

ВЛИЯНИЕ ПЕРЕДАЧИ ТЕПЛА ИЗЛУЧЕНИЕМ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ ГОРЕНИЯ ПО МОДЕЛЬНОЙ ГЕТЕРОГЕННОЙ СИСТЕМЕ

И. А. Филимонов

Институт структурной макрокинетики РАН, 142432 Черногловка

Исследовано поведение интегральных кривых задачи о распространении волны горения по модельной гетерогенной системе. Рассмотрено влияние теплопередачи излучением на установившиеся режимы горения. Показано, что при достаточно больших зазорах между пластинами в системе (когда еще существует квазигомогенное распределение температуры) в режиме слабого торможения слоем нарастающего продукта излучение может приводить к заметному ускорению волны горения. В режиме сильного торможения при прочих равных условиях излучением можно пренебречь.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] предложена модельная система для исследования процесса распространения волны горения по гетерогенной системе. Она представляет собой большой набор тонких реакционноспособных пластин толщиной d , расположенных на одинаковом расстоянии δ друг от друга в среде газообразного окислителя или инерта. Объектом исследования в [1] выбрана система ниобий — азот. В зависимости от значения характерного масштаба гетерогенности $d + \delta$ экспериментально обнаружены и описаны два предельных режима распространения волны горения в такой системе: гетерогенный и квазигомогенный. В первом случае каждая пластина ведет себя индивидуально: воспламеняется и сгорает еще до того, как начинают прогреваться следующие за ней. Существует четко выраженный индукционный период воспламенения пластины. В квазигомогенном режиме нагревом одновременно охвачено достаточно много пластин и индукционная картина воспламенения отсутствует. Для теоретического исследования модели [1] в работе [2] предложена система уравнений, описывающих тепловой баланс и реакцию на отдельной произвольной взятой пластине:

$$c\rho V \frac{dT_n}{dt} = QV \frac{d\eta}{dt} + q_1 + q_2, \quad (1)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \Phi(T, \eta), \quad (2)$$

$$q_1 = \alpha S(T_{n-1} - T_n) - \alpha S(T_n - T_{n+1}),$$

$$q_2 = \varepsilon \sigma S(T_{n-1}^4 - T_n^4) - \varepsilon \sigma S(T_n^4 - T_{n+1}^4),$$

где V — объем отдельной пластины; c — теплоемкость; T_n — температура n -й пластины; t — время; η — глубина превращения реагентов; Q — тепловой эффект реакции, рассчитанный на единицу объема; S — поверхность пластины; q_1, q_2 — тепловые потоки к пластине, вызванные соответственно кондуктивным и лучистым теплообменами; α — коэффициент теплопередачи; ε — излучательная способность; σ — постоянная Стефана — Больцмана; Φ — скорость химической реакции на единицу объема. При этом использовали предположения:

- 1) о безгазовом режиме горения пластин и отсутствии в них деформаций,
- 2) об однородности температуры внутри пластин (тонкие пластины),
- 3) о пренебрежимо малых теплопотерях в окружающую среду (адиабатический режим),
- 4) о квазистационарности кондуктивной теплопередачи по газу и отсутствии конвекции.
- 5) о постоянстве теплофизических свойств всех составляющих системы.

В установившемся режиме распространения пламени поведение трех соседних пластин ($n-1, n$ и $n+1$) можно охарактеризовать одной функцией температуры, если ввести в рассмотрение сдвиг во времени t_c :

$$T_{n-1}(t) = T_n(t + t_c) \equiv T(t + t_c),$$

$$T_n(t) \equiv T(t),$$

$$T_{n+1}(t) = T_n(t - t_c) \equiv T(t - t_c).$$

Тогда систему уравнений (1), (2), описывающую гетерогенную химическую реакцию на отдельной пластине в установившемся режиме

распространения волны горения, можно представить в виде (см. [2])

$$c\rho V \frac{dT}{dt} = QV \frac{d\eta}{dt} + \alpha S [T(t+t_c) + T(t-t_c) - 2T(t)] + \varepsilon \sigma S [T^4(t+t_c) + T^4(t-t_c) - 2T^4(t)], \quad (3)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \Phi(T, \eta). \quad (4)$$

В отличие от классической постановки задачи о распространении пламени [3, 4], в которой граничные условия выбирают инвариантными к сдвигу в пространстве, формулировка системы (3), (4) подразумевает наличие «граничных» условий, инвариантных к сдвигу во времени:

$$t = -\infty, \quad T = T_0, \quad \eta = 0 \quad \left(\frac{dT}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = 0 \right), \quad (5)$$

$$t = +\infty, \quad T = T_b, \quad \eta = 1 \quad \left(\frac{dT}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = 0 \right). \quad (6)$$

Здесь и далее индексом нуль обозначены начальные значения величин, индексом b — величины после завершения реакции.

Цель настоящей работы заключается в исследовании поведения решений системы (3)–(6) и, в частности, в изучении влияния на них теплообмена излучением в режимах, близких к квазигомогенному.

ПОВЕДЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ ЗАДАЧИ

Для исследования задачи (3)–(6) введем безразмерные параметры

$$\Theta = c\rho \frac{T}{Q}, \quad \tau = \frac{t}{t^*}, \quad \tau_c = \frac{t_c}{t^*}, \quad \varphi = \frac{\Phi(T, \eta)}{\Phi(T^*, \eta^*)},$$

$$\Theta_0 = c\rho \frac{T_0}{Q}, \quad \Theta_b = c\rho \frac{T_b}{Q}, \quad (7)$$

$$A = \frac{\varepsilon \sigma}{(\rho c)^4} \frac{S}{V} Q^3 t^{*4}, \quad B = \frac{\alpha}{\rho c} \frac{S}{V} t^*,$$

где ρ — плотность вещества пластины, $t^* = 1/\Phi(T^*, \eta^*)$ — характерное время гетерогенной реакции на пластине; A и B — отношения характерного времени реакции к характерному времени теплопередачи излучением и кондуктивной теплопроводностью соответственно; звездочкой (сверху или снизу) здесь и далее отмечены величины при максимальной скорости реакции, определяющей скорость распространения волны. Тогда систему (3)–(6) можно преобразовать к виду

$$\frac{d\Theta}{d\tau} = \varphi(\Theta, \eta) + B[\Theta(\tau + \tau_c) + \Theta(\tau - \tau_c) - 2\Theta(\tau)] +$$

$$+ A[\Theta^4(\tau + \tau_c) + \Theta^4(\tau - \tau_c) - 2\Theta^4(\tau)], \quad (8)$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \varphi(\Theta, \eta), \quad (9)$$

$$\tau = -\infty, \quad \Theta = \Theta_0, \quad \eta = 0 \quad \left(\frac{d\Theta}{d\tau} = \frac{d\eta}{d\tau} = 0 \right), \quad (10)$$

$$t = +\infty, \quad \Theta = \Theta_b, \quad \eta = 1 \quad \left(\frac{d\Theta}{d\tau} = \frac{d\eta}{d\tau} = 0 \right). \quad (11)$$

Рассмотрим случай, когда за время порядка характерного времени реакции ($\tau \approx 1$) волна горения заведомо успевает переместиться от одной пластины к другой, т. е.

$$\tau_c < \tau \approx 1. \quad (12)$$

В пределе бесконечно малых сдвигов по времени ($\tau_c \rightarrow 0$) этот случай соответствует распространению волны горения по гомогенной среде. При противоположном знаке неравенство (12) в пределе ($\tau_c \rightarrow \infty$) отвечает последовательному сгоранию уединенных в тепловом отношении пластин системы [2].

Полагая справедливым неравенство (12) и считая величину τ_c достаточно малой, разложим функции $\Theta(\tau + \tau_c)$, $\Theta^4(\tau + \tau_c)$ в соответствующие ряды Тейлора и преобразуем уравнение (8):

$$\frac{d\Theta}{d\tau} = \varphi(\Theta, \eta) + B\tau_c^2 \frac{d^2\Theta}{d\tau^2} + 4A\tau_c^2 \frac{d}{d\tau} \left(\Theta^3 \frac{d\Theta}{d\tau} \right) + O(\tau_c^2). \quad (13)$$

Используя соотношение (9) и граничное условие (10), проинтегрируем уравнение (13) от $-\infty$ до τ и получим первый интеграл системы (8)–(11):

$$\Theta - \Theta_0 = \eta + \tau_c^2 [B + 4A\Theta^3] \frac{d\Theta}{d\tau} + O(\tau_c^2). \quad (14)$$

Из (14) выразим производную $d\Theta/d\tau$ и разделим на нее уравнение для глубины превращения (9). В итоге приходим к следующему уравнению, решения которого определяют поведение интегральных кривых исходной задачи (3)–(6):

$$\frac{d\eta}{d\Theta} = \tau_c^2 [B + 4A\Theta^3] \frac{\varphi(\Theta, \eta)}{\Theta - \Theta_0 - \eta} + O(\tau_c^2). \quad (15)$$

Из (10), (11) получим граничные условия для (15):

$$\eta = 0, \quad \Theta = \Theta_0, \quad (16)$$

$$\eta = \Theta_b - \Theta_0, \quad \Theta = \Theta_b = 1 + \Theta_0. \quad (17)$$

Отметим, что в частном случае $A \equiv 0$, когда механизм теплопередачи между пластинами обусловлен исключительно теплопроводностью газа, система (15)–(17) с учетом переобозначений тождественно сводится к системе, полученной в [5] для интегральных кривых задачи о стационарном распространении фронта химической реакции в однородной конденсированной среде. Соответственно в этом случае все рассуждения авторов [5] можно в точности повторить для задачи (15)–(17). Обнаруженный факт не кажется удивительным, если вспомнить работу [6], в которой инвариантность волновых решений трактуется наиболее общим образом — как инвариантность к сдвигу в пространстве и к соответствующему ему сдвигу во времени.

Исследуя задачу (15)–(17) в общем случае, будем рассуждать аналогично [5], отмечая, где это необходимо, особенности, вызванные учетом излучения.

Как показывает исследование (см. приложение), для функции φ , непрерывно дифференцируемой и строго положительной в области

$$0 < \eta \leq \Theta - \Theta_0, \quad \Theta_0 + \Delta < \Theta, \quad (18)$$

решение системы (15)–(17) существует и единственно. Соответственно существует однозначная, монотонно возрастающая функция $1/\tau_c(\Theta_b)$. Перейдем к вопросу об ее ограниченности. В [5] показано, что если φ не только непрерывно дифференцируема, строго положительна, но и ограничена в области (18):

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv 0 \quad \text{при} \quad \Theta_0 \leq \Theta \leq \Theta_0 + \Delta, \\ m' < \varphi < M' \quad \text{при} \quad \Theta_0 + \Delta \leq \Theta, \quad \eta > 0, \end{aligned} \quad (19)$$

то функция $1/\tau_c(\Theta_b)$ также ограничена ($A \equiv 0$). Это значит, что все интегральные кривые, выходящие из точки M_0 и соответствующие различным τ_c , распадаются на два семейства. К первому из них относятся кривые, пересекающие прямую $\eta = \Theta - \Theta_0$ в некоторой конечной точке $M(\Theta_b, \Theta_b - \Theta_0)$, а ко второму — интегральные кривые, нигде не пересекающиеся с ней. Ниже величины, относящиеся к границе между семействами интегральных кривых, обозначены индексом ∞ . Поведение различных семейств интегральных кривых задачи (15)–(17) в отсутствие теплопередачи излучением иллюстрирует рис. 1 на примере функции

$$\varphi = \exp \left[-\overset{\circ}{E} \left(\frac{1}{\Theta} - \frac{1}{\Theta^*} \right) \right] \exp [-m(\eta - \eta^*)], \quad (20)$$

$$\overset{\circ}{E} = E c \rho / R Q,$$

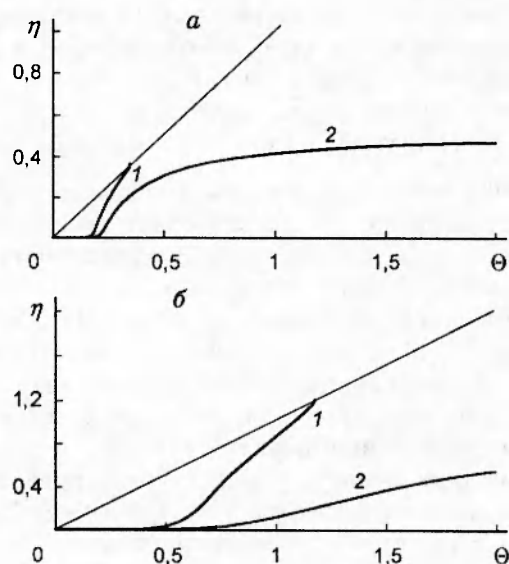


Рис. 1. Семейства интегральных кривых задачи (15)–(17) в отсутствие переноса тепла излучением:

$A = 0, B = 1, \overset{\circ}{E} = 5, \Theta_0 = 0,001, \Delta = 0,002$; а — $m = 50, \tau_c (\approx \tau_{c,\infty}) = 0,104$ (1), $\tau_c = 0,01$ (2); б — $m = 6, \tau_c (\approx \tau_{c,\infty}) = 0,322$ (1), $\tau_c = 0,04463$ (2)

отвечающей кинетике реакционной диффузии с экспоненциальным торможением через слой нарастающего продукта. Подобные кинетические зависимости наблюдаются при СВС-синтезе боридов переходных металлов [7–9]. В соответствии с оценками, которые можно сделать, воспользовавшись достаточно большим набором экспериментальных данных [7–9], введенная здесь безразмерная энергия активации $\overset{\circ}{E}$ может меняться в достаточно широких пределах в зависимости от плотности, состава исходной смеси и наличия инертной добавки: от $\overset{\circ}{E} = 3,7 \div 5,4$ для смеси $Zr + 2B$, до $\overset{\circ}{E} = 10,9 \div 15,3$ для смеси $Ta + B$. Параметр торможения m для разных систем также принимает различные значения (см. [7–9]): от $m = 10$ для $Zr + 2B$ до $m = 23$ и 24 для $Nb + B$ и $Ta + B$ соответственно. Поскольку основная цель этой работы — исследование вкладов излучательной и кондуктивной теплопередач в скорость и температуру волны горения при различных режимах распространения в модельной гетерогенной системе, здесь и далее в расчетах параметр $\overset{\circ}{E}$ полагался постоянным ($\overset{\circ}{E} = 5$), а параметры m, B и A менялись в разумных пределах.

Очевидно, что функция (20) непрерывно дифференцируема, строго положительна и удовлетворяет условиям (19). Интегральная кривая, соответствующая значению $\tau_c = \tau_{c,\infty}$, где $\tau_{c,\infty} = \lim_{\Theta_b \rightarrow \infty} \tau_c(\Theta_b)$, является границей, разделяющей эти два семейства. Последнее обстоятельство авторы [5] использовали для приближенного определения $\tau_{c,\infty}$. В зависимости от параметра торможения граница между семействами может проходить через различные значения Θ^* , η^* . Для дальнейшего удобно условно разделить случаи слабого торможения слоем нарастающего продукта, когда максимум химической реакции достигается при достаточно больших температуре и глубине превращения исходного вещества ($\Theta^* \lesssim 1$, $\eta^* \lesssim 1$, см. рис. 1, б), и случаи сильного торможения, когда температура и глубина превращения в максимуме относительно невелики ($\Theta^* \ll 1$, $\eta^* \ll 1$, см. рис. 1, а).

В общем случае (при $A \neq 0$) в качестве φ необходимо рассматривать функцию

$$\tilde{\varphi} = [B + 4A\Theta^3]\varphi, \quad (21)$$

которая, вообще говоря, не является ограниченной в области (18). Однако для доказательства ограниченности функции $1/\tau_c(\Theta_b)$ совсем не обязательно требовать ограниченности функции $\tilde{\varphi}$ во всей области (18). Это условие является достаточным, но не необходимым. Как можно показать, для ограниченности функции $1/\tau_c(\Theta_b)$ необходимым условием является ограниченность $\tilde{\varphi}$ в некоторой полуполосе, содержащей прямую $\eta = \Theta - \Theta_0$, т. е. при

$$\Theta_0 + \Delta < \Theta, \quad \eta + \Theta_0 \leq \Theta < \eta + \Theta_0 + D, \quad (22)$$

$$D \equiv \text{const}.$$

Действительно, рассмотрим такую $\tilde{\varphi}$, в которой функция скорости химической реакции имеет вид (20). В этом случае ограниченность $\tilde{\varphi}$ в полуполосе (22) очевидна:

$$0 \leq \tilde{\varphi} < M' = \tilde{\varphi}(\Theta^*, \eta^*).$$

Тогда при всех значениях функции $1/\tau_c(\Theta_b)$, таких, что выполняется неравенство $1/\tau_c > \sqrt{M'/D}$, интегральные кривые, выходящие из точки $M_0(\Theta_0 + \Delta, 0)$, не могут пересечь полуполосу (22), поскольку в точке пересечения должно быть $d\eta/d\Theta > 1$, а это невозможно при выбранных значениях $1/\tau_c$ (см. (15)). Следовательно, интегральные кривые, соответствующие указанным значениям параметра $1/\tau_c$, не являются решениями задачи (15)–(17) ни при каком значении Θ_b . Последнее означает, что

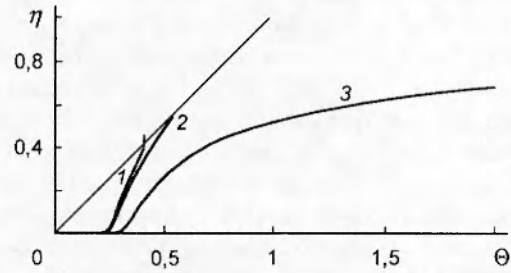


Рис. 2. Поведение интегральных кривых задачи (15)–(17) в отсутствие кондуктивного переноса тепла:

$B = 0, \dot{E} = 5, m = 30, \tau_c = 0,75, \Theta_0 = 0,001, \Delta = 0,002;$
 $A = 0,2$ (1), $0,095$ (2), $0,001$ (3)

функция $1/\tau_c(\Theta_b)$ ограничена сверху и существует предел

$$\lim_{\Theta_b \rightarrow \infty} \tau_c(\Theta_b) = \tau_{c,\infty}.$$

Численный расчет подтверждает доказательство поведения интегральных кривых задачи (15)–(17) в общем случае. На рис. 2 интегральные кривые показаны в зависимости от параметра A при отсутствии кондуктивной теплопередачи ($B = 0$). Интенсификация теплопередачи излучением (рост A) приводит к увеличению скорости распространения волны горения по гетерогенной системе (время $\tau_{c,\infty}$ уменьшается) и наоборот. Скорость волны не может превышать некоторого предела, определяемого интенсивностью излучательной теплопередачи ($\tau_{c,\infty} > 0,75$ при $A = 0,001$ и $\tau_{c,\infty} \approx 0,75$ при $A = 0,095$, см. кривые 2, 3 на рис. 2).

Необходимо заметить, что в зависимости от отношения расстояния между пластинами к их толщине соотношение между безразмерными параметрами A и B может быть совершенно различным. Для оценки значений A и B в соответствии с данными [7–9] о структуре волны горения в смеси $Zr + 2B$, разбавленной конечным продуктом, примем

$$\lambda_s = 4,06 \div 8,37 \text{ Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}),$$

$$\rho c = 1,93 \cdot 10^6 \div 2,81 \cdot 10^6 \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}),$$

$$t^* = 3,8 \cdot 10^{-2} \text{ с}, T_b = 1873 \div 2543 \text{ К}$$

(здесь λ_s — теплопроводность материала пластины). Излучательную способность, которая незначительно меняется для различных соединений переходных металлов [10, 11] и Zr [12], будем рассматривать в диапазоне $\varepsilon = 0,2 \div 0,8$. Считая далее геометрические размеры в системе такими же, как в экспериментах [1] ($\delta = 0 \div 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}, L = 5 \cdot 10^{-3} \div 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ м},$

$d = 2 \cdot 10^{-4} \div 2 \cdot 10^{-3}$ м), получим

$$A = 5,03 \cdot 10^{-4} \div 8,22 \cdot 10^{-2}. \quad (23)$$

В соответствии с выражением (7) значение параметра A сильно зависит от теплового эффекта реакции (температуры горения) и толщины пластин. Чем больше тепловой эффект реакции и тоньше пластины, тем меньше характерное время теплопередачи излучением и больше A .

Для правильной оценки отношения B (см. (7)) надо понимать, что в рассматриваемой задаче под коэффициентом теплоотвода α подразумевается некоторая эффективная величина, соответствующая эффективному коэффициенту теплопроводности в модельной системе, т. е. (см. [13, 14])

$$B = \frac{\alpha S}{\rho c V} t^* = \frac{\lambda_{ef} \langle Nu \rangle S}{\rho c 2L V} t^*, \quad (24)$$

где $\lambda_{ef} = \langle 1/\lambda \rangle^{-1} = (1 + \delta/d)[(\delta/d)/\lambda_g + 1/\lambda_s]^{-1}$; δ — расстояние между пластинами; d — толщина пластины; λ_g — теплопроводность газа; L — длина пластины; угловыми скобками отмечены средние значения величин. Согласно (24) эффективная теплопроводность системы с ростом δ/d монотонно падает от достаточно больших значений, соответствующих теплопроводности пластин:

$$\lambda_{ef} \approx \lambda_s \text{ при } \delta/d \ll \lambda_g/\lambda_s, \quad (25)$$

до существенно меньших значений, соответствующих теплопроводности газа в зазорах между пластинами:

$$\lambda_{ef} \approx \lambda_g \text{ при } \delta/d \gg 1 \gg \lambda_g/\lambda_s. \quad (26)$$

В промежуточном диапазоне отношений

$$\lambda_{ef} = \left(1 + \frac{\delta}{d}\right) \left(\frac{\delta}{d}\right)^{-1} \lambda_g \text{ при } 1 \gtrsim \frac{\delta}{d} \gg \frac{\lambda_g}{\lambda_s}. \quad (27)$$

Рассматривая в качестве инертной газовой среды воздух при атмосферном давлении и считая, что обтекание пластин газом происходит в ламинарном режиме ($\langle Re \rangle = 1 \div 10$, т. е. (см. [14]) $\langle Nu \rangle = 1,51 \div 4,76$), находим

$$B = 1,38 \cdot 10^{-1} \div 20,65 \text{ при } \frac{\delta}{d} \ll 3,06 \cdot 10^{-3},$$

$$B = 8,68 \cdot 10^{-5} \div 6,32 \cdot 10^{-2}$$

$$\text{при } 1 \gtrsim \frac{\delta}{d} \gg 6,31 \cdot 10^{-3}, \quad (28)$$

$$B = 8,68 \cdot 10^{-6} \div 6,32 \cdot 10^{-4} \text{ при } \frac{\delta}{d} \gg 1.$$

Сравнение оценок (23) и (28) показывает, что, изменяя зазор между пластинами и/или

толщину пластин, можно на практике легко менять соотношение между характерными временами теплоотвода в модельной системе. Для относительно малых зазоров характерное время кондуктивного теплоотвода оказывается значительно меньше характерного времени теплоотвода излучением ($A \ll B$ при $\delta/d \ll 3,06 \cdot 10^{-3}$) и наоборот ($A \gg B$ при $\delta/d \gg 1$). В промежуточном диапазоне зазоров соотношение между этими величинами может меняться.

Если передача тепла в системе осуществляется как излучением, так и кондуктивной теплопроводностью (случай (27), см. оценки (23), (28)), эффект излучения во многом определяется режимом гетерогенной волны. В режиме слабого торможения слоем нарастающего продукта достаточно интенсивный теплоперенос излучением может приводить к заметному ускорению волны горения (почти в три раза при увеличении A от 0,01 до 0,3, см. рис. 3, а). В режиме сильного торможения, когда температура фронта относительно невелика, при тех же параметрах теплопередачи влияние излучения на скорость значительно слабее (скорость увеличивается только на $\approx 28\%$ при таком же

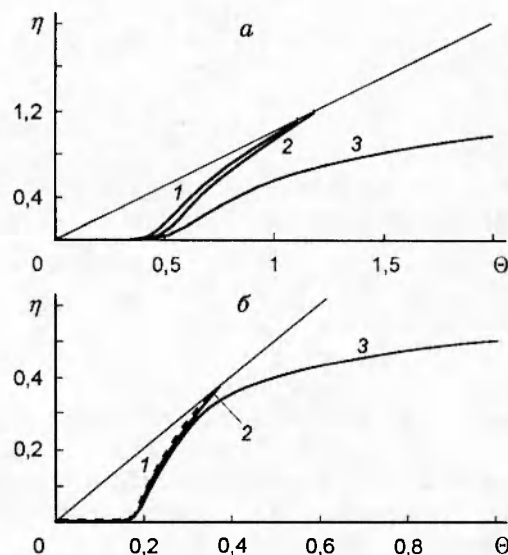


Рис. 3. Влияние переноса тепла излучением на высокотемпературный (а) и низкотемпературный (б) режимы горения:

$B = 0,06$, $E = 5$, $\Theta_0 = 0,001$, $\Delta = 0,002$; а — $m = 10$; 1 — $A = 0,3$, $\tau_c (\approx \tau_{c,\infty}) = 0,294$; 2 — $A = 0,01$, $\tau_c (\approx \tau_{c,\infty}) = 0,8639$; 3 — $A = 0,01$, $\tau_c = 0,294$; б — $m = 50$; 1 — $A = 0,01$, $\tau_c (\approx \tau_{c,\infty}) = 0,41$; 2 — $A = 0,3$, $\tau_c (\approx \tau_{c,\infty}) = 0,32$; 3 — $A = 0,01$, $\tau_c = 0,32$

увеличении A , см. рис. 3, б). Здесь, однако, следует заметить, что в отличие от скорости гетерогенной волны излучение практически не влияет на температуру ее фронта в исследованной области параметров системы (см. рис. 3).

ОБСУЖДЕНИЕ

Более сильное влияние теплопереноса излучением на скорость волны горения в режиме слабого торможения слоем нарастающего продукта достаточно просто объясняется увеличением эффективной температуропроводности среды под действием излучения. Действительно, в данном случае эффективная температуропроводность среды является существенно нелинейной функцией температуры. Поэтому одинаковое изменение интенсивности излучения совершенно по-разному влияет на скорость волны горения в зависимости от температуры ее фронта (зоны интенсивного тепловыделения, см. [5]): чем меньше температура фронта волны горения, тем меньше эффект излучения. Чтобы пояснить сказанное, вычислим приближенно скорость волны горения в рассматриваемой системе. Для этого вместо истинной функции $\bar{\varphi}$ используем ее линеаризацию ($\bar{\varphi}_l$):

$$\ln \bar{\varphi} \approx \ln \bar{\varphi}_l = \ln \bar{\varphi}^* + \left(\frac{\partial \ln \bar{\varphi}}{\partial \Theta} \right)_* (\Theta - \Theta^*) + \left(\frac{\partial \ln \bar{\varphi}}{\partial \eta} \right)_* (\eta - \eta^*),$$

где Θ^* , η^* — значения, соответствующие максимуму скорости $\bar{\varphi}$ в адиабатических условиях, т. е.

$$\left(\frac{\partial \ln \bar{\varphi}}{\partial \Theta} \right)_* = - \left(\frac{\partial \ln \bar{\varphi}}{\partial \eta} \right)_*, \quad \eta^* = \Theta^* - \Theta_0, \quad (29)$$

или

$$\bar{\varphi} \approx \bar{\varphi}^* \exp \left\{ \left(\frac{\partial \ln \bar{\varphi}}{\partial \Theta} \right)_* (\Theta - \Theta_0 - \eta) \right\}. \quad (30)$$

Заменяя источник в уравнении (15) его приближенным значением (30), после введения новой безразмерной переменной z имеем

$$\left(\frac{\partial \ln \bar{\varphi}}{\partial \Theta} \right)_*^{-1} \frac{dz}{d\Theta} = 1 - \frac{\exp z}{\omega^2 z}, \quad (31)$$

$$z = \left(\frac{\partial \ln \bar{\varphi}}{\partial \Theta} \right)_* (\Theta - \Theta_0 - \eta), \quad \omega^{-2} = \bar{\varphi}^* \tau_c^2 \left(\frac{\partial \ln \bar{\varphi}}{\partial \Theta} \right)_*. \quad (32)$$

Вид уравнения (31) тот же, что и у уравнения, описывающего тепловой взрыв (см. [15]).

Для последнего, как известно, существует критическое значение параметра $\omega = \omega_\infty = \sqrt{e}$, разделяющее два режима протекания процесса. В данном случае ω_∞ разделяет два семейства интегральных кривых уравнения (31) и по смыслу соответствует величине $1/\tau_{c,\infty}$ в уравнении (15). Интегральные кривые, выходящие из точки $M_0(\Theta_0 + \Delta, 0)$, для которых справедливо соотношение $1/\tau_c > 1/\tau_{c,\infty}$, не удовлетворяют второму граничному условию (17) и поэтому не являются решением задачи (15)–(17). Подставляя найденное значение ω_∞ в выражение (32), окончательно получим

$$\left(\frac{1}{\tau_{c,\infty}} \right)^2 = \bar{\varphi}^* \exp \left(\frac{\partial \ln \bar{\varphi}}{\partial \Theta} \right)_*. \quad (33)$$

Из условий (29) в случае кинетики реакционной диффузии с экспоненциальным торможением (20) имеем следующее уравнение для температуры фронта (максимума скорости химической реакции):

$$\frac{12A(\Theta^*)^2}{B + 4A(\Theta^*)^3} + \frac{\overset{\circ}{E}}{(\Theta^*)^2} = m. \quad (34)$$

При достаточно интенсивном теплопереносе излучением, когда влияние кондуктивной теплопередачи пренебрежимо мало, уравнение (34) сводится к квадратному, единственным (имеющим смысл) решением которого является корень

$$\Theta^* = \frac{3}{2m} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\overset{\circ}{E}}{9} m} \right] \text{ при } B \ll 4A(\Theta^*)^3. \quad (35)$$

Как следует из выражения (35), температура фронта волны горения в этом случае действительно не зависит от интенсивности теплопередачи (от A), что и было обнаружено в численном расчете (см. рис. 3).

В соответствии с выражениями (33), (35) можно определить искомую величину

$$1/\tau_{c,\infty} = \{ [B + 4A(\Theta^*)^3] e m \}^{1/2}. \quad (36)$$

Формула (36) является более общей по сравнению с выражением (35), в принципе, она применима при любых соотношениях между B и A . Для рассматриваемой гетерогенной модели формула (36) позволяет связать скорость волны горения (ее максимальное значение) с теплофизическими и геометрическими характеристиками системы (толщиной пластин d и величиной зазора между ними δ):

$$v_\infty = (d + \delta)/\tau_{c,\infty} t^* =$$

$$= (d + \delta)\Phi_* \{ [B + 4A(\Theta^*)^3] \epsilon m \}^{1/2}. \quad (37)$$

Выражение (37) показывает, что скорость волны горения в модельной гетерогенной системе нелинейным образом связана с температурой фронта. Комплекс в прямых скобках соответствует эффективной теплопроводности гетерогенной среды в целом. Как легко видеть, обнаруженный эффект можно объяснить зависимостью этой величины от температуры фронта. Действительно, чем ближе температура фронта волны горения к своему максимальному значению в адиабатических условиях и соответственно чем больше глубина превращения во фронте, тем сильнее влияние излучения на скорость волны (ср. рис. 3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, теплопередача излучением влияет на установившиеся режимы горения модельной гетерогенной системы при достаточных зазорах между пластинами в режиме слабого торможения слоем нарастающего продукта и приводит к заметному ускорению волны горения. В режиме сильного торможения при прочих равных условиях излучением можно пренебречь.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-03-34256а).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим вопрос о существовании и единственности решения системы (15)–(17). Считая функцию φ непрерывно дифференцируемой и строго положительной в области (18), покажем, что интегральные кривые, выходящие из точки $M_0(\Theta_0 + \Delta, 0)$ на плоскости (Θ, η) и соответствующие разным значениям τ_c в области (18), не пересекаются. При помощи уравнения (15) находим, что

$$\frac{dp}{d\eta} = r(\eta) + pq(\eta), \quad (38)$$

где

$$p = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial (1/\tau_c)} \right)_\eta, \quad r(\eta) = \frac{2(\Theta - \Theta_0 - \eta)}{\varphi \tau_c [B + 4A\Theta^3]},$$

$$q(\eta) = \frac{1}{\varphi \tau_c^2 [B + 4A\Theta^3]} \left\{ 1 - \frac{\varphi'}{\varphi} (\Theta - \Theta_0 - \eta) - 12A\Theta^2 \frac{\Theta - \Theta_0 - \eta}{B + 4A\Theta^3} \right\}.$$

Интегрируя уравнение (38) в пределах от 0 до η и учитывая, что $p(0) = 0$, получим

$$p = \exp \left(\int_0^\eta q d\eta \right) \left\{ \int_0^\eta r(\eta) \exp \left(- \int_0^\eta q d\eta \right) d\eta \right\}. \quad (39)$$

Ввиду принятых ограничений на φ в рассматриваемой области будем иметь $r(\eta) \geq 0$. Следовательно, из выражения (39) находим, что

$$p = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial (1/\tau_c)} \right)_\eta > 0. \quad (40)$$

Отсюда вытекает, что интегральные кривые в области (18) не пересекаются. При увеличении параметра τ_c наклон интегральных кривых на заданном уровне величины η возрастает.

Докажем, что существует единственное значение параметра τ_c , при котором интегральная кривая, выходящая из точки $M_0(\Theta_0 + \Delta, 0)$, пересекает прямую $\eta = \Theta - \Theta_0$ в заданной точке $M(\Theta_b, \Theta_b - \Theta_0)$ (см. второе граничное условие (17)). Для этого достаточно показать, что вдоль направления $\eta = \Theta - \Theta_0$ существует отличная от нуля производная $d\eta/d(1/\tau_c)$. Чтобы вычислить нужную производную, введем переменную y :

$$\eta = \Theta - \Theta_0 + y \rightarrow \Theta = \Theta(\eta, \tau_c, y),$$

$$d\eta = dy + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_{\eta, \tau_c} dy + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial (1/\tau_c)} \right)_{\eta, y} d(1/\tau_c) + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right)_{y, \tau_c} d\eta,$$

т. е.

$$\left(\frac{d\eta}{d(1/\tau_c)} \right)_y = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial (1/\tau_c)} \right)_{\eta, y} / \left\{ 1 - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right)_{y, \tau_c} \right\}. \quad (41)$$

На интересующей нас прямой ($y = 0$) выполняется условие $(\partial \Theta / \partial \eta)_{y, \tau_c} = 0$ (см. уравнение (15)). Поэтому, учитывая неравенство (40), из (41) имеем

$$\left(\frac{d\eta}{d(1/\tau_c)} \right)_{\eta = \Theta - \Theta_0} = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial (1/\tau_c)} \right)_\eta > 0. \quad (42)$$

Неравенство (42) завершает доказательство существования однозначной функции $1/\tau_c(\Theta_b)$ и одновременно указывает, что эта функция монотонно возрастает с ростом Θ_b .

ЛИТЕРАТУРА

1. Вадченко С. Г., Мержанов А. Г. Гетерогенная модель распространения пламени // Докл. РАН. 1997. Т. 352, № 4. С. 487–489.

2. Мержанов А. Г. Распространение твердого пламени в модельной гетерогенной системе // Докл. РАН. 1997. Т. 353, № 4. С. 504–507.
3. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
4. Зельдович Я. Б. К теории распространения пламени // Журн. физ. химии. 1948. Т. 22. С. 27–48.
5. Алдушин А. П., Мартемьянова Т. М., Мержанов А. Г. и др. Распространение фронта экзотермической реакции в конденсированных смесях при взаимодействии компонент через слой тугоплавкого продукта // Физика горения и взрыва. 1972. Т. 8, № 2. С. 202–212.
6. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б. Промежуточные асимптотики в математической физике // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, вып. 2. С. 115–129.
7. Зенин А. А., Мержанов А. Г., Нерсисян Г. А. Исследование структуры тепловой волны в СВС-процессах // Физика горения и взрыва. 1981. Т. 17, № 1. С. 79–90.
8. Зенин А. А., Мержанов А. Г., Нерсисян Г. А. Структура тепловой волны в некоторых процессах СВС // Докл. АН СССР. 1980. Т. 250, № 4. С. 880–884.
9. Зенин А. А., Нерсисян Г. А. Структура зон волны самораспространяющегося синтеза боридов вблизи критических условий погасания // Хим. физика. 1982. № 3. С. 411–418.
10. Азатян Т. С., Мальцев В. М., Мержанов А. Г., Селезнев В. А. Исследование излучательной способности самораспространяющейся волны высокотемпературного синтеза // Физика горения и взрыва. 1978. Т. 14, № 6. С. 88–91.
11. Андреев В. А., Мальцев В. М., Селезнев В. А. Исследование горения смесей гафния и бора методом оптической пирометрии // Физика горения и взрыва. 1980. Т. 16, № 4. С. 18–23.
12. Григорьев Ю. М. Применение нитей накаливания для изучения кинетики высокотемпературного взаимодействия металлов с газами // Процессы горения в химической технологии и металлургии / Под ред. А. Г. Мержанова. Черноголовка, 1975. С. 199–216.
13. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. М.: Наука, 1970.
14. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
15. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1987. С. 302.

*Поступила в редакцию 28/II 1997 г.,
в окончательном варианте — 14/VII 1997 г.*
