx 0,5$  гистерезис наблюдается лишь в об-

ласти невысоких безразмерных частот, при  $\omega > 400$  гистерезис отсутствует, пороговые значения  $W$  при отрыве и возвращении тела совпадают, поэтому на рис. 4 они показаны только светлыми точками. Особенностью пороговых переходов тел, плотность которых близка к плотности жидкости ( $\rho > 0,7$ ), является наличие гистерезиса во всем изученном диапазоне  $\omega$  (точки 3 на рис. 4).

В случае “легких” тел с увеличением относительной плотности  $\rho$  пороговые кривые смещаются в область больших значений  $W$ . Пороговые кривые для “тяжелых” тел на плоскости  $(\omega, W)$  имеют аналогичный вид. Однако зависимость от плотности имеет обратный характер: с увеличением относительной плотности пороговые кривые вибрационного подвеса тела на плоскости  $(\omega, W)$  смещаются в область меньших значений  $W$ .

**3. Обсуждение результатов.** В эксперименте выполняется непосредственное измерение осредненной вибрационной подъемной силы. В случае когда тело находится в квазистационарном подвешенном состоянии, подъемная сила уравнивается весом тела и в расчете на единицу длины равна  $f_V = (\rho_L - \rho_S)g\pi d^2/4$ . Сила отталкивания зависит от амплитуды и частоты вибраций: с увеличением интенсивности вибраций она возрастает. При заданных параметрах вибраций сила зависит от расстояния до стенки полости (уменьшается с его увеличением), поэтому для достижения состояния равновесия (подвеса) тела на большем расстоянии от границы необходимы вибрации большей интенсивности. Однако вибрации не способны оттолкнуть тело и сделать устойчивым его положение на расстоянии, превышающем удвоенную толщину слоя Стокса (см. рис. 3). Этот результат, свидетельствующий о том, что вязкий пограничный слой, расположенный вблизи колеблющегося тела, оказывает существенное влияние на генерацию силы отталкивания, согласуется с результатами экспериментов со сферическими телами [9], в которых установлено, что при  $h/\delta > 2$  подъемная вибрационная сила меняет знак: за пределами области вязкого взаимодействия сила отталкивания сменяется вибрационной силой притяжения.

Введем безразмерную вибрационную силу, действующую на единицу длины тела:

$$F_V \equiv f_V/(\rho_L b^2 \Omega^2 d).$$

Из определения параметра  $W$  следует, что величина, обратная ему, характеризует силу  $F_V$ :

$$F_V = \pi(1 - \rho)/(4W).$$

В области высоких частот ( $\omega > 400$ ), когда размеры тела существенно превышают толщину пограничного слоя Стокса, безразмерный параметр  $W$  (а следовательно, и вибрационная сила отталкивания  $F_V$ ) практически не меняется с увеличением частоты (см. рис. 4). В области низких частот значение  $W$  резко увеличивается (сила  $F_V$  уменьшается) с уменьшением  $\omega$ . Это объясняется уменьшением амплитуды колебаний тела относительно полости при уменьшении относительного размера тела  $d/\delta$ .

**4. Теоретическая модель.** Проведем анализ механизма отталкивания колеблющегося тела от стенки. При потенциальном обтекании жидкостью длинного цилиндра, находящегося в полости, совершающей поступательные вибрации с амплитудой  $b$ , он колеблется относительно полости с амплитудой  $A$ :

$$A = \frac{\rho - 1}{\rho + C_m} b. \quad (1)$$

Здесь  $C_m$  — присоединенная масса (значение  $C_m = 1$  соответствует случаю цилиндрического тела, расположенного на большом расстоянии от стенки [11],  $C_m = 2,29$  — случаю цилиндра, находящегося вблизи стенки [12]).

Для расчета подъемной силы, действующей на колеблющееся вдоль границы полости тело, используем точное решение задачи об обтекании покоящегося на дне цилиндрического тела осциллирующим потоком невязкой жидкости [13]. Осредненная подъемная сила,

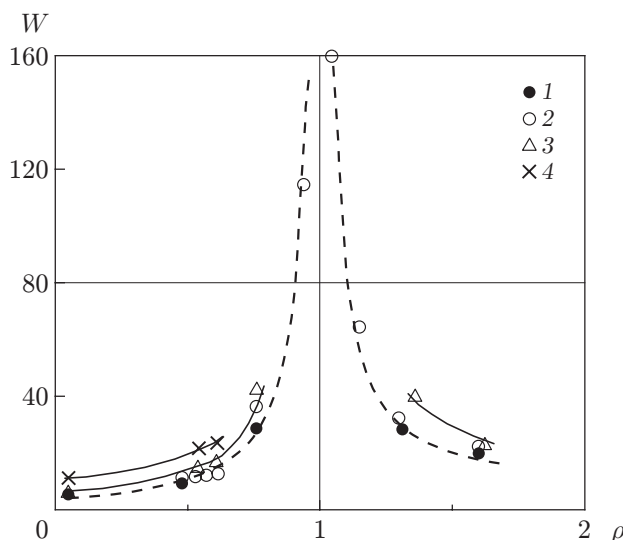


Рис. 5. Зависимость пороговых значений вибрационного параметра  $W$ , при которых тело удерживается вблизи границы полости, от относительной плотности  $\rho$  при различных значениях  $\omega$ : точки — результаты экспериментов (1 —  $\omega \rightarrow \infty$ , 2 —  $\omega = 200$ , 3 —  $\omega = 120$ , 4 —  $\omega = 50$ ), сплошные линии — кривые, построенные по экспериментальным данным, штриховые — результаты расчета по формуле (2)

действующая на единицу длины цилиндра, определяется выражением  $F_L = 1,12\rho_L V_0^2 d$  ( $V_0$  — амплитуда скорости осциллирующего потока). В предельном случае высоких частот (в невязкой жидкости) задача об осциллирующем движении тела вблизи стенки эквивалентна задаче об обтекании неподвижного тела осциллирующим потоком. Это позволяет вычислить критическое значение скорости колебаний тела (критическое значение параметра  $W$ ), при котором тело оторвется от границы. При этом подъемная сила будет уравниваться весом тела. С учетом (1) пороговое значение, при котором тело удерживается вблизи границы, определяется выражением

$$W = \frac{\pi (\rho + 2,29)^2}{4 \cdot 1,12|\rho - 1|}. \tag{2}$$

Из (2) следует, что при  $\rho \rightarrow 1$  критическое значение параметра  $W$  стремится к бесконечности. На тела с относительной плотностью  $\rho \rightarrow 1$  вибрационная подъемная сила практически не действует, поскольку амплитуда их колебаний относительно жидкости  $A \rightarrow 0$ .

Выражение (2) соответствует случаю больших безразмерных частот, когда размер тела значительно превышает толщину пограничного слоя. При этом тело находится вблизи границы, осциллирующий потенциальный поток огибает тело и не проникает в зазор между телом и границей полости. Этим объясняется тот факт, что расстояние, на которое удаляется находящееся в подвешенном состоянии тело, не превышает удвоенной толщины слоя Стокса (см. рис. 3).

При исследовании вибрационного подвеса тела вблизи границы обнаружена немонотонная зависимость вибрационной подъемной силы от относительной плотности  $\rho$  (рис. 5). На рис. 5 приведены пороговые значения параметра  $W$ , при которых возможно вибрационное удержание тела в подвешенном состоянии (возвращение тела к границе полости).

По мере уменьшения разности плотностей  $|\rho - 1|$  критическое значение параметра  $W$  резко увеличивается, что свидетельствует об уменьшении подъемной силы и согласуется с выражением (2). Это объясняется уменьшением амплитуды инерционных колебаний тела

относительно жидкости. При  $\rho = 1$  тело и жидкость совершают твердотельные поступательные колебания вместе с полостью, при этом подъемная сила отсутствует. Пороговые значения  $W$ , вычисленные по формуле (2), показаны на рис. 5 штриховыми кривыми. Экспериментальные данные, полученные в области высоких частот ( $\omega \geq 200$ ), удовлетворительно согласуются с результатами расчетов. При понижении безразмерной частоты пороговые кривые монотонно смещаются в область больших значений  $W$ . Уменьшение вибрационной подъемной силы  $F_V$  при понижении  $\omega$  происходит вследствие уменьшения амплитуды колебаний тела относительно полости в результате его вязкого взаимодействия с твердой границей. Заметим, что ширина области гистерезиса при этом увеличивается.

**Заключение.** В работе исследована осредненная динамика цилиндрического тела в полости прямоугольного сечения, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью и совершающей поступательные вибрации вдоль широкой грани. Эксперименты выполнены в широком диапазоне значений относительной плотности тела (плотность тела была больше и меньше плотности жидкости). Использовалась оригинальная методика измерения подъемной силы, основанная на вибрационном подвесе тела в поле силы тяжести. Обнаружено, что в непосредственной близости от границ полости на тело действует вибрационная сила отталкивания, обусловленная гидродинамическим взаимодействием. Показано, что в случаях “легкого” и “тяжелого” тела характерное расстояние от границы полости, на котором проявляется сила отталкивания, сравнимо с толщиной слоя Стокса. Пороговые переходы тел с различной относительной плотностью представлены на плоскости безразмерных параметров в обобщенном виде. Обнаружено, что при  $\rho \rightarrow 1$  резко увеличивается пороговое значение параметра  $W$ , при котором возможно удержание тела в подвешенном состоянии. Приведено описание механизма генерации вибрационной силы отталкивания. Установлено, что в области больших безразмерных частот экспериментальное и теоретическое пороговые значения  $W$ , при которых возможен вибрационный подвес тела в поле силы тяжести, хорошо согласуются. В области умеренных безразмерных частот подъемная сила уменьшается с понижением частоты. Исследованные процессы могут представлять интерес при решении задач контроля и управления твердыми включениями в вязких жидкостях с помощью вибраций.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
2. Сенницкий В. Л. О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1985. № 5. С. 19–23.
3. Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л. О движении тела в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
4. Карева И. Е., Сенницкий В. Л. О движении кругового цилиндра в колеблющейся жидкости // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 103–105.
5. Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А. О движении твердого тела в вибрирующей жидкости // Конвективные течения / Под ред. Е. М. Жуховицкого. Пермь: Перм. гос. пед. ин-т, 1987. С. 61–70.
6. Иванова А. А., Козлов В. Г., Кузаев А. Ф. Вибрационная подъемная сила, действующая на тело в жидкости вблизи твердой поверхности // Докл. АН. 2005. Т. 402, № 4. С. 488–491.
7. Kozlov V. G. Solid body dynamics in cavity with liquid under highfrequency rotational vibration // Eur. Lett. 1996. V. 39, N 9. P. 651–656.
8. Иванова А. А., Козлов В. Г., Эвеск П. Динамика цилиндрического тела в заполненном жидкостью секторе цилиндрического слоя при вращательных вибрациях // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1998. № 4. С. 29–39.



9. **Иванова А. А., Козлов В. Г., Кузаев А. Ф.** Вибрационное взаимодействие сферического тела с границами полости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2008. № 2. С. 31–40.
10. **Иванова А. А., Козлов В. Г., Щипицын В. Д.** Легкий цилиндр в полости с жидкостью при горизонтальных вибрациях // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2010. № 6. С. 63–73.
11. **Бетчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
12. **Garrison С. J.** Added mass of a circular cylinder in contact with a rigid boundary // J. Hydronaut. 1972. V. 6, N 1. P. 59–60.
13. **Сенницкий В. Л.** О силовом взаимодействии жидкости и тела, касающегося стенки // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, вып. 20. С. 1–5.

*Поступила в редакцию 24/VII 2013 г.,  
в окончательном варианте — 28/X 2013 г.*

---