

УДК 519.634

## ДИНАМИКА ТОЧЕК ОТРЫВА ПРИ УДАРЕ ПЛАВАЮЩЕГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

М. В. Норкин

Южный федеральный университет, 344090 Ростов-на-Дону, Россия  
E-mail: norkinmi@mail.ru

Рассматривается плоская задача о вертикальном отрывном ударе кругового цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости. Исследование проводится в линеаризованной постановке с учетом динамики точек отрыва на границе тела, отделяющих область безотрывного обтекания от зоны отрыва. Формулируется связанная нелинейная задача, включающая смешанную краевую задачу теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности тела и уравнение, определяющее закон движения цилиндра. Рассматриваются примеры, характеризующие динамику точек отрыва при вынужденных или свободных движениях цилиндра. Проводится сравнение результатов численных расчетов, полученных с использованием предложенной математической модели, с результатами асимптотического анализа исходной нелинейной задачи на малых временах.

**Ключевые слова:** идеальная несжимаемая жидкость, круговой цилиндр, отрывной удар, линеаризованная модель, динамика точек отрыва, число Фруда, число кавитации.

DOI: 10.15372/PMTF20190503

**Введение.** При ударе твердого тела, полностью погруженного в жидкость, необходимо учитывать явление отрыва частиц жидкости от твердой поверхности. В момент удара положение системы не успевает измениться и образующаяся на поверхности тела зона отрыва характеризуется тем, что импульсное давление в ней равно нулю. В следующие после удара моменты времени внутренняя свободная граница отдалается от поверхности тела и образуется присоединенная каверна. Из классической задачи об ударе получаем начальные условия для решения соответствующей динамической кавитационной задачи [1]. В случае если сформулированы условия, определяющие закон движения тела после удара, можно исследовать динамику зоны отрыва с течением времени. Динамические задачи об отрывном ударе кругового цилиндра ранее исследовались в полной нелинейной постановке с помощью асимптотического анализа на малых временах [2–4]. При этом большую роль играет динамика точек отрыва внутренней свободной границы жидкости. Положение точек отрыва в каждый момент времени определялось таким образом, чтобы выполнялось условие Кутты — Жуковского. Показано, что при уменьшении числа Фруда начальные скорости движения точек отрыва существенно увеличиваются [2]. Таким образом, при малых скоростях движения цилиндра, соответствующих небольшим числам Фруда, необходимо учитывать динамику точек отрыва. В случае малых скоростей нелинейными слагаемыми в уравнении Эйлера (или в интеграле Коши — Лагранжа) можно пренебречь и рассматривать задачу в линеаризованной постановке. Следует отметить, что наряду с указанной

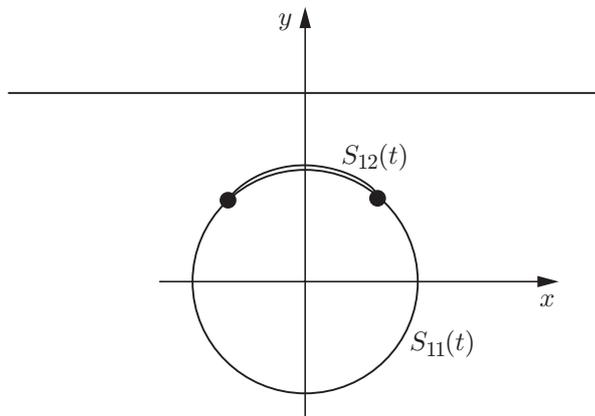


Схема задачи

нелинейностью имеется геометрическая нелинейность, обусловленная наличием неизвестной априори зоны отрыва частиц жидкости. Сохранение нелинейности в модели позволяет определить положение точек отрыва в каждый момент времени.

В некоторых работах начальное возмущение жидкости определялось с использованием классической модели удара, а после удара задача решалась в линеаризованной постановке [5, 6]. При этом течение жидкости полагалось безотрывным. Подобные динамические задачи об ударе с учетом явления кавитации не рассматривались. Линеаризованная модель часто используется в аналогичных задачах о проникании твердых тел в жидкость, а также об их выходе из воды. При этом отмечается, что в общем случае задача остается нелинейной, так как зависимость размеров области контакта от глубины проникания не известна и они определяются в процессе решения задачи [7, 8]. Современное состояние этого вопроса изложено в работе [9].

В настоящей работе с использованием линеаризованной модели определяется время схлопывания тонких каверн, образовавшихся в результате отрывного удара кругового цилиндра в жидкости. С точки зрения математики решается смешанная краевая задача теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности тела. В случае свободных движений цилиндра также учитываются законы его движения. Кроме того, учитывается искусственная кавитация. Рассматриваются примеры, характеризующие динамику точек отрыва после отрывного удара цилиндра. Показано, что при небольших числах Фруда ( $Fr = 0,2 \div 0,5$ ) полученные результаты численных расчетов хорошо согласуются с данными асимптотического анализа исходной нелинейной задачи на малых временах, причем наилучшее согласование имеет место при  $Fr \approx 0,5$ .

**1. Построение математической модели.** Рассматривается динамическая смешанная задача о вертикальном отрывном ударе кругового цилиндра, полностью погруженного в идеальную несжимаемую тяжелую жидкость. Полагается, что после удара цилиндр движется с постоянной скоростью или совершает свободные кавитационные движения под действием силы тяжести и силы, действующей на цилиндр со стороны среды. На поверхности цилиндра образуется зона отрыва, которая уменьшается с течением времени [1]. Задача исследуется в линеаризованной постановке, соответствующей малым скоростям движения тела и жидкости. В математической постановке задача, записанная в безразмерных переменных в подвижной системе координат, связанной с цилиндром, имеет вид (см. рисунок)

$$\Delta\Phi = 0, \quad R \in \Omega(t), \quad \Phi = 0, \quad y = H - h(t); \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \dot{h}(t)n_y, \quad G(\Phi) \geq 0, \quad R \in S_{11}(t); \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \geq \dot{h}(t)n_y, \quad G(\Phi) = 0, \quad R \in S_{12}(t); \quad (1.3)$$

$$G(\Phi) = 0,5\chi t - \Phi + \Phi_0 - \text{Fr}^{-2} t(y - H) - \text{Fr}^{-2} \int_0^t h(s) ds; \quad (1.4)$$

$$\dot{h}(t) = -1 - \frac{\beta}{\pi} \int_{S_1} G(\Phi)n_y ds - \text{Fr}^{-2} t; \quad (1.5)$$

$$\Phi(x, y, 0) = \Phi_0(x, y), \quad h(0) = 0, \quad \dot{h}(0) = -1. \quad (1.6)$$

Течение жидкости в начальный (непосредственно следующий за ударом) момент времени имеет потенциал  $\Phi_0(x, y)$ , который определяется на основе модели отрывного удара [1]:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_0 &= 0, \quad R \in \Omega(0), \quad \Phi_0 = 0, \quad y = H, \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} &= -n_y, \quad \Phi_0 \leq 0, \quad R \in S_{11}(0), \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} &\geq -n_y, \quad \Phi_0 = 0, \quad R \in S_{12}(0). \end{aligned}$$

Переход к безразмерным переменным осуществляется по формулам

$$t' = at/v_0, \quad x' = ax, \quad y' = ay, \quad \Phi' = av_0\Phi, \quad p' = \rho v_0^2 p,$$

где штрих соответствует размерным величинам.

Неподвижные координаты  $X, Y$  связаны с подвижными  $x, y$  соотношениями  $X = x, Y = y + h(t)$ .

В данной работе используются следующие обозначения:  $\Phi(x, y, t)$  — потенциал скоростей абсолютного движения жидкости, записанный относительно подвижной системы координат;  $\Omega(t)$  — область, занятая жидкостью;  $S_1 = S_{11}(t) \cup S_{12}(t)$  — поверхность цилиндра;  $S_{11}(t)$  — часть поверхности, на которой не происходит отрыва частиц жидкости;  $S_{12}(t)$  — зона отрыва;  $H$  — глубина погружения цилиндра в начальный момент времени;  $\rho = \text{const}$  — плотность жидкости;  $\rho_c = \text{const}$  — плотность материала цилиндра;  $\dot{h}(t)$  — проекция безразмерной скорости движения цилиндра после удара на ось  $y$  ( $\dot{h}(0) = -1$ );  $a$  — радиус цилиндра;  $R$  — радиус-вектор с координатами  $(x, y)$  (начало координат находится в центре цилиндра, ось  $y$  направлена вертикально вверх).

Полагается, что течение жидкости является симметричным относительно оси  $y$ , а дно и стенки удалены от тела на большие расстояния.

Будем полагать, что на внешней свободной поверхности жидкости действует постоянное атмосферное давление  $p_a$ , а давление в зоне отрыва (в тонкой каверне) равно  $p_c$  ( $p_c$  — давление насыщенных паров жидкости или газа либо давление газа в зоне отрыва при искусственной кавитации).

Задача (1.1)–(1.6) содержит следующие безразмерные параметры:

$$\text{Fr} = \frac{v_0}{\sqrt{ga}}, \quad \chi = 2 \frac{p_a - p_c}{\rho v_0^2}, \quad p_0 = \frac{p_a}{\rho v_0^2}, \quad \beta = \frac{\rho}{\rho_c},$$

где  $\text{Fr}$  — число Фруда;  $\chi$  — число кавитации (безразмерная разность давлений);  $p_0$  — безразмерная величина  $p_a$ ;  $v_0$  — скорость, приобретенная цилиндром в результате удара;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\beta$  — отношение плотностей жидкости и цилиндра.

В случае математической постановки задачи на каждой части границы тела заданы кинематическое и динамическое условия, одно из которых сформулировано в виде неравенства, другое имеет вид равенства. Кинематическое условие в (1.2) является обычным условием безотрывного обтекания. Динамическое условие в виде неравенства в зоне контакта является следствием соотношения  $p \geq p_c$  (давление в области контакта не может быть меньше давления в зоне отрыва) и получается путем интегрирования этого неравенства по времени от нуля до  $t$  при любом фиксированном  $R \in S_{11}(t)$ . При этом давление в жидкости находится с использованием интеграла Коши — Лагранжа, записанного в подвижной системе координат (в размерных переменных отбрасываются квадратичные члены вида  $\dot{h}(t)\Phi_y$  и  $0,5(\nabla\Phi)^2$ , затем осуществляется переход к безразмерным переменным). В линеаризованной постановке форму внутренней свободной границы можно приближенно принять близкой к окружности. В этом случае кинематическое условие в виде неравенства в (1.3) означает, что жидкие частицы не могут входить внутрь твердого тела. Для уменьшающейся с увеличением времени зоны отрыва (схлопывающейся каверны) сформулированное в (1.3) динамическое условие равносильно равенству  $p = p_c$  на участке поверхности  $S_{12}(t)$  при любом фиксированном  $R \in S_{12}(t)$ . Это обусловлено тем, что фиксированная точка  $R \in S_{12}(t)$  принадлежит этой зоне при всех значениях времени, меньших  $t$  (при уменьшении времени зона отрыва увеличивается). Следовательно, давление в зоне отрыва равно  $p_c$  для любого момента времени, изменяющегося от нуля до  $t$ . Если в задачах допускается увеличение зоны отрыва, граничное условие на  $S_{12}(t)$  должно иметь вид  $p = p_c$ . Заметим, что в рассматриваемой идеализированной постановке уменьшение или увеличение зоны отрыва означает, что соответствующая дуга окружности уменьшается или увеличивается. Аналогичным образом выводится краевое условие на внешней свободной границе жидкости. Заметим, что однородное условие для потенциала скорости характерно для задач об ударе.

Условие  $p \geq p_c$  в зоне контакта, из которого следует динамическое условие в (1.2), в общем случае может не выполняться, так как давление в жидкости не может становиться меньше давления насыщенных паров, но при этом оно может быть меньше давления в каверне при искусственной кавитации. В работе [4] показано, что при больших числах Фруда ( $Fr \geq 1$ ) давление в зоне контакта становится меньше величины  $p_c$  и в некоторых случаях может быть отрицательным. Последнее обстоятельство свидетельствует о наличии дополнительных кавитационных зон, которые возникают непосредственно после отрывного удара тела в жидкости. Однако при уменьшении числа Фруда ( $Fr \leq 0,5$ ) давление в зоне контакта становится больше величины  $p_c$ . Данный вывод сделан на основе асимптотического анализа исходной нелинейной задачи на малых временах. Заметим, что выполнение условия  $p \geq p_c$  приводит к корректной постановке задачи. Заметим также, что во всех рассмотренных ниже примерах справедливость условия  $p \geq p_c$  в зоне контакта подтверждается численно на основе решения предложенной линеаризованной модели с односторонними ограничениями.

Задача (1.1)–(1.4) имеет такую же структуру, как и классическая задача об ударе с отрывом. Отсюда следуют регулярность ее решения в точках отрыва и возможность использования для ее решения известных численных методов. Таким образом, решение поставленной задачи удовлетворяет условию Кутты — Жуковского в каждый момент времени  $t$ . Теорема о существовании и единственности решения задачи об ударе с отрывом доказана в [10].

Решение задачи с односторонними ограничениями позволяет определить динамику точек отрыва при заданном законе движения цилиндра. В случае свободных движений цилиндра неизвестными являются закон его движения и динамика точек отрыва. В этом

случае задача (1.1)–(1.4) дополняется уравнением движения цилиндра

$$\ddot{h}(t) = -\frac{\beta}{\pi} \int_{S_{11}(t)} (p - p_c) n_y ds - \text{Fr}^{-2}, \quad (1.7)$$

где безразмерное давление в зоне отрыва, как и размерное, обозначено через  $p_c$ .

В формуле (1.7) учитывалась реакция газа в зоне отрыва при искусственной кавитации, и с помощью формулы Грина соответствующий интеграл по  $S_{12}(t)$  преобразован в интеграл по  $S_{11}(t)$ . Учитывая, что в зоне отрыва  $p - p_c = 0$ , интегрирование можно продолжить на всю поверхность цилиндра. Интегрируя далее уравнение (1.7) по времени от нуля до  $t$  и меняя порядок интегрирования, получаем соотношение (1.5).

**2. Численная реализация и анализ результатов.** Сначала рассмотрим задачу о вертикальном отрывном ударе кругового цилиндра и его последующем движении в глубь жидкости с постоянной скоростью ( $h(t) = -t$ ). Динамика точек отрыва после удара определяется на основе решения смешанной краевой задачи теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности тела (1.1)–(1.4). Для ее решения применяется специальный итерационный метод, в котором последовательно уточняются неизвестные заранее зоны отрыва и контакта частиц жидкости. Исходная нелинейная задача сводится к последовательному решению линейных краевых задач с фиксированным разбиением границы тела на области контакта и отрыва. Последние задачи решаются численно с использованием метода конечных элементов [11] и метода слабой вариации. Этот подход подробно изложен в работах, посвященных исследованию начального этапа движения твердых тел в жидкости с учетом явления кавитации [2–4]. Поставленная задача исследуется для различных значений времени и числа Фруда при  $h = 1, 2$ ,  $\chi = 0$  (давление в зоне отрыва равно атмосферному давлению). При заданном законе движения цилиндра время входит в задачу в качестве параметра. Численные значения угловой координаты точки отрыва  $\theta(t)$  ( $0 < \theta(t) < 0,5\pi$ ) в различные моменты времени сравниваются с аналогичными результатами, полученными с помощью асимптотического анализа исходной нелинейной задачи при малых значениях времени. Для угловой координаты точки отрыва справедлива асимптотическая формула [4]

$$\theta(t) = \theta(0) + c_1 t, \quad t \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

( $c_1$  — угловая скорость движения точки отрыва в начальный момент времени).

Значения коэффициента  $c_1 = c_1(\text{Fr})$  для различных значений числа Фруда, найденные с помощью метода [2–4], равны  $c_1(0,5) = 3,21$ ,  $c_1(0,2) = 18,57$ ,  $c_1(0,1) = 73,17$ . При  $\text{Fr} = 0,5$  угловая координата точки отрыва  $\theta(t)$  в различные моменты времени имеет следующие приближенные значения (в скобках приводятся результаты, полученные по формуле (2.1)):  $\theta(0) = 0,59$  (0,59),  $\theta(0,1) = 0,92$  (0,91),  $\theta(0,2) = 1,21$  (1,23),  $\theta(0,29) = 1,55$  (1,52). Затем зона отрыва исчезает (происходит схлопывание тонкой каверны). При  $\text{Fr} = 0,2$  получаем следующие результаты:  $\theta(0,01) = 0,79$  (0,77),  $\theta(0,02) = 0,98$  (0,96),  $\theta(0,03) = 1,17$  (1,14),  $\theta(0,04) = 1,44$  (1,33),  $\theta(0,041) = 1,49$  (1,35). Результаты проведенного сравнения показывают, что значения, полученные двумя различными способами, хорошо согласуются в широком диапазоне значений параметра  $t$ . Можно полагать, что при  $\text{Fr} = 0,5$  угловая координата точки отрыва изменяется по линейному закону (погрешность составляет 1–2 %). Заметим, что безразмерное время схлопывания тонкой каверны  $t_*$  уменьшается при уменьшении числа Фруда. Так, при  $\text{Fr} = 0,2$   $t_* < 0,1$ , при  $\text{Fr} = 0,1$   $t_* < 0,01$ . В общем случае диапазон значений  $t$ , в котором применима асимптотическая формула (2.1), должен быть ограничен  $t_*$ .

Таким образом, при малых числах Фруда динамическую задачу об ударе с отрывом можно эффективно решить с использованием предложенной линеаризованной модели

(1.1)–(1.4). При этом асимптотическая формула (2.1) малоэффективна при  $Fr < 0,1$ . При больших числах Фруда ( $Fr \geq 1$ ), наоборот, математическая модель (1.1)–(1.4) неэффективна, а асимптотический анализ на малых временах оказывается эффективным [2–4]. Как указывалось выше, существует некоторый внутренний диапазон значений числа Фруда ( $0,2 \leq Fr \leq 0,5$ ), в котором данные, полученные с использованием двух различных подходов, хорошо согласуются.

Заметим также, что определение коэффициента  $c_1$  для тел другой формы (в частности, для эллипса) представляет большие технические трудности. Преимуществом предложенной математической модели является то, что ее можно использовать для плоских тел произвольной формы.

Рассмотрим задачу о свободных движениях цилиндра после отрывного удара. Для таких движений асимптотический анализ точек отрыва не проводился. Поскольку в случае свободных движений время не входит в задачу в качестве параметра, для ее решения используется метод шагов по времени. Заменяя производную  $\dot{h}(t)$  разностным отношением, а интеграл от  $h(t)$  — квадратурной формулой правых прямоугольников, получаем разностную задачу

$$\Delta\Phi = 0, \quad R \in \Omega(t_n), \quad \Phi = 0, \quad y = H - h(t_n); \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \tau^{-1}[h(t_n) - h(t_{n-1})]n_y, \quad G_n(\Phi) \geq 0, \quad R \in S_{11}(t_n); \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} \geq \tau^{-1}[h(t_n) - h(t_{n-1})]n_y, \quad G_n(\Phi) = 0, \quad R \in S_{12}(t_n); \quad (2.4)$$

$$G_n(\Phi) = 0,5\chi t_n - \Phi(x, y, t_n) + \Phi_0(x, y) - Fr^{-2} t_n (y - H) - Fr^{-2} \tau \sum_{k=1}^n h(t_k); \quad (2.5)$$

$$h(t_n) = h(t_{n-1}) - \tau - Fr^{-2} t_n \tau + \frac{\tau\beta}{\pi} \int_{S_1} [\Phi(x, y, t_n) - \Phi_0(x, y) + Fr^{-2} t_n y] n_y ds, \quad (2.6)$$

где  $\Phi = \Phi(x, y, t_n)$ ;  $\Phi(x, y, t_0) = \Phi_0(x, y)$ ;  $h(t_0) = 0$ ;  $t_0 = 0$ ;  $\tau = t_n - t_{n-1}$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$

В (2.6) учтено, что интеграл от функции  $\text{const } n_y$  по всей поверхности цилиндра равен нулю.

Начальное приближение в рассматриваемом итерационном процессе находится на основе решения классической задачи об ударе с отрывом. Затем на каждом шаге по времени определяется перемещение цилиндра и находятся новые координаты точек отрыва. Для этих величин возникает связанная нелинейная задача (2.2)–(2.6), включающая смешанную краевую задачу теории потенциала с граничными условиями типа неравенств (2.2)–(2.5) и нелинейное уравнение (2.6), определяющее закон движения цилиндра. Для численного решения этой задачи используются два связанных итерационных процесса: внешний и внутренний. Внешний итерационный процесс представляет собой решение нелинейного уравнения (2.6) методом простой итерации, а внутренний итерационный процесс, который применяется на каждом шаге внешнего процесса, служит для решения задачи с односторонними ограничениями. Таким образом, при заданном перемещении цилиндра  $h(t_n)$  уточняется неизвестная заранее зона отрыва частиц жидкости. Величина перемещения уточняется с помощью метода простой итерации. Такой подход позволяет одновременно находить неизвестные заранее зоны отрыва частиц жидкости и закон движения цилиндра.

Заметим, что связанные итерационные процессы использовались в статических контактных задачах теории упругости для одновременного определения перемещения штампа и неизвестной области контакта [12]. Аналогичные задачи возникают в классической задаче гидродинамического удара, когда по заданным внешнему ударному импульсу и точке

Таблица 1

Значения параметров  $h$  и  $\theta$ ,  
полученные на различных шагах  
итерационного процесса при  $t_1 = 0,05$

Шаг итерации	$h$	$\theta$
0	-0,0500	0,767
1	-0,0540	0,755
2	-0,0525	0,760
3	-0,0531	0,757
4	-0,0528	0,758
5	-0,0529	0,758

Таблица 2

Приближенные значения параметров  $h, \theta$   
на каждом шаге по времени  
при  $\beta = 0,5$

$t$	$h$	$\theta$
0	0	0,59
0,05	-0,053	0,76
0,10	-0,109	0,90
0,15	-0,168	1,03
0,20	-0,229	1,14
0,25	-0,294	1,24
0,30	-0,361	1,34
0,35	-0,431	1,44

Таблица 3

Приближенные значения угловых координат точек отрыва  
в различные моменты времени при  $\beta = 0$

$t$	$\theta$	$t$	$\theta$
0,10	0,84	0,50	1,24
0,20	0,98	0,60	1,33
0,30	1,08	0,70	1,45
0,40	1,16	0,74	1,54

его приложения определяются поступательная и угловая скорости, приобретенные телом в результате удара, и неизвестные заранее первоначальные зоны отрыва частиц жидкости, а также при изучении свободного кавитационного торможения цилиндра в жидкости после безотрывного удара (до начала процесса цилиндр погружен в жидкость наполовину). В настоящей работе связанная нелинейная задача решается на каждом шаге по времени.

Рассмотрим примеры, характеризующие динамику точек отрыва при свободных движениях цилиндра. Пусть  $Fr = 0,5$ ,  $\chi = 0$ ,  $h = 1,2$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\tau = 0,05$ . На первом шаге по времени решается связанная нелинейная задача (2.2)–(2.6) при  $n = 1$ . Алгоритм решения состоит в следующем. Сначала задается первое приближение для перемещения цилиндра  $h(t_1)$  ( $t_1 = 0,05$ ) и решается смешанная краевая задача теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности тела (2.2)–(2.5). На основе решения этой задачи определяется первое приближение для угловой координаты точки отрыва  $\theta(t_1)$ . Данные значения приведены во второй строке табл. 1. Затем выполняется первый шаг простой итерации для уравнения (2.6) и определяется следующее приближение для  $h(t_1)$  (третья строка табл. 1). После этого процесс повторяется. Из табл. 1, в которой приведены значения  $h, \theta$ , полученные на последовательных итерациях указанным выше способом, следует, что данный метод быстро сходится. Искомые величины имеют следующие приближенные значения:  $h(t_1) = -0,053$ ,  $\theta(t_1) = 0,76$ . В табл. 2 приведены приближенные значения величин  $h(t), \theta(t)$  на каждом шаге по времени. При  $t \approx 0,4$  зона отрыва исчезает.

Следует отметить, что время схлопывания каверны увеличивается с увеличением массы цилиндра (уменьшением параметра  $\beta$ ). Поэтому представляет интерес предельный случай  $\beta = 0$ . Переходя к пределу в уравнении (1.5), получаем  $\dot{h}(t) = -1 - Fr^{-2}t$ . Таким образом, в этом предельном случае закон движения цилиндра известен, и решается задача (1.1)–(1.4), в которую время входит в качестве параметра. Приближенные значения угловых координат точек отрыва в различные моменты времени приведены в табл. 3.

Рассмотренным примерам соответствуют следующие физические параметры:  $v_0 = 0,5$  м/с,  $a \approx 0,1$  м ( $Fr = 0,5$ ), время схлопывания каверны при движении с постоянной скоростью составляет приблизительно 0,06 с. В случае свободного движения при  $\beta = 0,5$  это время равно  $t = 0,08$  с, при  $\beta = 0$  время схлопывания каверны приблизительно равно  $t \approx 0,15$  с. Уменьшение скорости (увеличение радиуса) цилиндра соответствует меньшим значениям числа Фруда. При  $Fr = 0,2$  характерную скорость движения цилиндра и его радиус можно выбрать следующим образом:  $v_0 = 0,2$  м/с,  $a \approx 0,1$  м. В этом случае время схлопывания приблизительно равно 0,02 с. При  $v_0 = 0,5$  м/с,  $a \approx 0,63$  м ( $Fr = 0,2$ ) время схлопывания равно 0,05 с. Заметим, что время схлопывания каверны увеличивается при уменьшении числа кавитации (при  $\chi < 0$  давление в каверне становится больше атмосферного).

Для подтверждения предположений, принятых при построении математической модели, рассмотрено ее обобщение на случай горизонтального удара цилиндра, погруженного в жидкость наполовину. Поскольку зона отрыва, образующаяся позади цилиндра, плавно переходит во внешнюю свободную границу жидкости, давление в ней равно атмосферному давлению  $p_a$ . При этом в зоне контакта давление не может быть меньше значения  $p_a$ . В математической постановке задача, записанная в безразмерных переменных, в подвижной системе координат, связанной с цилиндром ( $X = x + h(t)$ ,  $Y = y$ ), имеет вид (1.1)–(1.4), где граничная функция  $\dot{h}(t)n_y$  заменена на  $\dot{h}(t)n_x$  ( $\dot{h}(t) = 1$ ), а функция  $G(\Phi)$  определяется по формуле

$$G(\Phi) = -\Phi + \Phi_0 - Fr^{-2}ty.$$

Полученные результаты численных расчетов сравниваются с результатами асимптотического анализа исходной нелинейной задачи на малых временах [2]. При этом используется формула для определения начальной скорости движения точки отрыва [2. С. 249]. При  $Fr = 0,5$  получаем  $\theta(0) = -1,97$  (–1,97);  $\theta(0,1) = -2,42$  (–2,45);  $\theta(0,15) = -2,62$  (–2,69);  $\theta(0,2) = -2,76$  (–2,93);  $\theta(0,25) = -2,85$  (–3,17). (Как и выше, в скобках приведены результаты, полученные по формуле (2.1).) Таким образом, на начальном этапе движения цилиндра ( $0 < t < 0,2$ ) наблюдается хорошее согласование результатов, полученных с помощью двух различных подходов. Поскольку в общем случае угловая координата точки отрыва  $\theta(t)$  зависит от времени нелинейным образом, к моменту схлопывания тонкой каверны погрешность увеличивается. При  $t = 0,3$  зона отрыва практически не видна.

**Заключение.** В работе предложена математическая модель, позволяющая исследовать динамику зоны отрыва, образовавшейся в результате отрывного удара тела в жидкости. Модель основана на решении задачи в линеаризованной постановке, соответствующей малым скоростям движения тела и жидкости. Рассмотрены примеры, характеризующие динамику точек отрыва при вынужденных или свободных движениях цилиндра. Проведено сравнение результатов численных расчетов, полученных с использованием предложенной математической модели или асимптотической теории, и показано, что они хорошо согласуются при малых значениях числа Фруда ( $Fr = 0,2 \div 0,5$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
2. **Norkin M., Korobkin A.** The motion of the free-surface separation point during the initial stage of horizontal impulsive displacement of a floating circular cylinder // J. Engng Math. 2011. V. 70. P. 239–254.
3. **Норкин М. В.** Движение кругового цилиндра в жидкости после удара на малых временах с образованием каверны // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2012. № 3. С. 101–112.

4. **Норкин М. В.** Образование каверны при наклонном отрывном ударе кругового цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т. 19, № 4. С. 81–92.
5. **Веклич Н. А.** Осесимметричные задачи об ударе упругого диска о жидкость // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1992. № 5. С. 175–184.
6. **Веклич Н. А., Малышев Б. М.** Колебания упругой пластины в жидком объеме прямоугольной формы // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 4. С. 155–163.
7. **Кубенко В. Д.** Ударное взаимодействие тел со средой (обзор) // Прикл. механика. 1997. Т. 30, № 12. С. 3–29.
8. **Коробкин А. А.** Соударение жидких и твердых масс. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1997.
9. **Korobkin A.** A linearized model of water exit // J. Fluid Mech. 2013. V. 737. P. 368–386.
10. **Юдович В. И.** Однозначная разрешимость задачи об ударе с отрывом твердого тела о неоднородную жидкость // Владикавк. мат. журн. 2005. Т. 7, № 3. С. 79–91.
11. **Жуков М. Ю.** Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии / М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева. Ростов н/Д: Изд-во Юж. федер. ун-та, 2008.
12. **Александров В. М.** Аналитические методы в контактных задачах теории упругости / В. М. Александров, М. И. Чебаков. М.: Физматлит, 2004.

*Поступила в редакцию 8/XI 2018 г.,  
после доработки — 18/III 2019 г.  
Принята к публикации 25/III 2019 г.*

---