

УДК 539.3(1):517.958

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ УПРУГИЕ ПОЛЯ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ С ДЕФЕКТАМИ

С. А. Назаров

Институт проблем машиноведения РАН, 199178 Санкт-Петербург
E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Вариационный метод поиска локализованных волн (ловушечных мод) модифицирован для периодических упругих волноводов с частично заземленными поверхностями. Установлены два достаточных условия существования локализованных полей в волноводах с дефектами — для полостей с положительным объемом и для трещин. При наличии упругой и геометрической симметрии локализованные поля обнаружены также у периодических упругих волноводов с поверхностями, свободными от внешних нагрузок.

Ключевые слова: периодический волновод с дефектами, локализованные упругие поля, вариационный метод.

1. Периодический волновод с дефектами. Пусть ϖ — открытое множество в слое $\{x = (y, z): y = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, z \in (0, l)\}$, имеющее границу $\partial\varpi$ и компактное замыкание $\bar{\varpi} = \varpi \cup \partial\varpi$; Π — периодическое множество (рис. 1, *a*), являющееся внутренностью объединения замыканий сдвигов $\varpi_m = \{x: (y, z - lm) \in \varpi\}$ ячейки периодичности ϖ :

$$\bar{\Pi} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \bar{\varpi}_m, \quad \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Предполагая, что Π — область, в частности связное множество, интерпретируем ее как неоднородное анизотропное упругое тело. Масштабированием сведем период l к единице (многие скалярные или векторные поля оказываются 1-периодическими относительно переменной $z = x_3$). В теле Π имеется дефект Θ (полость или трещина) — компактное, но

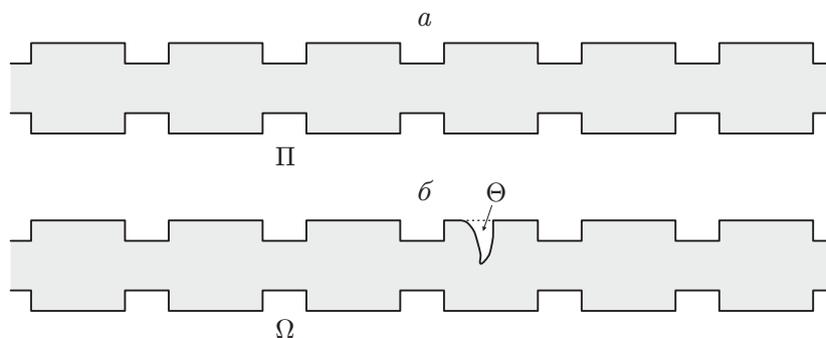


Рис. 1. Схемы периодических волноводов:

a — периодический волновод без дефекта; *b* — периодический волновод с дефектом

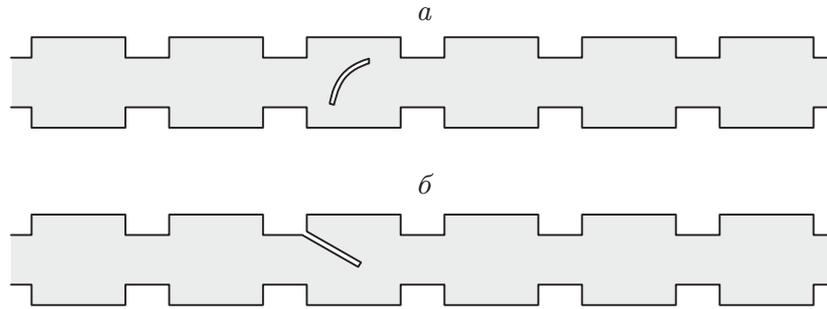


Рис. 2. Волноводы с внутренней (а) и краевой (б) трещинами

необязательно связное множество. Считаем, что упругий волновод $\Omega = \Pi \setminus \Theta$ (рис. 1, б) имеет липшицеву границу и в случае наличия трещины может быть представлен как объединение липшицевых областей. Дефект Θ может быть внутренней полостью или каверной (рис. 2).

Предположение о липшицевости границы обеспечивает выполнение используемого далее неравенства Корна и исключает не связанные с волновыми процессами на бесконечности нулевые заострения, которые могут порождать непрерывный спектр задачи теории упругости (см., например, [1]). В пп. 3, 4 считается, что часть $\Sigma \subset \partial\Pi$ поверхности $\partial\Omega$ жестко закреплена, но в п. 5 при дополнительном требовании симметрии рассматривается волновод с поверхностью, свободной от внешних нагрузок. При этом $\Sigma = \Upsilon \setminus \Theta$ и $\Upsilon = \bigcup v_m$, $v_m = \{x: (y, z - m) \in v\}$, $m \in \mathbb{Z}$, где v — фрагмент боковой поверхности $\gamma = \{x \in \partial\omega: 0 < z < 1\}$ ячейки периодичности ($v \neq \emptyset$ в пп. 3, 4, но $v = \emptyset$ в п. 5).

Упругие волны в волноводе Ω описываются с помощью системы дифференциальных уравнений равновесия

$$-\frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{jk}(u; x) = \lambda \rho(x) u_j(x), \quad x \in \Omega \quad (1.1)$$

с краевыми условиями

$$\nu_k(x) \sigma_{jk}(u; x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \bar{\Sigma}; \quad (1.2)$$

$$u_j(x) = 0, \quad x \in \Sigma. \quad (1.3)$$

Здесь u_j — компонента вектора смещений (u_1, u_2, u_3) ; ρ — плотность упругого материала; λ — спектральный параметр (квадрат частоты гармонических колебаний); $\sigma_{jk}(u)$ — декартовы компоненты тензора напряжений $\sigma(u)$:

$$\sigma_{jk}(u; x) = a_{jk}^{pq}(x) \varepsilon_{pq}(u; x), \quad \varepsilon_{pq}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_p}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \right),$$

ν_k — компоненты единичного вектора (ν_1, ν_2, ν_3) внешней нормали, определенного почти всюду на липшицевой поверхности; индексы j, k и p, q принимают значения 1, 2, 3, по повторяющимся индексам проводится суммирование. Упругие модули a_{jk}^{pq} , образующие симметричный положительно-определенный четырехвалентный тензор жесткости a , и плотность ρ являются измеримыми ограниченными 1-периодическими относительно z функциями, причем при почти всех $x \in \Pi$ выполняются соотношения

$$c_a \xi_{jk} \xi_{jk} \leq c_a \xi_{jk} a_{jk}^{pq} \xi_{pq} \leq C_a \xi_{jk} \xi_{jk}, \quad c_\rho \leq \rho(x) \leq C_\rho,$$

где ξ_{jk} — симметричный ($\xi_{jk} = \xi_{kj}$) постоянный тензор; c_a, C_a, c_ρ, C_ρ — положительные постоянные.

Вследствие возможных иррегулярностей границы задачу (1.1)–(1.3) следует понимать как интегральное тождество [2]

$$(a_{jk}^{pq}\varepsilon_{pq}(u), \varepsilon_{jk}(v))_{\Omega} = \lambda(\rho u_j, v_j)_{\Omega}, \quad v \in \overset{0}{H}^1(\Omega; \Sigma), \quad (1.4)$$

где $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Omega)$; $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева; $\overset{0}{H}^1(\Omega; \Sigma)$ — его подпространство, составленное из вектор-функций, подчиняющихся условию Дирихле (1.3). В соответствии с вариационной формулировкой (1.4) задачи теории упругости требуется найти комплексное число $\lambda \in \mathbb{C}$ и нетривиальную вектор-функцию $u \in \overset{0}{H}^1(\Omega; \Sigma)$, удовлетворяющие соотношению (1.4).

В силу введенных ограничений, в частности из-за наличия непустых зон защемления, справедливо неравенство Корна (см., например, [3, 4], а также [5. Гл. 3])

$$\|u; H^1(\Omega)\|^2 \leq c_{\Omega} \langle u, u \rangle_{\Omega}, \quad u \in \overset{0}{H}^1(\Omega; \Sigma), \quad (1.5)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega}$ — билинейная форма в левой части равенства (1.4); c_{Ω} — постоянная, зависящая от множеств ϖ , Θ и упругих модулей a_{jk}^{pq} .

Для того чтобы использовать результаты теории операторов в гильбертовом пространстве, снабдим функциональное пространство $\mathcal{H} = \overset{0}{H}^1(\Omega; \Sigma)$ скалярным произведением $\langle u, v \rangle_{\Omega}$, которое обладает требуемыми свойствами в силу неравенства Корна (1.5). Введем в \mathcal{H} оператор \mathcal{T} :

$$\langle \mathcal{T}u, v \rangle_{\Omega} = (\rho u, v)_{\Omega}, \quad u, v \in \mathcal{H}. \quad (1.6)$$

Оператор \mathcal{T} положителен, симметричен и непрерывен, а значит, самосопряжен. Таким образом, спектр $s(\mathcal{T})$ оператора \mathcal{T} с нормой τ расположен на сегменте $I = [0, \tau]$ вещественной оси, а множество $\mathbb{C} \setminus I$ содержится в резольвентном поле оператора (см. [6. Гл. 4]). Норма τ равна

$$\tau = \|\mathcal{T}; \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}\| = \sup_{u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}} \frac{\langle \mathcal{T}u, u \rangle_{\Omega}}{\langle u, u \rangle_{\Omega}}. \quad (1.7)$$

Оператор \mathcal{T} не может быть компактным, так как вложение $H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ не компактно из-за неограниченности области Ω , т. е. существенный спектр оператора содержит точку $\mu = 0$, но заведомо оказывается более широким множеством (см. теорему 9.2.1 в [6]).

Согласно определению (1.6) интегральное тождество (1.4) эквивалентно абстрактному уравнению

$$\mathcal{T}u = \mu u \quad \text{в } \mathcal{H}$$

с новым спектральным параметром

$$\mu = 1/\lambda. \quad (1.8)$$

Вследствие формулы (1.8) λ -спектр задачи (1.4) приобретает свойства μ -спектра оператора \mathcal{T} ; исключение составляет точка $\mu = 0$, которой ставится в соответствие бесконечно удаленная точка $\lambda = \infty$, не оказывающая влияния на спектр вариационной задачи.

2. Строение спектра. Преобразование Гельфанда

$$v(y, z) \mapsto V(y, z; \eta) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp(-i\eta m) v(y, z - m) \quad (2.1)$$

(см. [7], а также, например, [8, 9]) ставит в соответствие задаче (1.6) в квазицилиндре Π (без дефекта Θ), а значит, и задаче (1.6) в области Ω с периодическими выходами на бесконечность (см. [8. Гл. 3, 4]) вариационную модельную задачу на ячейке периодичности ϖ

с параметром $\eta \in [0, 2\pi)$, представляющим собой двойственную переменную преобразования Гельфанда:

$$\langle U, V \rangle_{\varpi} = \Lambda(\rho U_j, V_j)_{\varpi}, \quad V \in \overset{0}{H}_{\eta}^1(\varpi; v). \quad (2.2)$$

Здесь $\overset{0}{H}_{\eta}^1(\varpi; v)$ — пространство вектор-функций $V \in \overset{0}{H}^1(\varpi; v)$, удовлетворяющих условиям квазипериодичности

$$V(y, 0) = \exp(i\eta)V(y, 1), \quad (y, 0) \in \Pi. \quad (2.3)$$

Отметим, что соотношение (2.3) связывает значения поля смещений V на торцах ячейки ϖ , причем вектор-функция v в левой части (2.1) определена при $(y, z) \in \Pi$, но вектор-функция V в правой части (2.1) — при $(y, z) \in \varpi$. Кроме того, в случае непрерывной в $\overline{\varpi}$ вектор-функции V выполнение условий квазипериодичности обеспечивает непрерывность вектор-функции \hat{V} , называемой волной Флоке и определенной на множестве $\overline{\Pi}$ формулой

$$\hat{V}(y, z) = \exp(-i\eta m)V(y, z - m), \quad (y, z) \in \overline{\varpi}_m, m \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

Если $V \in \overset{0}{H}_{\eta}^1(\varpi)$, то вектор-функция (2.4) принадлежит классу Соболева $H^1(K)$ на любом компакте $K \subset \overline{\Pi}$.

Согласно неравенству Корна

$$\|V; H^1(\varpi)\|^2 \leq c_{\varpi} \langle V, V \rangle_{\varpi}, \quad V \in \overset{0}{H}^1(\varpi; v) \quad (2.5)$$

полуторалинейная форма $\langle U, V \rangle_{\varpi}$ — скалярное произведение в комплексном гильбертовом пространстве $\overset{0}{H}_{\eta}^1(\varpi; v)$. Таким образом, в силу компактности вложения $H^1(\varpi) \subset L_2(\varpi)$ (липшицева область ϖ конечна) спектр задачи (2.5) оказывается дискретным и образует неограниченную положительную последовательность

$$\Lambda_1(\eta) \leq \Lambda_2(\eta) \leq \dots \leq \Lambda_n(\eta) \leq \dots, \quad (2.6)$$

в которой собственные числа указаны при учете кратностей. Функции $[0, 2\pi) \ni \eta \mapsto \Lambda_n(\eta)$ непрерывны (см. [10. Гл. 9]) и 2π -периодичны (замена $\eta \mapsto \eta \pm 2\pi$ не оказывает влияния на условия квазипериодичности (2.3)). Таким образом, значения каждой из указанных функций Λ_n заполняют связный и замкнутый сегмент Δ_n на вещественной положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

Известно, что оператор задачи (1.6) с фиксированным параметром $\lambda = \Lambda$ фредгольмов в том и только том случае, если ни при каком $\eta \in [0, 2\pi)$ число Λ не является собственным для модельной задачи (2.2), т. е. $\Lambda \neq \Lambda_n(\eta)$ при всех $\eta \in [0, 2\pi)$ и $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ (см. [11], а также [8. § 3.4, 4.1], [9, 12]). Потеря фредгольмовости эквивалентна тому, что точка $\lambda = \Lambda$ попадает на существенный спектр S_e оператора задачи (1.6), поэтому спектр представляет собой объединение указанных интервалов:

$$S_e = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n. \quad (2.7)$$

Согласно формуле (1.8) существенный спектр s_e оператора \mathcal{T} принимает вид

$$s_e = \{0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \delta_n, \quad \delta_n = \{\mu \in \mathbb{R}_+ : 1/\mu \in \Delta_n\}. \quad (2.8)$$

Сегментарное строение множеств (2.7), (2.8) подразумевает возможность образования лакун — интервалов, которые свободны от существенного спектра, т. е. могут содержать лишь точки дискретного спектра, но имеют концы, принадлежащие существенному спектру. Разнообразные примеры упругих волноводов, в спектре которых обнаружены лакуны,

построены в работах [13–16]. Наличие лакун может быть применено при создании фильтров и демпферов упругих волн, так как они (лакуны) препятствуют прохождению волн в соответствующих частотных диапазонах. С той же целью может быть использована другая особенность строения спектра — появление локализованных, или захваченных волн (trapped modes), порожденных точечным, в частности дискретным, спектром. Локализованные волны обладают конечной энергией и, следовательно, экспоненциально затухают на бесконечности (см., например, [8. Гл. 3, 5]), т. е. локализируются вблизи дефекта в волноводе и тем самым способствуют накоплению энергии в конечном объеме (см. [17, 18], а также [12, 19, 20]). Поиску локализованных решений задачи (1.1)–(1.3) посвящена настоящая работа.

В [21] сформулирован вариационный метод поиска частот локализованных полей под “порогом” непрерывного спектра в цилиндрических волноводах, основанный на ряде известных наблюдений и состоящий из двух частей, обобщение которых на периодические волноводы представлено в пп. **3**, **4** применительно к полостям с положительным объемом и к трещинам. В обоих случаях требуется, чтобы имеющие положительную площадь части v_m боковых поверхностей ячеек периодичности ϖ_m были жестко заземлены, так как вариационный метод пригоден для обнаружения точек дискретного спектра S_d , а согласно неравенству Корна (2.5) условие Дирихле (1.3) создает положительный порог существенного спектра

$$\Lambda^\dagger = \min\{\Lambda_1(\eta): \eta \in [0, 2\pi)\}, \quad (2.9)$$

т. е. левый конец первого спектрального сегмента Δ_1 из формулы (2.7).

В случае свободной поверхности волновода (краевое условие (1.2) задано всюду на $\partial\Omega$) порог (2.9) становится нулевым: при $\eta = 0$ и $\Lambda = 0$ задача на ячейке ϖ имеет нетривиальные решения — жесткие поступательные смещения. В результате вариационный метод не позволяет обнаружить дискретный спектр, и для выявления собственных чисел требуется применять прием постановки искусственных краевых условий для создания положительного порога существенного спектра, предложенный в работе [22] для скалярной задачи Неймана и усовершенствованный в [23] для трехмерной системы уравнений теории упругости.

С использованием данного приема п. **5** при дополнительных требованиях упругой и геометрической симметрии установлено существование локализованных решений, порожденных дефектами в периодических волноводах со свободными поверхностями. Между тем вследствие сегментарного строения спектра (2.7) не удастся сделать окончательный вывод о том, принадлежит ли найденное собственное число какому-либо сегменту существенного спектра или попадает в лауну. Пример упругого волновода с собственными числами (элементами точечного спектра) в первом сегменте Δ_1 приведен в [15], однако пример упругого волновода с собственным числом внутри лакуны (элементом дискретного спектра) неизвестен. Не получен также ответ на вопрос: возможно ли при каком-либо $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ выполнение соотношения

$$\Lambda_n(0) = \Lambda_n(\eta), \quad \eta \in [\eta_1, \eta_2), \quad 0 \leq \eta_1 < \eta_2, \quad (2.10)$$

означающего, что $\lambda = \Lambda_n(0)$ — бесконечнократное собственное число задачи (1.4) в квазицилиндре Π ? Если ни одно из собственных чисел (2.6) не является постоянным при $\eta \in [0, 2\pi)$ (отметим, что согласно результатам [24. Гл. 1] из предположения (2.10) следуют равенства $\eta_1 = 0$ и $\eta_2 = 2\pi$), то существенный спектр задачи (1.4) совпадает с ее непрерывным спектром. Отметим, что для цилиндрических волноводов такое совпадение имеет место всегда.

3. Первая часть вариационного метода. Пусть $\Lambda^\dagger = \Lambda_1(\eta^\dagger)$, $\eta^\dagger \in [0, 2\pi)$ (см. формулу (2.9)) и $U^\dagger \in \overset{0}{H}_{\eta^\dagger}^1(\varpi; v)$ — соответствующая собственная вектор-функция задачи (2.5). Число Λ^\dagger — нижняя грань существенного спектра (2.7) вариационной задачи (1.4) (или дифференциальной задачи (1.1)–(1.3)). Подставим в формулу (1.7) для нормы оператора \mathcal{T} пробную вектор-функцию

$$u^\varepsilon(y, z) = \exp(-\varepsilon|z|)\hat{U}^\dagger(y, z), \quad (3.1)$$

где последний сомножитель определен по формуле (2.4). В силу условий квазипериодичности (2.3) эта вектор-функция принадлежит пространствам $\overset{0}{H}^1(\Pi; \Upsilon)$ и $\overset{0}{H}^1(\Omega; \Sigma)$ при любом $\varepsilon > 0$. Отметим, что, во-первых, $\exp(-\varepsilon|z|) = 1 + O(\varepsilon)$ на компакте Θ и, во-вторых,

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp(-2\varepsilon|m|) &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-2\varepsilon|z|) dz + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_m^{m+1} (\exp(-2\varepsilon|m|) - \exp(-2\varepsilon|z|)) dz = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} + 2\varepsilon \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp(-2\varepsilon|m|) \left(\int_m^{m+1} (|z| - |m|) dz + O(1) \right) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} + 2\varepsilon \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \exp(-2\varepsilon m) \left(\frac{1}{2} \operatorname{sign}(m) + O(\varepsilon) \right) = \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Согласно определению (1.6) и соотношению (3.2) имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}u^\varepsilon, u^\varepsilon \rangle_\Omega &= (\rho u^\varepsilon, u^\varepsilon)_\Pi - (\rho u^\varepsilon, u^\varepsilon)_\Theta = \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp(-2\varepsilon|m|) (\rho \exp(-2\varepsilon(|z| - |m|)) U^\dagger, U^\dagger)_{\varpi_m} - (\rho U^\dagger, U^\dagger)_\Theta + O(\varepsilon) = \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp(-2\varepsilon|m|) ((\rho U^\dagger, U^\dagger)_\varpi - 2\varepsilon(|z| - |m|) \rho U^\dagger, U^\dagger)_{\varpi_m} + O(\varepsilon^2) - (\rho U^\dagger, U^\dagger)_\Theta + O(\varepsilon) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} (\rho U^\dagger, U^\dagger)_\varpi - 2\varepsilon \sum_{n \in \mathbb{N}} (((z - n) + (-z + n)) \rho U^\dagger, U^\dagger)_{\varpi_n} - (\rho U^\dagger, U^\dagger)_\Theta + O(\varepsilon) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} (\rho U^\dagger, U^\dagger)_\varpi - (\rho U^\dagger, U^\dagger)_\Theta + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.3)$$

При переходе в (3.3) от суммирования по $m \in \mathbb{Z}$ к суммированию по $n \in \mathbb{N}$ учитывались следующие обстоятельства: член ряда с номером $m = 0$ есть $O(\varepsilon)$ и $|z| - |m| = -z + n$ в случае $m = -n$, $(y, z) \in \varpi_m$. Кроме того, использовались формула Тейлора

$$\exp(-2\varepsilon(|z| - |m|)) = 1 - 2\varepsilon(|z| - |m|) + O(\varepsilon^2), \quad (y, z) \in \varpi_m$$

и соотношение $\exp(-2\varepsilon|z|) = 1 + O(\varepsilon)$ при $(y, z) \in \Theta$. Аналогично получаем

$$\langle u^\varepsilon, u^\varepsilon \rangle_\Omega = \langle u^\varepsilon, u^\varepsilon \rangle_\Pi - \langle u^\varepsilon, u^\varepsilon \rangle_\Theta = \frac{1}{\varepsilon} \langle U^\dagger, U^\dagger \rangle_\varpi - \langle \hat{U}^\dagger, \hat{U}^\dagger \rangle_\Theta + O(\varepsilon). \quad (3.4)$$

Следует отметить, что

$$\langle U^\dagger, U^\dagger \rangle_\varpi = \Lambda^\dagger (\rho U^\dagger, U^\dagger)_\varpi \quad (3.5)$$

в силу интегрального тождества (2.2) при $\eta = \eta^\dagger$ и

$$\langle \hat{U}^\dagger, \hat{U}^\dagger \rangle_\Theta = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle U^\dagger, U^\dagger \rangle_{\Theta \cap \varpi_m} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (a_{jk}^{pq} \varepsilon_{pq}(U^\dagger), \varepsilon_{jk}(U^\dagger))_{\Theta \cap \varpi_m} =: \langle U^\dagger, U^\dagger \rangle_\Theta, \quad (3.6)$$

причем сумма по m конечна вследствие компактности множества Θ , а последнее обозначение в (3.6) условно, так как вектор-функция U^\dagger , продолженная по периодичности с ячейки ϖ на весь квазицилиндр Π , может претерпевать скачки при $z \in \mathbb{Z}$. Из формул (3.3)–(3.6) выводим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \tau &\geq \frac{\langle \mathcal{T}u^\varepsilon, u^\varepsilon \rangle_\Omega}{\langle u^\varepsilon, u^\varepsilon \rangle_\Omega} \geq \frac{(\rho U^\dagger, U^\dagger)_\varpi - \varepsilon(\rho U^\dagger, U^\dagger)_\Theta - c\varepsilon^2}{\langle U^\dagger, U^\dagger \rangle_\varpi - \varepsilon\langle U^\dagger, U^\dagger \rangle_\Theta + c\varepsilon^2} = \\ &= \frac{(\rho U^\dagger, U^\dagger)_\varpi - \varepsilon(\rho U^\dagger, U^\dagger)_\Theta - c\varepsilon^2}{\Lambda^\dagger(\rho U^\dagger, U^\dagger)_\varpi - \varepsilon\langle U^\dagger, U^\dagger \rangle_\Theta + c\varepsilon^2} \geq \\ &\geq (\Lambda^\dagger)^{-1}(1 + \varepsilon(\rho U^\dagger, U^\dagger)_\varpi^{-1})(\langle U^\dagger, U^\dagger \rangle_\Theta - \Lambda^\dagger(\rho U^\dagger, U^\dagger)_\Theta) - C\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Таким образом, при условии

$$\langle U^\dagger, U^\dagger \rangle_\Theta := (a_{jk}^{pq}\varepsilon_{pq}(U^\dagger), \varepsilon_{jk}(U^\dagger))_\Theta > \Lambda^\dagger(\rho U^\dagger, U^\dagger)_\Theta \quad (3.7)$$

(см. комментарий к формуле (3.5)) параметр $\varepsilon > 0$ можно зафиксировать, так чтобы выполнялось соотношение

$$\tau > (\Lambda^\dagger)^{-1}, \quad (3.8)$$

т. е. норма τ оператора \mathcal{T} оказалась строго больше верхней грани $\mu^\dagger = (\Lambda^\dagger)^{-1}$ его существенного спектра (2.8). Число τ принадлежит спектру (см. [6. § 10.2]), и выше точки $(\Lambda^\dagger)^{-1}$ расположены лишь элементы дискретного спектра s_d , который, следовательно, не может быть пустым. Итак, неравенство (3.7) представляет собой достаточное условие существования собственного числа $\lambda_1 = \tau^{-1}$ задачи теории упругости (1.4) (или (1.1)–(1.3)), принадлежащее ее дискретному спектру

$$S_d = \{\lambda: 1/\lambda \in s_d\}. \quad (3.9)$$

Поскольку решение U^\dagger задачи (2.2) зависит от трех переменных $y = (x_1, x_2)$ и $z = x_3$, выполнение неравенства (3.7) зависит не только от формы полости Θ , но и от ее положения в периодическом волноводе Π (сдвиг Θ на целочисленное расстояние вдоль оси z не оказывает влияния на выражения (3.7)). Если выполнено неравенство, противоположное (3.7), то вариационный метод не позволяет судить о наличии дискретного спектра, но в случае равенства позволяет (см. п. 4).

Введем скалярную функцию, имеющую размерность плотности энергии и суммируемую в ячейке ϖ согласно ограничениям, наложенным на упругие модули a_{jk}^{pq} :

$$F^\dagger(x) = (a_{jk}^{pq}(x)\varepsilon_{pq}(\hat{U}^\dagger; x), \varepsilon_{jk}(\hat{U}^\dagger; x)) - \Lambda^\dagger\rho(x)\hat{U}_j^\dagger(x)\hat{U}_j^\dagger(x). \quad (3.10)$$

Эта функция 1-периодична по переменной z и в силу равенства (3.5) имеет нулевое среднее по ячейке периодичности ϖ . Даже для прямого однородного упругого цилиндра функция (3.10) не может тождественно обратиться в нуль. Таким образом, в ячейке выделяются два непустых дизъюнктивных множества

$$\varpi_\pm^\dagger = \{x \in \varpi: \pm F^\dagger(x) > 0\}.$$

Если $\Theta \subset \varpi_+^\dagger$, то достаточное условие (3.7) существования локализованного решения задачи (1.4) заведомо выполнено. Это условие может быть выполнено и при $\Theta \cap \varpi_\pm^\dagger \neq \emptyset$.

4. Вторая часть вариационного метода. Для трещины Θ левая и правая части соотношения (3.7) равны нулю, т. е. достаточное условие, полученное в п. 3, неприменимо. Равенство

$$(a_{jk}^{pq}\varepsilon_{pq}(U^\dagger), \varepsilon_{jk}(U^\dagger))_\Theta = \Lambda^\dagger(\rho U^\dagger, U^\dagger)_\Theta \quad (4.1)$$

может возникнуть и в том случае, если оба множества $\Theta \cap \varpi_\pm^\dagger$ непустые. При этом вариационный метод [21] позволяет получить иное достаточное условие непустоты дискретного спектра.

Пусть выполнено равенство (4.1). Сделаем допущение

$$\tau = (\Lambda^\dagger)^{-1}; \quad (4.2)$$

иными словами, ниже существенного спектра собственные числа в задаче (1.4) отсутствуют. Тогда в силу определения (1.6) и формулы (1.7) для любой вектор-функции $\tilde{u}^\varepsilon \in \overset{0}{H^1}(\Omega; \Sigma)$ справедливо неравенство

$$\Lambda^\dagger(\rho \tilde{u}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon)_\Omega \leq (a_{jk}^{pq}\varepsilon_{pq}(\tilde{u}^\varepsilon), \varepsilon_{jk}(\tilde{u}^\varepsilon))_\Omega =: \langle \tilde{u}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon \rangle_\Omega. \quad (4.3)$$

В качестве пробной функции выберем сумму

$$\tilde{u}^\varepsilon(x) = u^\varepsilon(x) + \sqrt{\varepsilon} v(x),$$

где слагаемое u^ε задано формулой (3.1); v — произвольная гладкая вектор-функция с компактным носителем. Повторяя вычисления, выполненные при выводе (3.3), (3.4), представим неравенство (4.3) в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \Lambda^\dagger(\rho U^\dagger, U^\dagger)_\varpi - \Lambda^\dagger(\rho U^\dagger, U^\dagger)_\Theta + 2\sqrt{\varepsilon} \Lambda^\dagger \operatorname{Re}(\rho \hat{U}^\dagger, v)_\Omega - c_- \varepsilon \leq \\ \leq \varepsilon^{-1} \langle U^\dagger, U^\dagger \rangle_\varpi - \langle \hat{U}^\dagger, \hat{U}^\dagger \rangle_\Theta + 2\sqrt{\varepsilon} \operatorname{Re}(a_{jk}^{pq}\varepsilon_{pq}(\hat{U}^\dagger), \varepsilon_{jk}(v))_\Omega + c_+ \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Первые слагаемые в левой и правой частях (4.4) сокращаются в силу равенства (3.5), а вторые — в силу предположения (3.9). Поскольку вектор смещений \hat{U}^\dagger , определенный по формуле (2.4), удовлетворяет системе уравнений (1.1) в невозмущенном квазицилиндре Π и краевым условиям (1.2), (1.3) на областях периодичности Υ и $\partial\Pi \setminus \bar{\Upsilon}$ поверхности $\partial\Pi$, справедлив вариант формулы Грина

$$(a_{jk}^{pq}\varepsilon_{pq}(\hat{U}^\dagger), \varepsilon_{jk}(v))_\Omega + \Lambda^\dagger(\rho \hat{U}^\dagger, v)_\Omega = (\nu_k \sigma_{jk}(\hat{U}^\dagger), v_j)_{\partial\Theta \cap \Pi}.$$

В результате формула (4.4) преобразуется в неравенство

$$2\sqrt{\varepsilon} \operatorname{Re}(\nu_k \sigma_{jk}(\hat{U}^\dagger), v_j)_{\partial\Theta \cap \Pi} \leq (c_- + c_+) \varepsilon. \quad (4.5)$$

Если хотя бы одна из компонент $\nu_k \sigma_{jk}(\hat{U}^\dagger)$ вектора напряжений на поверхности $\partial\Theta \cap \Pi$, порожденного волной Флоке \hat{U}^\dagger , на каком-либо подмножестве $\zeta \subset \partial\Theta \cap \Pi$ с положительной площадью не равна нулю, то путем подбора пробной функции v выражение $(\nu_k \sigma_{jk}(\hat{U}^\dagger), v_j)_{\partial\Theta \cap \Pi}$ можно сделать положительным. Таким образом, при малом $\varepsilon > 0$ неравенство (4.5) невозможно. Иными словами, предположение (4.2) ложно, и в действительности выполнено неравенство (3.8), означающее, что оператор \mathcal{T} имеет собственное число $\mu_1 = \tau > (\Lambda^\dagger)^{-1}$, а задача (1.4) — собственное число $\lambda_1 = 1/\mu_1 \in (0, \Lambda^\dagger)$.

Смысл установленного достаточного условия

$$\nu_k \sigma_{jk}(\hat{U}^\dagger) \neq 0 \quad \text{на} \quad \partial\Theta \cap \Pi \quad (4.6)$$

существования локализованного решения достаточно очевиден для волноводов с трещинами (см. рис. 3): если волна Флоке \hat{U}^\dagger в Π , порожденная собственным числом $\Lambda_1(\eta^\dagger)$

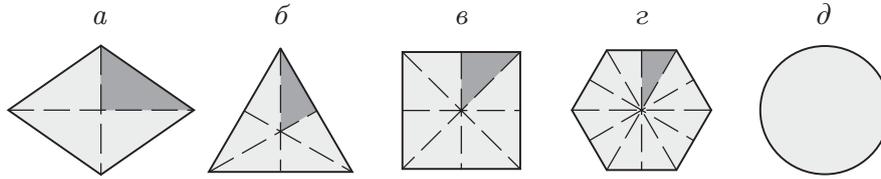


Рис. 3. Сечения цилиндрических волноводов с дополнительной симметрией:
 а — $N = 2$; б — $N = 3$; в — $N = 4$; г — $N = 6$; д — $N = \infty$

модельной задачи (2.2), на котором реализуется минимум в формуле (2.9), не удовлетворяет краевым условиям (1.2) на берегах трещины Θ , то локализованное поле существует. Следует отметить, что для любого нетривиального поля смещений можно найти трещину, на которой условие (4.6) выполнено. Если поверхность трещины гладкая, то достаточно, чтобы неравенство $\nu_k(x^0)\sigma_{jk}(\hat{U}^\dagger; x^0) \neq 0$ было верным только в одной точке $x^0 \in \Theta$.

Возникновение дискретного спектра сопровождается явлением резонанса — накоплением энергии в конечном объеме: локализованные волны препятствуют прохождению волны с соответствующей частотой (поэтому они названы ловушечными, или захваченными модами). Таким образом, микротрещины захватывают часть энергии бегущей волны, что в свою очередь способствует процессам разрушения и формирования магистральной трещины.

5. Волновод со свободной поверхностью. Рассмотрим задачу (1.1)–(1.3) в предположении, что $\Sigma = \partial\Omega$, т. е. заземленная часть поверхности отсутствует и краевое условие (1.3) исчезает. Как отмечено в п. 2, порог (2.9) существенного спектра становится равным нулю и вариационный метод не позволяет обнаружить этот спектр. Используем прием [22] постановки искусственных краевых условий, усовершенствованный в [23] для задач теории упругости.

Пусть периодическое множество Π и дефект Θ обладают N общими плоскостями геометрической и упругой симметрии, проходящими через ось z (рис. 3). Рассмотрим секторальную часть Ω_0^∇ волновода Ω (на рис. 3 секторы сечений заштрихованы):

$$\Omega_p^\nabla = \{(y, z) \in \Omega: \varphi \in (p\pi/N, (p+1)\pi/N)\}, \quad p = 0, \dots, 2N - 1. \quad (5.1)$$

Здесь $\varphi \in [0, 2\pi)$ — угловая переменная; $y_1 = r \cos \varphi$; $y_2 = r \sin \varphi$; (r, φ, z) — система цилиндрических координат. Сузим дифференциальные уравнения (1.1) на усеченный волновод Ω_0^∇ , а краевые условия (1.2) — на участок $\partial\Omega \cap \partial\Omega^\nabla = \partial\Omega_0^\nabla \setminus \overline{\Psi_0 \cup \Psi_1}$ его поверхности. При этом $\Psi_p = \{(y, z) \in \Omega: \varphi = p\pi/N\}$ — искусственно образованные поверхности, на которых при $p = 0$ и $p = 1$ выполняются краевые условия

$$u_\varphi(x) = 0, \quad \sigma_{\varphi z}(u; x) = \sigma_{\varphi r}(u; x) = 0, \quad x \in \Psi_0; \quad (5.2)$$

$$u_r(x) = u_z(x) = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi}(u; x) = 0, \quad x \in \Psi_1. \quad (5.3)$$

В (5.2), (5.3) присутствуют проекции вектора смещений и тензора напряжений на указанные нижними индексами оси цилиндрических координат. Полученная вспомогательная задача состоит из уравнений равновесия (1.1), (1.2) с краевыми условиями (5.2), (5.3). Соответствующая вариационная задача (см. интегральное тождество (1.4) и [2]) поставлена на подпространстве $\mathcal{H}^\nabla(\Omega_0^\nabla)$ вектор-функций из класса Соболева $H^1(\Omega_0^\nabla)$, удовлетворяющих первым (в смещениях) краевым условиям в (5.2), (5.3). В модифицированной соответствующим образом модельной задаче (2.2) на усеченной ячейке периодичности ϖ^∇ появляется аналогичное подпространство $\mathcal{H}_\eta^\nabla(\varpi_0^\nabla) \subset H_\eta^1(\varpi_0^\nabla)$. Искусственные краевые условия (5.2), (5.3) выполняют роль условий Дирихле (1.3), при которых появляется положительный порог (2.9) существенного спектра.

Выбор специфических искусственных краевых условий обусловлен двумя обстоятельствами [23]. Во-первых, для двугранного угла с раствором $\alpha \neq \pi/2; \pi; 3\pi/2; 2\pi$ жесткое смещение $a + b \times x$, подчиненное условиям (5.2) при $\varphi = 0$ и (5.3) при $\varphi = \alpha$, оказывается нулевым (a, b — столбцы в \mathbb{R}^3). При этом необходимо исключить из рассмотрения случаи $N = 2$ (см., например, рис. 3, а), так как при $\alpha = \pi/2$ вектор $(-y_2, y_1, 0)$ поворота вокруг оси z удовлетворяет равенствам (5.2) на $\Psi_0 \subset \{x: y_2 = 0\}$ и равенствам (5.3) на $\Psi_1 \subset \{x: y_1 = 0\}$. Согласно [3, 4] в случае $N \geq 3$ указанное свойство искусственных краевых условий обеспечивает справедливость неравенств Корна для полей смещений $u \in \mathcal{H}^\nabla(\Omega_0^\nabla)$ и $U \in \mathcal{H}_\eta^\nabla(\varpi_0^\nabla)$ (ср. формулы (1.5) и (2.5)), что в свою очередь приводит к возникновению положительного порога существенного спектра задачи (1.1), (1.2), (5.2), (5.3) во вспомогательном волноводе Ω_0^∇ , а вариационный метод позволяет получить аналогичные (3.7), (4.6) достаточные условия существования локализованных решений, в которые входят величины $\Lambda^{\dagger\nabla} = \Lambda_1(\eta^{\dagger\nabla})$, $\eta^{\dagger\nabla} \in [0, 2\pi)$ и $U^{\dagger\nabla} \in \mathcal{H}_{\eta^{\dagger\nabla}}^\nabla(\varpi_0^\nabla)$ модельной спектральной задачи на ячейке ϖ_0^∇ .

Во-вторых, введение искусственных краевых условий позволяет по решению $\{\lambda^\nabla, u^\nabla\}$ спектральной задачи в секторальном волноводе Ω_0^∇ построить собственную вектор-функцию задачи (1.1), (1.2) в волноводе Ω , соответствующую тому же собственному числу λ^∇ . Действительно, поскольку $u_\varphi = u_2$, $\sigma_{\varphi z}(u) = \sigma_{23}(u)$ и $\sigma_{\varphi r}(u) = \sigma_{21}(u)$ на Ψ_0 , четное относительно переменной y_2 продолжение для касательных смещений u_1, u_3 и нечетное продолжение для нормального смещения u_2 с области Ω_0^∇ на область $\Omega_{-1}^\nabla = \Omega_{2N-1}^\nabla$ (см. (5.1)) остаются гладкими и согласно указанным требованиям упругой симметрии удовлетворяют уравнениям равновесия на множестве $\overline{\Omega_0^\nabla \cup \Omega_{2N-1}^\nabla}$, а также краевым условиям (1.2) на соответствующей части поверхности $\partial\Omega$. Аналогичное продолжение с Ω_0^∇ на Ω_1^∇ возможно и через плоскость Ψ_1 , на которой поставлены краевые условия (5.3), причем нормальная компонента вектора смещений продолжается по четности, а касательные — по нечетности. При этом на поверхности Ψ_2 возникают краевые условия (5.2), а на $\Psi_{-2} = \Psi_{2N-2}$ — условия (5.3), позволяющие повторить процедуру продолжения. В результате за N шагов, т. е. с помощью $2N$ продолжений двух типов, получаем вектор-функцию $u^\otimes \in H^1(\Omega)$, которая оказывается гладкой всюду в Ω и для которой выполнены дифференциальные уравнения (1.1) с параметром $\lambda = \lambda^\nabla$ в Ω и краевые условия (1.2) на $\partial\Omega$. Иными словами, λ^∇ — собственное число исходной задачи (1.1), (1.2), которое принадлежит ее точечному спектру S_d (как отмечено в п. 2, решить вопрос о принадлежности дискретному спектру S_d не удается).

Сформулируем аналоги достаточных условий (3.7) и (4.6). Если волновод $\Omega = \Pi \setminus \Theta$ с границей, свободной от внешних нагрузок, имеет $N \geq 3$ плоскостей упругой и геометрической симметрии, то при выполнении неравенства

$$(a_{jk}^{pq}\varepsilon_{pq}(\hat{U}^{\dagger\nabla}), \varepsilon_{jk}(\hat{U}^{\dagger\nabla}))_\Theta > \Lambda^{\dagger\nabla}(\rho\hat{U}^{\dagger\nabla}, \hat{U}^{\dagger\nabla})_\Theta \quad (5.4)$$

задача (1.1), (1.2) имеет решение $u^\otimes \in H^1(\Omega)$, представляющее собой локализованную волну. В формуле (5.4) присутствуют решение $\{\Lambda^{\dagger\nabla}, U^{\dagger\nabla}\}$ спектральной задачи на усеченной ячейке периодичности ϖ_0^∇ и соответствующая волна Флоке $\hat{U}^{\dagger\nabla}$, определенная формулой (2.4). Если

$$(a_{jk}^{pq}\varepsilon_{pq}(\hat{U}^{\dagger\nabla}), \varepsilon_{jk}(\hat{U}^{\dagger\nabla}))_\Theta = \Lambda^{\dagger\nabla}(\rho\hat{U}^{\dagger\nabla}, \hat{U}^{\dagger\nabla})_\Theta$$

(например, Θ — трещина), то при условии

$$\nu_k \sigma_{jk}(\hat{U}^{\dagger\nabla}) \neq 0 \quad \text{на} \quad \partial\Theta_0^\nabla \cap \Pi$$

локализованное поле по-прежнему существует.

Отметим, что в случае однородного изотропного волновода для вывода достаточных условий существования локализованных волн требуется только геометрическое условие симметрии. В качестве материала для однородного цилиндрического волновода с сечением, показанным на рис. 3, в, можно использовать ортотропный материал с проходящей через ось z плоскостью упругой симметрии четвертого порядка [25], а также периодический волновод, составленный из кубов различных размеров (см. рис. 1, а). Наконец, периодическое тело вращения Π , изготовленное из трансверсально-изотропного материала с осью изотропии z , также удовлетворяет наложенным условиям симметрии, причем число N можно выбрать произвольно и, перебирая, например, простые числа, построить сколь угодно много линейно независимых локализованных волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров С. А. О спектре задачи теории упругости для тела пикообразной формы // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1105–1127.
2. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
3. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, № 5. С. 55–98.
4. Назаров С. А. Неравенства Корна для упругих сочленений массивных тел, тонких пластин и стержней // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, № 1. С. 37–110.
5. Назаров С. А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Науч. кн., 2002.
6. Бирман М. Ш. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
7. Гельфанд И. М. Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73. С. 1117–1120.
8. Назаров С. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей / С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский. М.: Наука, 1991.
9. Kuchment P. Floquet theory for partial differential equations. Basel: Birkhäuser, 1993.
10. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
11. Назаров С. А. Эллиптические краевые задачи с периодическими коэффициентами в цилиндре // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45, № 1. С. 101–112.
12. Nazarov S. A. Properties of spectra of boundary value problems in cylindrical and quasicylindrical domains // Sobolev spaces in mathematics. V. 2. N. Y.: Springer, 2008. P. 261–309. (Intern. Math. Ser.; V. 9).
13. Назаров С. А. Волны Рэлея для упругого полуслоя с частично защемленной периодической границей // Докл. АН. 2008. Т. 423, № 1. С. 56–61.
14. Назаров С. А. Открытие лакуны в спектре упругого периодического волновода со свободной поверхностью // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 2. С. 323–333.
15. Cardone G., Minutolo V., Nazarov S. A. Gaps in the essential spectrum of periodic elastic waveguides // Z. angew. Math. Mech. 2009. Bd 89, N 9. S. 729–741.
16. Назаров С. А. Лакуна в непрерывном спектре упругого волновода с частично защемленной поверхностью // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 1. С. 134–146.
17. Jones D. S. The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1953. V. 49. P. 668–684.
18. Ursell F. Mathematical aspects of trapping modes in the theory of surface waves // J. Fluid Mech. 1988. V. 18. P. 495–503.

19. **Bonnet-Bendhia A.-S., Duterte J., Joly P.** Mathematical analysis of elastic surface waves in topographic waveguides // *Math. Models Methods Appl. Sci.* 1999. V. 9, N 5. P. 755–798.
20. **Linton C. M., McIver P.** Embedded trapped modes in water waves and acoustics // *Wave Motion.* 2007. V. 45. P. 16–29.
21. **Камоцкий И. В., Назаров С. А.** Упругие волны, локализованные около периодических семейств дефектов // *Докл. АН.* 1999. Т. 368, № 6. С. 771–773.
22. **Evans D. V., Levitin M., Vasil'ev D.** Existence theorems for trapped modes // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 261. P. 21–31.
23. **Назаров С. А.** Ловушечные моды для цилиндрического упругого волновода с демпфирующей прокладкой // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 2008. Т. 48, № 5. С. 132–150.
24. **Гохберг И. Ц.** Введение в теорию несамосопряженных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. М.: Наука, 1965.
25. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.

*Поступила в редакцию 27/X 2009 г.,
в окончательном варианте — 2/II 2010 г.*
