

УДК 621.9.048.7:621.375.826

## **Численное моделирование лазерной сварки тонких металлических пластин с учетом конвекции в сварочной ванне\***

**В.И. Исаев<sup>1</sup>, В.П. Шапеев<sup>2</sup>, А.Н. Черепанов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Новосибирский государственный университет*

<sup>2</sup>*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

E-mail: shapeev@itam.nsc.ru

Предложены новая квазитрехмерная модель процесса лазерной сварки встык двух металлических пластин и численный алгоритм ее реализации. Проведены расчеты теплофизических процессов при лазерном соединении титановых пластин. Показано, что предложенная модель адекватно описывает теплофизические и гидродинамические процессы, протекающие в области сварки.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, численные методы, уравнения Навье–Стокса, тепло- и массоперенос, лазерная сварка металлов, задача Стефана.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Процесс лазерной сварки характеризуется многообразием физико-химических и гидродинамических процессов в зоне сварки, полная математическая модель которой во взаимовлиянии хотя бы основных ее составляющих пока еще далека от завершения. Если мощность лазера выше некоторой критической, то металл в зоне сварки кипит, образуя паровой канал микроскопических размеров, из которого с большой скоростью истекает газ из ионов металла и различных компонентов и включений, присутствующих в сплаве. Область взаимодействия луча лазера и металла неустойчива. Она окружена плотным облаком паров металла и обладает высокой температурой. Эти обстоятельства сильно затрудняют измерения физических параметров процесса и визуальное наблюдение зоны сварки. Неоднородности в материале изделия и нестабильность поглощения лазерного излучения порождают возмущения в движении жидкого металла, которые усиливаются на вертикальных стенках канала, растут и становятся соизмеримыми с его поперечными размерами. При этом имеет место и гидродинамическая неустойчивость [1].

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-08-00249-а) и СО РАН (интеграционные проекты № 11.5, 26 и комплексный интеграционный проект № 140).

Возникающие пульсации скорости и давления в жидком металле распространяются по всей ванне. Однако при постоянных интенсивности поглощения излучения лазера и скорости сварки небольшие пульсации параметров течения газа и жидкого металла происходят около их некоторых средних величин. В этом случае средние значения параметров процесса в зоне сварки и на периферии в некотором приближении можно считать постоянными.

В ранее описанных моделях лучевой сварки (электронно-лучевой и лазерной) движение жидкого металла в сварочной ванне не учитывалось [2, 3]. Теплофизическая модель без использования уравнений динамики вязкой жидкости позволяет удовлетворительно рассчитать некоторые параметры процесса сварки: размеры сварочной ванны, области с двухфазным состоянием металла, ширину сварного шва и предсказать размеры зерен в кристаллической структуре застывшего металла [4–6]. Однако моделирование процессов в ванне на основе динамики вязкой теплопроводной жидкости показывает, что движение расплава в ней зависит от физических параметров процесса и, в свою очередь, влияет на форму ванны и в некоторой степени на ее размер [7, 8]. Известные оценки скорости течения жидкого металла, возникающего вследствие воздействия сил поверхностного натяжения и трения паров металла в канале, показывают, что течение в ванне для режимов сварки, используемых на практике, может быть турбулентным [9, 10].

В настоящей работе предложена трехмерная квазистационарная математическая модель процесса лазерной сварки встык двух металлических пластин, в которой для описания теплопереноса используется уравнение теплопроводности с конвективными членами, а для моделирования течения жидкого металла в сварочной ванне — уравнения Навье–Стокса. В модели учитывается наличие парогазового канала в зоне воздействия лазерного луча на пластины, а также трение паров металла, истекающих из канала, об его поверхность.

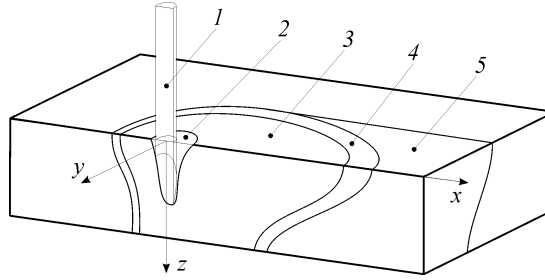
В результате осреднения уравнений трехмерной модели по одной из пространственных переменных (переменной  $y$ ) получена квазитрехмерная модель. Слагаемое в уравнении теплопроводности, описывающее диффузию тепла в направлении оси  $y$ , аппроксимировано двумя способами: с учетом средней полуширины ванны и с использованием масштаба длины в тепловой волне [11, 12]. В случае, когда из каких-то способов оценки или из экспериментальных данных известна величина полуширины ванны, то для описания процессов в ванне предпочтительнее использование первого способа аппроксимации, поскольку он точнее. На основе квазитрехмерной модели и вариантов метода коллокаций и наименьших квадратов решения уравнений Навье–Стокса и уравнения теплопроводности создан новый алгоритм для численного моделирования процесса лазерной сварки с учетом конвекции в сварочной ванне. Он позволяет оценить влияние конвекции жидкого металла на распределение температуры в пластинах в процессе сварки и форму сварочной ванны.

### 1. ТРЕХМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ЛАЗЕРНОЙ СВАРКИ

Рассмотрим установившийся процесс лазерной сварки встык двух металлических пластин. Пластины имеют прямоугольную форму и одинаковую толщину. Ось луча лазера в процессе сварки лежит в плоскости стыка пластин и направлена перпендикулярно к их верхней поверхности. В рассматриваемой области введем декартову систему координат, в которой лазерный луч неподвижен, а пластины перемещаются со скоростью сварки  $\mathbf{V}_w = (V_w, 0, 0)$ . Ось  $z$  направлена вниз вдоль оси луча, ось  $x$  — вдоль стыка в направлении перемещения пластин, а ось  $y$  — перпендикулярно стыку. Начало координат находится на оси луча на верхних границах пластин (рис. 1).

Рис. 1. Схема области сварки (сечение  $y = 0$ ).

1 — луч лазера, 2 — парогазовый канал, 3 — жидкая фаза (сварочная ванна), 4 — двухфазная зона, 5 — твердая фаза.



Поверхности пластин для защиты жидкого металла от окислительных процессов обдуваются инертным газом.

Ввиду сложности и недостаточной изученности термо- и гидродинамических процессов в зоне сварки исследование процесса сварки проведем при некоторых упрощающих допущениях. Считая, что фронт фазового перехода плоский, затвердевание расплава (плавление металла) опишем в приближении Стефана. Далее полагаем, что скорость сварки (скорость перемещения луча лазера) постоянная, а поле температур и положения фазовых границ квазистационарные.

Будем считать далее, что поверхность парового канала фиксирована, как это делается в настоящее время многими исследователями из-за сложностей численного моделирования свободных поверхностей на границах между жидкостью и газом [13, 14]. В настоящей работе, как и в [4], для упрощения модели стенка парового канала ищется в виде поверхности вращения из заранее выбранного параметрического семейства (среди параметров глубина канала, угол наклона стенки к оси  $z$  в точке наиболее интенсивного лазерного излучения и др.). Выбор значений параметров (выбор поверхности из этого семейства) делается на основе экспериментальных данных и требования того, чтобы на большей части поверхности в окрестности оси луча температура была близка температуре кипения металла, немного превосходя ее в лазерном пятне (для расчетов, проведенных в настоящей работе, разница составляла не более 50 К). Канал строится автоматически в ходе итерационного процесса расчета поля скоростей в ванне и температурных полей во всей расчетной области. Более подробно алгоритм построения поверхности канала описан в [4].

### 1.1. Определяющие уравнения

Процесс теплопереноса в сварочной ванне и твердом металле опишем уравнением

$$c_i \rho_i \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_i \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_i \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_i \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (1)$$

где  $c_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $\rho_i$  — удельная теплоемкость, коэффициент теплопроводности и плотность  $i$ -й фазы ( $i = 1$  — твердая,  $i = 2$  — жидкая фазы),  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — компоненты скорости вещества по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (компоненты скорости относительно системы координат, в которой луч лазера неподвижен). В области твердой фазы  $u = V_w$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$ . Для моделирования установившихся течений жидкого металла в сварочной ванне используем систему стационарных уравнений Навье–Стокса

$$\rho_2 \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

где  $p$  — давление,  $\mu$  — динамическая вязкость жидкого металла.

На поверхности фазового перехода запишем условие Стефана

$$\left( \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right)_2 - \left( \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right)_1 = \rho_2 \kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_w,$$

где  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к границе раздела фаз,  $\kappa$  — теплота плавления (кристаллизации),  $-(\lambda_1 \partial T / \partial \mathbf{n})_1$  и  $-(\lambda_2 \partial T / \partial \mathbf{n})_2$  — потоки тепла, вычисленные со стороны твердой и жидкой фаз соответственно.

## 1.2. Краевые условия для уравнения теплопроводности

### 1.2.1. Условия на поверхности парового канала

В зоне действия лазерного излучения (на поверхности парового канала  $z = Z_c(x, y)$ ) справедливо уравнение теплового баланса

$$-\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{q}_l \cdot \mathbf{n} + q_r + q_v, \quad (3)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к поверхности канала, направленная внутрь области жидкой фазы,  $\mathbf{q}_l$  — поглощенный поток лазерного излучения без учета переотражения,  $q_r$  — поток тепла, возникающий в результате переотражений от стенок канала,  $q_v$  — потери тепла за счет испарения металла.

Сварка осуществляется излучением CO<sub>2</sub>-лазера с длиной волны  $\lambda_0 = 10,6$  мкм, интенсивность излучения которого описывается нормальным распределением Гаусса [15]. Плотность потока лазерного излучения задается формулой

$$q_l(x, y, Z(x, y)) = \frac{2WA}{\pi r_z^2} \exp\left(-2 \frac{x^2 + y^2}{r_z^2}\right),$$

$$r_z = \left( r_F^2 + \left( \frac{z - Z_F}{\pi r_F^2} \right)^2 \right)^{1/2},$$

где  $r_F$  — радиус луча в фокальной плоскости,  $W$  — мощность лазера,  $Z_F$  — координата по оси  $z$  фокуса луча лазера,  $A$  — коэффициент поглощения лазерного излучения поверхностью парового канала. Для простоты будем считать, что остаток мощности луча после первого и последующих его отражений от стенок канала  $W_i = (1-A) W_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) равномерно рассеивается по поверхности  $S_c$ , состоящей из боковой поверхности канала  $S_b$  и его выходного отверстия при  $z = 0$  [14]. Тогда мощность многократно отраженного излучения, поглощаемого стенками канала, вычислим с помощью эффективного коэффициента поглощения

$$A_e = A \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(1-A)S_b}{S_c} \right)^n = \frac{A(1-A)S_b}{S_c - (1-A)S_b}$$

по формуле  $W_a = A_e W$ . Для плотности мощности отраженного излучения лазера, поглощаемого элементом поверхности парогазового канала, имеем выражение

$$q_r = \frac{W_a}{S_b} = \frac{AW}{S_b} \frac{A(1-A)S_b}{S_c - (1-A)S_b}.$$

Для оценки тепла, теряемого стенкой канала за счет испарения металла, используем формулу

$$q_v = -L\dot{m}.$$

Здесь  $L$  — удельная теплота испарения металла,  $\dot{m}$  — массовая скорость испарения с единицы поверхности, связанная с избыточным давлением паров  $P(z)$  соотношением

$$\dot{m} = (P(z)\rho_v)^{1/2},$$

где  $\rho_v$  — плотность паров металла.

### 1.2.2. Условия на верхней и нижней поверхностях свариваемых пластин

На поверхности  $z = 0$  в областях твердой и жидкой фаз граничное условие имеет вид

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = (\alpha_{k1} + \alpha_r)(T|_{z=0} - T_g), \quad |x| > r_F, \quad (4)$$

где  $\alpha_{k1}$  — конвективный коэффициент теплоотдачи [12, 16, 17], которая обусловлена обдувом зоны сварки инертным газом и зависит от характера его течения (ламинарное или турбулентное),  $T_g$  — температура газа. Второй коэффициент теплоотдачи в формуле (4)  $\alpha_r$  связан с радиационной теплоотдачей нагретого тела в окружающее пространство и определяется соотношением

$$\alpha_r = \varepsilon_i \sigma_0 \left( T^2 \Big|_{z=0} + T_g^2 \right) (T|_{z=0} + T_g), \quad i = 1, 2,$$

где  $\varepsilon_i$  — приведенная степень черноты ( $i = 1, 2$  для твердой и жидкой фаз соответственно),  $\sigma_0$  — константа Стефана–Больцмана.

Условие, аналогичное (4), имеет место на нижней поверхности свариваемых пластин ( $z = h$ ):

$$-\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=h} = (\alpha_{k2} + \alpha_r)(T|_{z=h} - T_g),$$

где  $\alpha_{k2}$  — коэффициент теплоотдачи от нижней поверхности к монтажному столу,  $h$  — толщина пластин. Температура среды (монтажного стола), контактирующей с нижней поверхностью пластин, здесь взята равной  $T_g$  (в принципе она может быть и другой). При контактном охлаждении через зазор, заполненный газом,  $\alpha_{k2} = \lambda_g / \delta_g$ , где  $\lambda_g$ ,  $\delta_g$  — теплопроводность газа и толщина газового зазора между нижней поверхностью пластин и поверхностью монтажного стола соответственно. Если сварочная ванна достигает нижней поверхности пластин и выходит на поверхность монтажного стола, то из-за ее шероховатости и недостаточного смачивания, а также давления газа остается зазор. В случае, когда нижняя поверхность пластин обдувается газом, значение  $\alpha_{k2}$  выбирается в зависимости от характера его течения таким же образом, как и коэффициент  $\alpha_{k1}$ . Коэффициент конвективной теплоотдачи при ламинарном потоке газа определяется согласно [12, 16, 17] формулой  $\alpha_{k1} = 0,664 \text{ Pr}^{1/3} \text{ Re}^{1/2} \lambda_g / l$ , где  $\text{Re} = U_g l / \nu_g$ ,  $\text{Pr} = \nu_g / a_g$ ,  $U_g$  — скорость

течения инертного газа,  $l$  — характерная длина зоны охлаждения,  $\nu_g, a_g, \lambda_g$  — кинематическая вязкость, температуропроводность и теплопроводность газа соответственно.

### 1.2.3. Условия на периферии

На достаточно большом расстоянии от луча лазера температура по всей толщине пластин принимается равной температуре окружающей среды:

$$T|_{x \rightarrow \pm\infty} = T_g, \quad T|_{y \rightarrow \pm\infty} = T_g.$$

## 1.3. Краевые условия для уравнений Навье–Стокса

### 1.3.1. Условия на поверхности парового канала

Поскольку в выбранной системе координат из-за принятых выше упрощающих допущений паровой канал неподвижен, для его поверхности справедливо условие непротекания

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}|_{S_b} = 0, \quad (5)$$

где  $\mathbf{V} = (u, v, w)$  — вектор скорости движения жидкого металла,  $S_b$  — поверхность парового канала  $z = Z_c(x, y)$ . Очевидно, что в дополнение к сделанным допущениям для приближенного выполнения условия необходимо, чтобы масса испаряющегося металла была достаточно мала по сравнению с массой расплавленного металла в сварочной ванне. Это в значительной мере справедливо в рассматриваемой задаче. Уравнение используется здесь как краевое условие для нормальной компоненты скорости.

На свободной поверхности справедливо также динамическое условие:

$$(\mathbf{P} - \mathbf{P}_v) \mathbf{n} = \frac{d\sigma}{dT} \nabla_\Gamma T + 2\sigma H \mathbf{n}, \quad \nabla_\Gamma = \nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla), \quad (6)$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя по отношению к области жидкой фазы единичная нормаль к стенке парового канала,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $H$  — средняя кривизна поверхности канала, которая задается формулой

$$2H = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla Z_c(x, y)}{(1 + |\nabla Z_c(x, y)|^2)^{1/2}} \right),$$

величины  $\mathbf{P} = -p \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}$ ,  $\mathbf{P}_v = -p_v \mathbf{I} + 2\mu_v \mathbf{D}_v$  — тензоры напряжений для жидкой фазы и паров металла, заполняющих канал, соответственно,  $\mu_v$  — динамическая вязкость паров. Здесь  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{D}_v$  — тензоры скоростей деформации [18] для жидкого металла и паров,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор,  $p$  и  $p_v$  — давления в сварочной ванне и в канале. Умножив левую и правую части (6) на касательный вектор  $\boldsymbol{\tau}$  к поверхности канала, получим уравнение

$$\mu \left( \frac{\partial(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \frac{\partial(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\tau})}{\partial \mathbf{n}} \right) = \mu_g \left( \frac{\partial(\mathbf{V}_v \cdot \mathbf{n})}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \frac{\partial(\mathbf{V}_v \cdot \boldsymbol{\tau})}{\partial \mathbf{n}} \right) + \frac{d\sigma}{dT} \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\tau}}. \quad (7)$$

Из уравнений (5), (7) следует соотношение для сил, направленных по касательной к поверхности

$$\mu \frac{\partial(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\tau})}{\partial \mathbf{n}} = \mu_g \frac{\partial(\mathbf{V}_v \cdot \boldsymbol{\tau})}{\partial \mathbf{n}} + \frac{d\sigma}{dT} \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\tau}}. \quad (8)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения соответствует касательной составляющей напряжений на стенках канала, вызванных истечением газа из парового канала. Второе слагаемое — выражение термокапиллярных сил [12, 17]. Условие (8) используется в настоящей работе как краевое условие для касательной к поверхности канала компоненты скорости. Вообще говоря, динамическое условие (6) может быть использовано при построении или уточнении [4] формы поверхности канала как одно из соотношений для неизвестных на ней. Однако в настоящей работе, как и в [4–6], для упрощения модели стенка парового канала ищется в виде поверхности вращения из заранее выбранного параметрического семейства, как было сказано выше.

Для оценки члена  $\partial(\mathbf{V}_v \cdot \boldsymbol{\tau})/\partial \mathbf{n}$  из (8) предполагаем, что скорость истечения паров из канала имеет параболическое распределение по радиусу, как в течении Пуазейля [18]. Характерное значение скорости истечения  $V_v$  здесь приблизительно определяется из интеграла Бернулли  $\Delta p \approx \rho_2 V_v^2 / 2$ , где  $\Delta p$  — избыточное давление паров на дне канала.

### 1.3.2. Условия на свободной границе сварочной ванны

В настоящем исследовании считаем приближенно, что верхняя поверхность ванны ( $z = 0$ ) плоская. Считаем также плоской (горизонтальной) нижнюю поверхность ванны, когда она при достаточной мощности лазера выходит на поверхность монтажного стола ( $z = h$ ). В силу упрощающих допущений, сформулированных выше, на верхней границе ванны  $w = 0$  имеет место динамическое условие. На дне ванны ставим условие прилипания.

### 1.3.3. Условия на границе фазового перехода

Из закона сохранения массы и условия прилипания, записанных на боковой стенке сварочной ванны — границе фазового перехода, следуют соотношения:

$$\rho_1 \mathbf{V}_w \cdot \mathbf{n} = \rho_2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{n},$$

$$\mathbf{V}_w \boldsymbol{\tau} = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\tau},$$

где  $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$  — единичные векторы нормали и касательной к границе раздела фаз.

### 1.3.4. Условие для давления

Уравнения Навье–Стокса позволяют определять давление с точностью до произвольной постоянной. Будем далее считать, что  $p$  — это разность между давлением в расчетной точке и средним давлением по объему сварочной ванны  $\Omega$ . Следовательно,  $p$  удовлетворяет условию [19]

$$\int_{\Omega} p d\Omega = 0.$$

## 2. КВАЗИТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ

Ввиду существенной сложности трехмерной модели лазерной сварки, описанной выше, в настоящей работе на ее основе путем осреднения уравнений по переменной  $y$  создана квазитрехмерная модель. В ней учитывается конечность в направлении оси  $y$  характерных размеров области, в которой протекают физические процессы. Приблизительно учитываются поток тепла в направлении оси  $y$  и трение между перпендикулярными к оси  $y$  слоями жидкого металла в ванне. Операция осреднения определяется здесь следующим образом:

$$\bar{f}(x, z) = \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} f(x, y, z) dy,$$

где  $L_y$  — половина средней ширины ванны (размера сварочной ванны в направлении оси  $y$ ),  $f$  — некоторая физическая величина. Осреднение производится по  $y$  от 0 до  $L_y$ , поскольку задача симметрична относительно плоскости  $(x, z)$ . Выпишем здесь несколько свойств операции осреднения [18], которые будут использоваться далее:

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}, \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}, \quad \overline{f_1 + f_2} = \bar{f}_1 + \bar{f}_2, \quad \overline{\bar{f}} = \bar{f}, \quad \overline{f_1(f_2 - \bar{f}_2)} = 0, \quad \overline{f_1 \bar{f}_2} = \bar{f}_1 \bar{f}_2.$$

Заметим, что ширина ванны при обычных режимах сварки пластин существенно меньше ее длины. В этих случаях величина погрешности, вносимой в уравнения модели при их осреднении по переменной  $y$ , будет меньше, чем при другой форме сварочной ванны.

### 2.1. Осреднение уравнений Навье–Стокса

Воспользовавшись уравнением неразрывности, получим из первого уравнения системы

$$\rho_2 \left( \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} + \frac{\partial(wu)}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (9)$$

Применим операцию осреднения к уравнению

$$\rho_2 \left( \overline{\frac{\partial(u^2)}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial(vu)}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial(wu)}{\partial z}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \left( \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} + \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} \right). \quad (10)$$

Из краевых условий (см. п. 1.3.3) и симметричности задачи относительно плоскости  $(x, z)$  следует, что  $v = 0$ ,  $\partial u / \partial y = 0$  при  $y = 0$ . В некотором приближении, достаточном для качественного описания течения в сварочной ванне, полагаем, что  $v \approx 0$  при  $y = \pm L_y$ , поскольку на самой стенке ванны  $v = 0$ . Следовательно,

$$\overline{\frac{\partial(vu)}{\partial y}} = \frac{1}{L_y} \left( vu|_{y=L_y} - vu|_{y=0} \right) \approx 0, \quad \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = \frac{1}{L_y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=L_y} - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) = \frac{1}{L_y} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=L_y}.$$

Для оценки производной  $\partial u / \partial y$  при  $y = L_y$  используем формулу

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=L_y} \approx 2 \frac{V_w - \bar{u}(x, z)}{L_y}. \quad (11)$$



При записи правой части полагаем  $\bar{u}(x, z) \approx u(x, 0, z)$ . При осреднении нелинейных членов в (10) будем использовать формулы:

$$\overline{u^2} = \overline{(\bar{u} + u - \bar{u})^2} = \bar{u}^2 + \overline{(u - \bar{u})^2} \approx \bar{u}^2,$$

$$\overline{wu} = \overline{(\bar{w} + w - \bar{w})(\bar{u} + u - \bar{u})} = \bar{w}\bar{u} + \overline{(w - \bar{w})(u - \bar{u})} \approx \bar{w}\bar{u}.$$

Рассматривая слагаемые  $\overline{(u - \bar{u})^2}$  и  $\overline{(w - \bar{w})(u - \bar{u})}$ , прежде всего заметим, что они являются квадратичными относительно разностей компонент скорости и их средних значений, и в большей части расчетной области они будут существенно меньше по сравнению с квадратами указанных средних значений. Кроме этого, вклад слагаемых  $\overline{(u - \bar{u})^2}$  и  $\overline{(w - \bar{w})(u - \bar{u})}$  в уравнения движения учитывается здесь за счет увеличения коэффициента вязкости так, как это делается в некоторых известных моделях динамики вязкой жидкости [1, 18].

Осреднение других уравнений из (2) проводится аналогичным образом. В результате получим систему относительно неизвестных  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{p}$  (для упрощения записи знак осреднения здесь и далее опущен):

$$\begin{aligned} \rho_2 \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - 2\mu \frac{u - V_w}{L_y^2}, \\ \rho_2 \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - 2\mu \frac{w}{L_y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

## 2.2. Осреднение уравнения теплопроводности

Осреднение слагаемого с производными по  $y$  в правой части уравнения теплопроводности (1) проводится следующим образом:

$$\overline{\frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial y} \right)} = \frac{1}{L_y} \left( \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=L_y} - \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) = \frac{1}{L_y} \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=L_y}.$$

Здесь учтено, что  $\partial T / \partial y = 0$  при  $y = 0$ . В области жидкой фазы оценка диффузионного теплового потока в направлении оси  $y$  в настоящей работе производится двумя способами. В первом из них используется формула

$$-\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=L_y} \approx \frac{\lambda_1}{l_T} (\bar{T} - T_g), \quad l_T = 2 \left( \tau_T \frac{\lambda_1}{c\rho} \right)^{1/2}, \quad \tau_T = \frac{2r_F}{V_w}, \quad (13)$$

где  $l_T$  — длина распространения тепловой волны в твердой фазе за время  $\tau_T$  [11, 12]. Этот способ предпочтителен, когда величина  $L_y$ , найденная из эксперимента или каких-либо других расчетов, имеет большую погрешность.

Во втором способе, как и выше, для оценки производной применяется формула

$$\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=L_y} \approx -\lambda_2 \frac{2(\bar{T} - T_e)}{L_y}, \quad (14)$$

где  $T_e$  — равновесная температура кристаллизации (плавления). Такая оценка может быть использована для учета диффузии тепла в направлении оси  $y$  в случае, когда  $L_y$  известна априори с достаточно хорошей точностью. В области твердой фазы для приближенного учета диффузии тепла в направлении оси используется аппроксимация (13). Нелинейные члены в левой части уравнения теплопроводности (1) осредняются аналогично тому, как это делалось для уравнений Навье–Стокса.

Таким образом, в области сварочной ванны при использовании оценки осредненное уравнение теплопроводности имеет вид (знак осреднения здесь и далее опущен)

$$c_2 \rho_2 \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \lambda_2 \frac{2(T - T_e)}{L_y^2}, \quad (15)$$

а в твердой фазе —

$$c_1 \rho_1 V_w \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \lambda_1 \frac{T - T_g}{L_y l_T}. \quad (16)$$

### 2.3. Осреднение краевых условий

В настоящей работе осредненные величины  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{T}$  считаются определенными только для тех  $x$  и  $z$ , для которых точка  $(x, 0, z)$  не лежит внутри парового канала. Следовательно, двумерная область, в которой рассматривается краевая задача для осредненных уравнений Навье–Стокса и уравнения теплопроводности, является сечением области из трехмерной модели плоскостью  $(x, z)$ .

Рассмотрим область, схематично изображенную на рис. 2. Здесь  $C$  и  $H$  — точки с координатами  $(0, r(z_1), z_1)$  и  $(-r(z_2), L_y, z_2)$  соответственно,  $r(z)$  — радиус парового канала на глубине  $z$ ,  $z_1$  и  $z_2$  — некоторые близкие друг другу значения  $z$ , меньше глубины парового канала. Для наглядности ось  $y$  направлена на рис. 2 в противоположную сторону по сравнению с рис. 1. Криволинейная поверхность  $ABCD$  является частью стенки парового канала, расположенной между плоскостями  $z = z_1$  и  $z = z_2$ . Поскольку значения  $z_1$  и  $z_2$  близки, будем пренебрегать

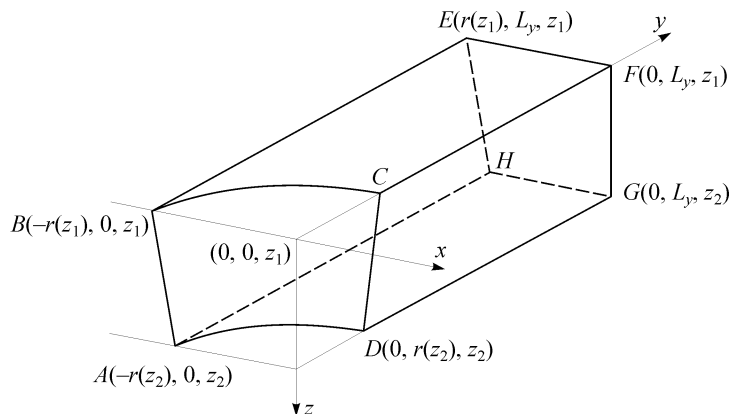


Рис. 2. Схема области вблизи парового канала, находящейся между плоскостями  $z = z_1$  и  $z = z_2$ .

различием между отрезком  $AB$  и дугой образующей парового канала, проходящей через точки  $A, B$ , а также различием между отрезком  $CD$  и дугой  $CD$ .

Запишем уравнение теплового баланса для объема  $ABCDEFGH$ :

$$Q_{ABEH} + Q_{BCFE} + Q_{ABCD} + Q_{CFGD} + Q_{EFGH} + Q_{ADGH} = 0, \quad (17)$$

где слагаемые из (17) — это тепловые потоки в указанный объем через соответствующие части границы, каждый из которых состоит из диффузионной и конвективной составляющих. Стенка парового канала близка к вертикальной на большей части его поверхности. Поскольку температура на ней меняется незначительно по сравнению с ее изменением при удалении от канала, то диффузионным потоком тепла по вертикали в окрестности канала можно пренебречь. Будем также предполагать, что конвективный поток через  $ADGH$  примерно равен конвективному потоку через  $BCFE$ . Следовательно,  $Q_{ADGH} + Q_{BCFE} \approx 0$ .

Четырехугольник  $EFGH$  находится на расстоянии  $L_y$  от парового канала. На этой части границы  $v \approx 0$ . Следовательно, конвективный поток тепла через  $EFGH$  мал. Диффузионная составляющая  $Q_{EFGD}$  также мала по сравнению с  $Q_{ABCD}$  из-за малости площади  $EFGH$  и удаленности от луча лазера. Таким образом, величиной  $Q_{EFGH}$  в (17) можно пренебречь.

Для оценки тепловых потоков  $Q_{ABEH}$  и  $Q_{CFGD}$  в настоящей работе использовались формулы:

$$Q_{ABEH} \approx -\lambda_2 \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\substack{x=-r(z_m), \\ z=z_m;}} L_y \frac{z_2 - z_1}{n_x} + c_2 \rho_1 V_w \bar{T}(-r(z_m), z_m) L_y (z_2 - z_1),$$

$$z_m = (z_1 + z_2) / 2, \quad Q_{CFGD} \approx -c_2 \rho_1 V_w \frac{\bar{T}(-r(z_m), z_m) + \bar{T}(r(z_m), z_m)}{2} L_y (z_2 - z_1),$$

где вектор  $(n_x, 0, n_z)$  — единичная нормаль к плоскости  $ABEH$ , такая, что  $n_x > 0$ ,  $\mathbf{n} = (n_x, n_z)$ . В формуле для  $Q_{CFGD}$  учтена только конвективная составляющая потока, при оценке которой предполагается, что средняя температура по сечению  $CFGD$  равна полусумме средних температур  $\bar{T}(-r(z_m), z_m)$  и  $\bar{T}(r(z_m), z_m)$ . Диффузионной компонентой потока  $Q_{CFGD}$  здесь пренебрегаем (предполагаем, что производная  $\partial T / \partial x$  мала на сечении  $CFGD$  по сравнению со значениями модуля градиента температуры в окрестности парового канала, см. рис. 2).

В трехмерной модели на поверхности парового канала выполняется условие непротекания (5). Следовательно, конвективная составляющая потока  $Q_{ABCD}$  равна нулю. Диффузионную компоненту  $Q_{ABCD}$  можно считать известной: она равна интегралу от правой части (3) по площадке  $ABCD$ . С учетом сделанных выше предположений условие (17) можно записать в виде

$$\lambda_2 \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\substack{x=-r(z_m), \\ z=z_m;}} \approx n_x c_2 \rho_1 V_w \frac{\bar{T}(-r(z_m), z_m) - \bar{T}(r(z_m), z_m)}{2} + Q_{ABCD} \frac{n_x}{L_y (z_2 - z_1)}. \quad (18)$$

Уравнение (18) используется в настоящей работе как краевое условие для осредненной температуры на передней стенке парового канала. Для задней стенки краевое условие выписывается аналогичным образом.

При записи краевых условий для уравнений Навье–Стокса на поверхности канала воспользуемся имеющейся априорной информацией. Можно приближенно считать, что в окрестности парового канала  $\bar{u} \approx V_w \rho_1/\rho_2$ , так как в среднем жидкий металл перемещается в сварочной ванне со скоростью  $V_w \rho_1/\rho_2$  в направлении оси  $x$ . Поскольку стенки парового канала на большей части поверхности близки к вертикальным, то справедливо условие:

$$(\bar{u}n_x + \bar{w}n_z)|_{\Gamma} \approx (\rho_1/\rho_2)V_w n_x, \quad \Gamma = \{(x, z) : z = Z_c(x, 0)\}, \quad (19)$$

где  $(n_x, n_z)$  — вектор нормали к  $\Gamma$ . Уравнение (19) используется здесь как краевое условие для нормальной к  $\Gamma$  компоненты осредненного вектора скорости. Условие (19) для касательной компоненты выводится из закона сохранения количества движения, записанного для объема  $ABCDEFGH$  подобно тому, как было получено условие. При этом используется соотношение для сил, направленных по касательной к поверхности парового канала.

Краевые условия на верхней и нижней поверхностях пластин, на периферии и на границе сварочной ванны для величин  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{T}$  аналогичны соответствующим условиям трехмерной модели и получаются осреднением последних.

### 3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Приближенное решение задачи для осредненных уравнений (12), (15), (16) строится здесь с помощью итерационного процесса, в котором на каждой итерации по значениям компонент скорости с предыдущего шага рассчитывается температурное поле и новое приближение для поверхности фазового перехода (границы сварочной ванны). Последняя определяется по изотерме кристаллизации (плавления). По новому приближению для сварочной ванны далее рассчитываются распределения скоростей и давления. В качестве начального приближения для итерационного процесса скорость жидкого металла в сварочной ванне полагалась равной  $V_w \rho_1/\rho_2$ , а температура в пластинах равной температуре инертного газа  $T_g$ .

Для приближенного решения краевой задачи для уравнения теплопроводности (15), (16) в области с криволинейной границей применяется консервативный вариант метода коллокаций и наименьших квадратов (КНК) [20]. Для решения уравнений Навье–Стокса используется вариант метода КНК. Он хорошо зарекомендовал себя при решении известной эталонной задачи о течении вязкой жидкости в каверне с движущейся верхней крышкой [21–24]. В работе [21] приведены результаты расчетов, проведенных методом КНК в широком диапазоне чисел  $Re$  (от 1 до 7500). Показано, что имеет место их хорошее совпадение с известными высокоточными расчетами [22–24], в частности, при  $Re = 1000$  с точностью выше, чем  $10^{-6}$ .

Расчеты в настоящей задаче проводились на неравномерных сетках (рис. 3) [4–6], сгущающихся в окрестности парового канала. Число ячеек сетки составляло 70 тысяч, общее число неизвестных метода — 1,5 миллиона. За счет неравномерно-

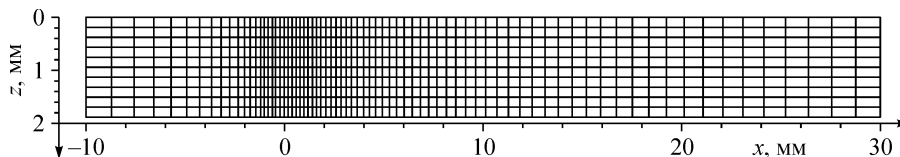


Рис. 3. Пример грубой (для наглядности) неравномерной сетки, сгущающейся в окрестности парового канала.

сти сетки удавалось рассчитывать поле температуры в области значительных размеров. Условия Дирихле с температурой окружающей среды для уравнения теплопроводности (15), (16) на границах расчетной области, значительно удаленных от ванны, являются довольно точными. Это многократно подтверждалось в численных экспериментах на последовательности возрастающих по размерам расчетных областей. При этом число узлов сетки на единицу длины вблизи парового канала существенно больше, чем в областях, удаленных от зоны сварки. В области больших градиентов расчетных величин шаг сетки мелкий, на периферии зоны сварки — в удалении от границ ванны, где градиенты температуры малы, шаг сетки относительно крупный. Кроме того, чем дальше отодвигалась по оси  $x$  граница расчетной области на периферию, тем меньше вблизи нее были градиенты температуры. Такой подход позволил с хорошей точностью реализовать условие на бесконечности.

Проведены численные эксперименты на последовательности сеток с уменьшением шага. Установлено, что приближенное решение уравнения теплопроводности и уравнений Навье–Стокса сходится при уменьшении шага не хуже, чем с первым порядком.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В этом разделе представлены результаты численного моделирования процесса сварки встык двух титановых пластин. В численных экспериментах определялись температурные поля в изделии, положение внутренних границ между фазами материала изделия, форма и глубина парового канала, поле скоростей в сварочной ванне.

На рис. 4 и 5, *a* приведены результаты моделирования сварки пластин толщиной  $h = 2$  мм со скоростью  $V_w = 0,0167$  м/с (1 м/мин) лазером мощностью  $W = 1,5$  кВт. Область черного цвета, через которую проходит прямая  $x = 0$ , на всех

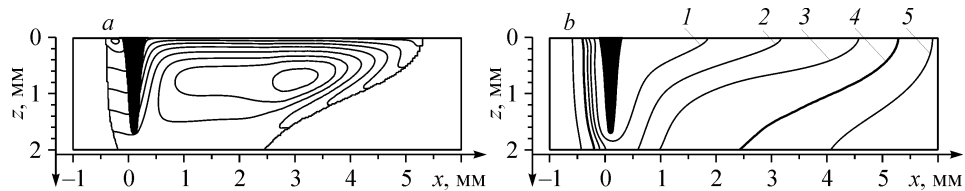


Рис. 4. Картина линий тока жидкого металла (*a*) и поле температур в сварочной ванне (*b*).  
 $T = 2800$  (изотерма 1), 2400 (2), 2150 (3), 1944 ( $T_p$ ) (4), 1200 (5) К.

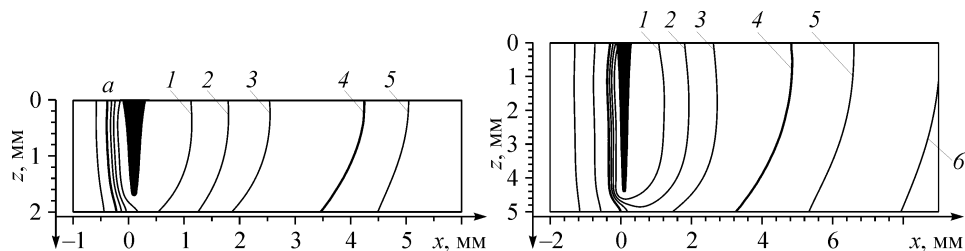


Рис. 5. Поле температур в сварочной ванне (скорость частиц жидкого металла полагалась равной  $V_w \rho_1 / \rho_2$ ).  
 $T = 2800$  (изотерма 1), 2400 (2), 2150 (3), 1944 ( $T_p$ ) (4), 1200 (5), 1000 К (6); расчет для  $h = 2$  (*a*), 5 (*b*) мм.

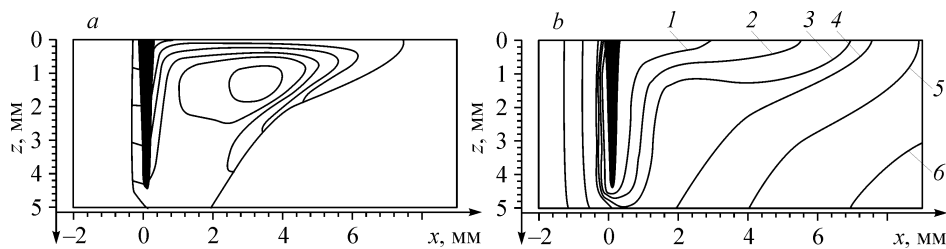


Рис. 6. Картина линий тока жидкого металла (а) и поле температур в сварочной ванне (b).  
 $T = 2800$  (изотерма 1), 2400 (2), 2150 (3), 1944 ( $T_e$ ) (4), 1200 (5), 1000 (6) К мм.

рисунках здесь и далее соответствует паровому каналу. Проведены следующие численные эксперименты: в одном расчете поле скоростей определялось путем численного решения уравнений Навье–Стокса со значениями физических параметров расплавленного титана, в другом — скорость в сварочной ванне во всех точках полагалась равной  $V_w \rho_1 / \rho_2$ , что соответствует плоскопараллельному переносу жидкого металла. На рис. 4, b и 5, a приведены изотермы в пластинах, полученные в первом и втором расчетах соответственно. На рис. 4, a изображена картина течения жидкого металла в сварочной ванне, полученная в первом расчете. Для наглядности показаны только фрагменты вычислительной области, находящиеся в окрестности парового канала. Горизонтальные размеры области, как было сказано выше, подбирались таким образом, чтобы их влияние на распределение температуры было несущественным.

На рис. 5, b и 6 приведены результаты расчетов сварки пластин толщиной  $h = 5$  мм со скоростью  $V_w = 0,0167$  м/с (1 м/мин) лазером мощностью  $W = 3$  кВт. Как и для пластин толщиной 2 мм, в одном из расчетов для моделирования течения жидкого металла использовались уравнения Навье–Стокса (рис. 6), в другом скорость течения полагалась равной  $V_w \rho_1 / \rho_2$  (рис. 5, b).

Видно, что длина сварочной ванны около верхней поверхности пластин на рис. 4 по крайней мере на 20 % больше, чем на рис. 5, a. Однако около нижней поверхности ее длина (см. рис. 4) меньше. Аналогичный результат имеет место и для пластин толщиной 5 мм. На рис. 7, a, b из распределения температуры на верхней поверхности пластин видно, что в верхней части ванны под влиянием конвекции жидкого металла происходит выравнивание распределения температуры, и изотерма кристаллизации — стенка ванны отодвигается дальше от парового канала. Таким образом, наличие вихревых движений жидкого металла в сварочной ванне может существенно влиять на распределение температуры в сварочной ванне и ее геометрию. Можно утверждать, что учет течения жидкого металла в расчете теплопереноса в сварочной ванне влияет на ее форму, но не влияет существенно на ее объем.

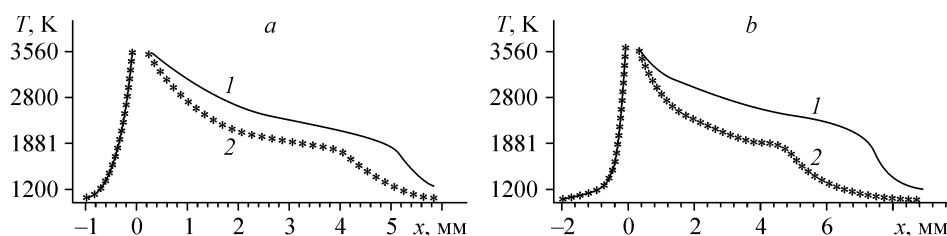


Рис. 7. Профили температуры на верхней поверхности ванны: поле скоростей жидкого металла находится из уравнений Навье–Стокса (1), скорость полагается равной  $V_w \rho_1 / \rho_2$  (2); расчет для  $h = 2$  (a), 5 (b) мм.

В таблице приведены значения физических величин, использовавшихся в работах других авторов.

Таблица

Значения физических величин, использовавшиеся в расчетах

| Название                         | Обозначение                    | Единица измерения | Значение              | Источник |
|----------------------------------|--------------------------------|-------------------|-----------------------|----------|
| Коэфф. поверхн. натяжения        | $\sigma$                       | Н/м               | 1,6                   | [25]     |
| Производная от $\sigma$ по $T$   | $d\sigma/dT$                   | Н/(м·К)           | $-0,26 \cdot 10^{-3}$ | [25]     |
| Коэфф. поглощения излучения      | $A$                            | безразм.          | 0,5                   | —        |
| Плотность твердой фазы           | $\rho_1$                       | кг/м <sup>3</sup> | 4500                  | [26]     |
| Плотность жидкой фазы            | $\rho_2$                       | кг/м <sup>3</sup> | 4100                  | [26]     |
| Плотность инертного газа (н.у.)  | $\rho_g$                       | кг/м <sup>3</sup> | $1,785 \cdot 10^{-1}$ | [27]     |
| Плотность паров металла          | $\rho_v$                       | кг/м <sup>3</sup> | 0,1                   | [8]      |
| Радиус луча лазера               | $r_F$                          | м                 | $10^{-4}$             | —        |
| Скорость инертного газа          | $U_g$                          | м/с               | 1                     | —        |
| Степень черноты жидк. и тв. фаз  | $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ | безразм.          | 0,5                   | —        |
| Температура кипения титана       | $T_b$                          | К                 | 3560                  | [27]     |
| Температура инертного газа       | $T_g$                          | К                 | 300                   | —        |
| Температура кристаллизации       | $T_e$                          | К                 | 1944                  | [26]     |
| Теплоемкость твердой фазы        | $c_1$                          | Дж/(м·К)          | 600                   | [26]     |
| Теплоемкость жидкой фазы         | $c_2$                          | Дж/(м·К)          | 1000                  | [26]     |
| Теплоемкость инертн. газа (н.у.) | $c_g$                          | Дж/(м·К)          | 5200                  | [27]     |
| Теплопроводность твердой фазы    | $\lambda_1$                    | Вт/(м·К)          | 20                    | [26]     |
| Теплопроводность жидкой фазы     | $\lambda_2$                    | Вт/(м·К)          | 33                    | [26]     |
| Теплопроводность инертн. газа    | $\lambda_g$                    | Вт/(м·К)          | 0,152                 | [27]     |
| Толщина газового зазора          | $\delta_g$                     | м                 | $3 \cdot 10^{-5}$     | —        |
| Теплота плавления                | $\kappa$                       | Дж/кг             | $315 \cdot 10^3$      | [27]     |
| Удельная теплота испарения       | $L$                            | Дж/кг             | $857 \cdot 10^4$      | [27]     |
| Вязкость жидкой фазы             | $\mu$                          | кг/(м с)          | $4 \cdot 10^{-3}$     | [25]     |
| Вязкость паров металла           | $\mu_v$                        | кг/(м с)          | $8 \cdot 10^{-5}$     | [8]      |
| Вязкость инертного газа          | $\mu_g$                        | кг/(м с)          | $3 \cdot 10^{-5}$     | [27]     |

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / 7 изд-е. Изд-во Дрофа, 2003. 840 с.
2. Rosenthal D. The mathematical theory of welding and cutting // Welding J. 941. Res. Suppl. 20. P. 220–234.
3. Рыкалин Н.Н. Расчеты тепловых процессов при сварке. М.: Машгиз, 1951. 296 с.
4. Черепанов А.Н., Шапеев В.П., Фомин В.М., Семин Л.Г. Численное моделирование теплофизических процессов при лазерной сварке с образованием парового канала // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 5. С. 88–96.
5. Шапеев В.П., Черепанов А.Н. Конечно-разностный алгоритм для численного моделирования процессов лазерной сварки металлических пластин // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, № 4. С. 102–117.
6. Черепанов А.Н., Шапеев В.П. Численное исследование процесса сварки тонких металлических пластин // Вычислительные технологии. 2009. Т. 14, № 3. С. 96–106.
7. Dowden J., Davis M., Kapadia P. Some aspects of the fluid dynamics of laser welding // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 126. P. 123–146.

8. **Sudnik W., Radaj D., Breitschwerdt S., Erofeev W.** Numerical simulation of weld pool geometry in laser beam welding // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2000. Vol. 33. P. 662–671.
9. **Rai R., Palmer T. A., Elmer J. W., Debroy T.** Heat Transfer and Fluid Flow during Electron Beam Welding of 304L Stainless Steel Alloy // *Welding Journal*. March 2009. Vol. 88. P. 54–61.
10. **Choo R.T., Szekely J.** The possible role of turbulence in GTA weld pool behavior // *Welding J. Res. Suppl.* 1994. No. 74. P. 25–31.
11. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
12. **Кутателадзе С.С.** Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979. 416 с.
13. **Sudnik W., Radaj D., Erofeev W.** Computerized simulation of laser beam welding, modelling and verification // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1996. Vol. 29. P. 2811–2817.
14. **Судник В.А., Радаи Д., Ерофеев В.А.** Компьютерное моделирование лазерно-лучевой сварки: модель и верификация // *Свароч. пр-во*. 1997. № 1. С. 28–33.
15. **Ораевский А.Н.** Гауссовы пучки и оптические резонаторы // *Тр. физ. ин-та им. П.Н. Лебедева*. М.: Наука. 1988. Т. 187. С. 3–59.
16. **Кутателадзе С.С., Боришанский В.М.** Справочник по теплопередаче. М.-Л.: Энергет. изд., 1958. 412 с.
17. **Кутателадзе С.С.** Теплопередача и гидродинамическое сопротивление. М.: Энергоатом, 1990. 369 с.
18. **Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.** Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: ГИФМЛ. 1963. 728 с.
19. **Темам Р.** Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 409 с.
20. **Исаев В.И.** Консервативный вариант метода коллокаций и наименьших квадратов // Тр. 40 конф. «Проблемы теор. и прикл. математики», Екатеринбург. 26-30 января 2009. С. 141–144.
21. **Isaev V.I., Sharpeev V.P.** Development of the Collocations and Least Squares Method // *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics*. 2008. Suppl. 1. P. S87–S106.
22. **Botella O., Peyret R.** Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow // *Computers & Fluids*. 1998. Vol. 27, No. 4. P. 421–433.
23. **Гаранжа В.А., Коньшин В.Н.** Численные алгоритмы для течений вязкой жидкости, основанные на консервативных компактных схемах высокого порядка // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1999. Т. 39, № 8. С. 1378–1392.
24. **Sharpeev A., Lin P.** An asymptotic fitting finite element method with exponential mesh refinement for accurate computation of corner eddies in viscous flow // *SIAM J. Sci. Comp.* 2009. Vol. 31, No. 3. P. 1874–1900.
25. **Ершов Г.С., Черняков В.А.** Строение и свойства жидких металлов. М.: Metallurgia, 1978. 248 с.
26. **Зиновьев В.Е.** Теплофизические свойства металлов при высоких температурах. М.: Metallurgia, 1989. 384 с.
27. **Бабичев А.П., Бабушкина Н.А., Братковский А.М. и др.** Физические величины: справочник / Под ред. Григорьева И.С., Мейлихова Е.З. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.

*Статья поступила в редакцию 2 ноября 2010 г.*