

УДК 534.18

АКУСТИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРЕГРЕТОЙ ЖИДКОСТИ С ГАЗОВЫМИ ЗАРОДЫШАМИ

В. Ш. Шагапов*, М. Н. Галимзянов*,**, И. И. Вдовенко*,**

* Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра РАН, 450054 Уфа, Россия

** Башкирский государственный университет, 450076 Уфа, Россия
E-mails: Shagapov@rambler.ru, monk@anrb.ru, ilgiza2011@yandex.ru

Рассмотрено распространение слабых возмущений в перегретой водовоздушной пузырьковой среде, когда в пузырьках помимо водяного пара присутствует инертный газ (например, воздух), не участвующий в фазовых переходах. Построены карты зон устойчивости рассматриваемых систем в зависимости от степени перегрева жидкости. Проанализировано влияние начальной степени перегрева на эволюцию гармонических волн. Для неустойчивых систем изучена зависимость инкремента от радиуса пузырьков при увеличении степени перегрева воды.

Ключевые слова: перегретая жидкость, пузырьки, фазовый переход, гармонические волны, фазовая скорость, коэффициент затухания.

DOI: 10.15372/PMTF20190309

Введение. Задачи о распространении малых возмущений в жидкости с пузырьками исследуются в течение длительного времени [1–6]. Результаты исследований показывают, что при механическом и тепловом равновесии вследствие действия капиллярных сил на межфазной поверхности жидкость с распределенными по объему газовыми пузырьками всегда находится в перегретом состоянии: $T_0 > T_s(p_0)$ ($T_s(p)$ — равновесная температура, соответствующая значению давления p , когда поверхность между жидкостью и паром является плоской [7]). При состояниях, достаточно далеких от критического, можно принять, что давление пара в пузырьках p_v равно равновесному значению $p_s(T_0)$, когда поверхность раздела фаз является плоской [7]. Кроме того, как показано в [6], вследствие действия капиллярных сил существенно сужается область применения формулы Ландау [8] для равновесной скорости звука при малой объемной доле пара. В частности, равновесная скорость, вычисленная с использованием дисперсионного уравнения при учете капиллярных сил, формально становится чисто мнимым параметром. Это, в свою очередь, означает, что состояние, при котором пузырьковая паронасыщенная система находится в тепловом и механическом равновесии, может быть неустойчивым. Развитие такой неустойчивости происходит за счет расходования тепловой энергии на испарение жидкости на межфазной границе вследствие перегрева. В [6] получено критическое условие для радиуса пузырьков

Работа В. Ш. Шагапова и М. Н. Галимзянова выполнена в рамках государственного задания на 2019–2022 гг. (№ 0246-2019-0052), работа И. И. Вдовенко выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-41-020582-р-а).

© Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Вдовенко И. И., 2019

и их объемной доли в зависимости от вида и давления жидкости, при этом парожидкостная система находится в состоянии устойчивого равновесия. В [9] приведен обзор работ, в которых исследуется рост пузырьков пара в перегретой жидкости.

В настоящей работе рассматриваются распространение звука и развитие неустойчивости в перегретой жидкости, содержащей газы зародыши, в зависимости от степени ее перегрева $\Delta T_0 = T_0 - T_s(p_0)$. Следует отметить, что, в случае если в жидкости газы зародыши отсутствуют, состояние равновесия парогазожидкостной системы определяется тремя параметрами, например объемной долей пузырьков α_0 , их радиусом a_0 и давлением в жидкой фазе p_0 (в качестве последнего параметра можно также использовать температуру T_0). При наличии в системе газовых зародышей ее состояние определяется четырьмя параметрами (например, α_0, a_0, p_0, T_0).

1. Постановка задачи и основные уравнения. Пусть в жидкости с температурой T_0 , находящейся под действием давления p_0 , имеются сферические пузырьки радиусом a_0 , содержащие пар и не растворимый в жидкой фазе газ. Тогда при условии механического и теплового равновесия рассматриваемой системы жидкость — парогазовые пузырьки при состояниях, достаточно далеких от критического состояния, выполняются следующие условия [7]:

$$p_{g0} = p_{v0} + p_{a0} = p_0 + 2\sigma/a_0, \quad p_{v0} = p_s(T_0). \quad (1.1)$$

Здесь p_{i0} ($i = v, a$) — парциальные давления пара и газа в пузырьках; σ — коэффициент поверхностного натяжения воды; нижние индексы $i = l, v, a$ соответствуют параметрам жидкости, пара и газа, нижний индекс “0” — состоянию равновесия. Согласно второму уравнению в (1.1) полагается, что парциальное давление пара p_{v0} равно равновесному значению давления для температуры жидкости T_0 в случае плоской межфазной поверхности. Заметим, что это условие выполняется, если состояние жидкости достаточно далеко от критического.

Исследуем распространение малых возмущений в рассматриваемой системе в плоско-одномерном односкоростном приближении. Полагая, что жидкость является акустически сжимаемой, для возмущений давления p_l , скорости и радиуса пузырьков можно записать следующее линеаризованное уравнение:

$$\frac{1}{C_l^0} \frac{\partial p_l}{\partial t} + \rho_{l0}^0 \frac{\partial v}{\partial x} - 3\rho_{l0}^0 \frac{\alpha_0}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} = 0$$

(v — скорость среды; a — радиус пузырьков; C_l^0 — “замороженная” скорость звука в жидкости), которое следует из закона сохранения массы после некоторых упрощений в пренебрежении слагаемыми вида α_0 и $(\rho_{v0}^0 + \rho_{g0}^0)/\rho_{l0}^0$ (ρ_{i0}^0 — истинные плотности пара и газа) вследствие их малости по сравнению с единицей. Начальные объемная доля α_0 , радиус пузырьков a_0 и число пузырьков в единице объема пузырьковой смеси n_0 связаны соотношением

$$\alpha_0 = (4/3)\pi a_0^3 n_0.$$

Поскольку для рассматриваемой системы обычно верны неравенства $\alpha_0 \ll 1$ и $\rho_{l0}^0(1 - \alpha_0) \gg (\rho_{v0}^0 + \rho_{a0}^0)\alpha_0$, уравнение импульсов имеет вид

$$\rho_{l0}^0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p_l}{\partial x} = 0.$$

Будем полагать, что возмущения давления в жидкости p_l и пузырьках $p_g = p_v + p_a$ связаны уравнением Рэлея — Лэмба, которое после линеаризации с учетом капиллярных сил имеет вид

$$\rho_{l0}^0 a_0 \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 4 \frac{\rho_{l0}^0 \nu_l^{(\mu)}}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} = p_g - p_l + \frac{2\sigma}{a_0^2} a$$

($\nu_l^{(\mu)}$ — кинематическая вязкость жидкости).

Далее давление парогазовой смеси в пузырьках p_g будем считать однородным: $\partial p_g / \partial r = 0$ (условие гомобаричности [7]), парциальные плотности пара, газа и температуру — неоднородными: $\partial \rho'_v / \partial r \neq 0$, $\partial \rho'_a / \partial r \neq 0$, $\partial T'_g / \partial r \neq 0$ (штрих означает, что эти параметры зависят не только от x , t , но и от радиальной координаты, отсчитываемой от центра пузырька).

Для парогазовой смеси в пузырьках будем полагать, что выполняется закон Дальтона и уравнение Клапейрона — Менделеева имеет вид

$$p_g = \rho'_g B'_g T'_g, \quad B'_g = B_a + (B_v - B_a)k', \quad k' = k'_v = \rho'_v / \rho'_g, \quad \rho'_g = \rho'_v + \rho'_a, \quad (1.2)$$

где k' — массовая доля пара в пузырьках; B_i ($i = v, a$) — приведенная газовая постоянная.

Запишем уравнение сохранения массы пузырьков

$$\frac{\partial m_g}{\partial t} + v \frac{\partial m_g}{\partial x} = 4\pi a^2 j, \quad m_g = \int_0^a 4\pi r^2 \rho'_g dr, \quad (1.3)$$

где j — интенсивность испарения жидкости, отнесенная к единице площади поверхности пузырька.

Используя уравнение состояния (1.2) и второе выражение (1.3), после линеаризации получаем

$$\frac{1}{p_{g0}} \frac{\partial p_g}{\partial t} + \frac{3}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{3}{a_0^3} \int_0^a r^2 \left(\frac{B_v - B_a}{B_{g0}} \frac{\partial k'}{\partial t} + \frac{1}{T_0} \frac{\partial T'}{\partial t} \right) dr = \frac{3j}{\rho_{g0} a_0}, \quad (1.4)$$

$$B_{g0} = B_a + (B_v - B_a)k_0.$$

Для учета межфазного теплообмена запишем уравнение теплопроводности и диффузии внутри пузырька, а также уравнение теплопроводности в жидкости вокруг пузырька:

$$\rho_{g0}^0 c_g \frac{\partial T'_g}{\partial t} = \frac{\lambda_g}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_g r^2 \frac{\partial T'_g}{\partial r} \right) + \frac{\partial p_g}{\partial t}, \quad \frac{\partial k'}{\partial t} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial k'}{\partial r} \right) \quad (0 < r < a_0), \quad (1.5)$$

$$\rho_{l0}^0 c_l \frac{\partial T'_l}{\partial t} = \frac{\lambda_l}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T'_l}{\partial r} \right) \quad (a_0 < r < a_0 \alpha_{g0}^{-1/3}).$$

На поверхности раздела фаз ($r = a_0$) зададим граничные условия, следующие из условий баланса тепла и массы:

$$T'_g = T'_l = T_{(a)}, \quad k' = k_{(a)}, \quad \lambda_l \frac{\partial T'_l}{\partial r} - \lambda_g \frac{\partial T'_g}{\partial r} = jL, \quad j = \frac{D}{1 - k_0} \left(\frac{\partial k'}{\partial r} \right) \Big|_{r=a_0},$$

где L — удельная теплота парообразования воды; $T_{(a)}$, $k_{(a)}$ — возмущения температуры и концентрации пара на поверхности пузырька. Полагая, что на межфазной поверхности $r = a$ выполняются условия межфазного равновесия для пара и воды, имеем

$$p_g = \rho_{g(a)}^0 (B_a + (B_v - B_a)k_{(a)})T_{(a)}, \quad p_{v(a)} = p_s(T_{(a)}) = \rho_{g(a)}^0 B_a k_{(a)} T_{(a)} \quad (1.6)$$

($p_{v(a)}$ — парциальное давление на поверхности пузырька). Из (1.6) следует

$$\frac{p_s(T_{(a)})}{p_g} = \frac{B_v k_{(a)}}{B_a + (B_v - B_a)k_{(a)}}. \quad (1.7)$$

Кроме того, на поверхности раздела фаз для системы пар — вода должно выполняться условие Клапейрона — Клаузиуса

$$\frac{dp_{v(a)}}{dT_{(a)}} = \frac{\rho_{g(a)}^0 k_{(a)} L}{T_{(a)}}. \quad (1.8)$$

Проведем линеаризацию уравнения (1.7). Для этого параметры $T_{(a)}$ и $k_{(a)}$ представим в виде $T_{(a)} = T_0 + T'_{(a)}$, $k_{(a)} = k_0 + k'_{(a)}$, причем $|T'_{(a)}| \ll T_0$, $|k'_{(a)}| \ll k_0$. Тогда из уравнения (1.7) с учетом (1.8), исключая верхние штрихи, получаем

$$\frac{\rho_{g0}^0 L}{p_{g0}} \frac{T_{(a)}}{T_0} - \frac{B_v}{B_{g0}} \frac{p_g}{p_{g0}} = \frac{B_v B_a}{B_{g0}^2} \frac{k_{(a)}}{k_0}. \quad (1.9)$$

Кроме того, для поля температур и концентрации пара должны выполняться граничные условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial k'}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T'_g}{\partial r} = 0 \quad (r = 0), \\ T'_l = 0 \quad (r = \infty) \quad \text{или} \quad \frac{\partial T'_l}{\partial r} = 0 \quad (r = a_* = a_0 \alpha_0^{-1/3}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

(a_* — радиус ячейки [7]). Последнее условие в (1.10) представляет собой условие адиабатичности ячейки. Если температурные перепады малы в жидкости вблизи межфазной поверхности и в слоях, толщина которых значительно меньше межпузырьковых расстояний, вместо этого условия принимается условие изотермичности вдали от пузырька ($T'_l = 0$, $r = \infty$).

Используя (1.5), а также учитывая (1.9) и систему граничных условий (1.10), из уравнения (1.4) получаем

$$\frac{\partial p_g}{\partial t} = -3\gamma \frac{p_{g0}}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} + 3(\gamma - 1) \frac{\lambda_g}{a_0} \left(\frac{\partial T'_g}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} + 3 \frac{\gamma p_{g0}}{a_0} \frac{DB_v}{(1 - k_0) B_{g0}} \left(\frac{\partial k'}{\partial r} \right) \Big|_{r=a_0},$$

где $\gamma = c_{g0}/(c_{g0} - B_0)$; $c_{g0} = c_v k_0 - c_a(1 - k_0)$.

Для исходного равновесного состояния запишем аналогичное (1.7) выражение

$$\frac{p_s(T_0)}{p_{g0}} = \frac{B_v k_0}{B_a + (B_v - B_a) k_0},$$

которое однозначно связывает массовую долю пара в пузырьке с температурой T_0 . Для определения зависимости $p_s(T)$ используем формулу

$$p_s(T) = p_* e^{-T_*/T},$$

где p_* , T_* — эмпирические параметры, зависящие от вида жидкости.

Полученная система линеаризованных уравнений является замкнутой при заданных значениях параметров p_{g0} , T_0 , a_0 , α_0 и коэффициентов, зависящих от теплофизических свойств системы.

2. Дисперсионный анализ. Решение полученной системы линеаризованных уравнений будем искать в виде затухающей бегущей волны:

$$\begin{aligned} (p_l, p_g, v, a) \sim e^{i(Kx - \omega t)}, \quad T'_i = T_i(r) e^{i(Kx - \omega t)} \quad (i = g, l), \\ k' = k(r) e^{i(Kx - \omega t)} \quad (K = k + i\delta, \quad C_p = \omega/k, \quad i = \sqrt{-1}), \end{aligned}$$

где K — волновой вектор; δ , C_p — коэффициент затухания и фазовая скорость волны соответственно. Из условия существования решения такого вида с учетом акустической разгрузки [10] пузырьков получаем дисперсионное уравнение

$$\frac{K^2}{\omega^2} = \frac{1}{C_l^2} + 3 \frac{\rho_{l0}^0 \alpha_0}{\psi}, \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{3\gamma p_{g0}}{Q} - \frac{\rho_{l0}^0 \omega^2 a_0^2}{\xi} - 4i\rho_{l0}^0 \nu_l^{(\mu)} \omega - \frac{2\sigma}{a_0}, & p_{g0} &= p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}, \\ \xi &= 1 - i\omega t_A, & t_A &= a_0 / (\sqrt[3]{\alpha_{v0}} C_l), \\ Q &= 1 + \left(\frac{\gamma - 1}{k_0} H_a \operatorname{kh}(y_g) + \frac{\gamma}{1 - k_0} H_v \operatorname{kh}(z) \right) \left(\frac{H_a}{k_0} + \frac{\gamma \operatorname{kh}(z)}{(1 - k_0)\beta \operatorname{sh} v(y_l)} \right)^{-1}, \\ \operatorname{kh}(x) &= 3(x \operatorname{cth}(x) - 1)x^{-2}, \\ \operatorname{sh} v(x) &= 3(1 + x(A_0 x \operatorname{th}(x(A_0 - 1)) - 1)(A_0 x - \operatorname{th}(x(A_0 - 1))))^{-1} x^{-2} \\ &\text{или } \operatorname{sh} v(x) = 3(1 + x)x^{-2}, \\ A_0 &= \alpha_0^{-1/3}, \quad y_l = \sqrt{-i\omega a_0^2 / \nu_l^{(T)}}, \quad z = \sqrt{-i\omega a_0^2 / D}, \quad \beta = (\gamma - 1)\eta H_v \chi^2, \\ \eta &= \frac{\rho_{l0}^0 c_1}{\rho_{g0}^0 c_g}, \quad \chi = \frac{c_g T_0}{L}, \quad H_v = \frac{B_v}{B_0}, \quad H_a = \frac{B_a}{B_0}, \quad H = H_v - H_a. \end{aligned}$$

При этом для распределений концентраций и температуры внутри пузырьков имеем

$$\begin{aligned} k^{(R)} &= \frac{\operatorname{sh}(zR)}{R \operatorname{sh}(z)} \frac{A^{(k)}}{A} \frac{p_g}{p_{g0}}, \\ \frac{T_g(R)}{T_0} &= \left[(1 - \gamma^{-1}) + \left(\frac{A^{(T)}}{A} - 1 + \gamma^{-1} \right) \frac{\operatorname{kh}(y_g R)}{R \operatorname{kh}(y_g)} \right] \frac{p_g}{p_{g0}}, \\ A &= H_v H_a (\eta \operatorname{sh} v(y_g) + \operatorname{kh}(y_g)) + \frac{k_0 \operatorname{kh}(z)}{(1 - k_0)\chi^2(1 - \gamma^{-1})}, \\ A^{(k)} &= k_0 [H_v (\eta \operatorname{sh} v(y_l) + \operatorname{kh}(y_g))] - k_0 \chi^{-1} \operatorname{kh}(y_g), \\ A^{(T)} &= k_0 H_v \frac{\operatorname{kh}(z)}{(1 - k_0)\chi} + (1 - \gamma^{-1}) H_v H_a \operatorname{kh}(y_g), \quad R = \frac{r}{a_0}. \end{aligned}$$

Для распределения температуры в жидкости при условии адиабатичности или изотермичности ячеек имеем

$$\frac{T_l(R)}{T_0} = \frac{(A_0 y_l + 1) e^{y_g(R - A_0)} + (A_0 y_l - 1) e^{y_0(A_0 - R)}}{R[(A_0 y_l + 1) e^{y_l(1 - A_0)} (A_0 y_l - 1) e^{y_l(A_0 - 1)}]} \frac{A_T}{A} \frac{p_g}{p_{g0}}$$

или

$$\frac{T_l(r)}{T_0} = \frac{e^{y_l(1 - R)}}{R} \frac{A_T}{A} \frac{p_g}{p_{g0}}.$$

Пренебрегая сжимаемостью жидкости ($C_p \rightarrow \infty$) и слагаемым $k_0 \alpha_0 / \beta$ вследствие их малости по сравнению с единицей, из дисперсионного уравнения (2.1) при $\omega \rightarrow 0$ получаем формулу для равновесной скорости звука

$$C_e = \sqrt{\frac{p_{g0}}{\rho_{l0}^0 \alpha_0} \left((1 - k_0) H_a + \frac{k_0 \alpha_0 \gamma}{\beta} \right) - \frac{2}{3} \frac{\sigma}{a_0 \rho_{l0}^0 \alpha_0}}, \quad (2.2)$$

обобщающую известные формулы Мэллока и Ландау. В частности, в точке кипения $T_0 = T_s(p_0)$, тогда с учетом (2.1) получаем

$$C_e = \sqrt{k_0 \left(\frac{\rho_{g0}^0}{\rho_{l0}^0} \right)^2 \left(\frac{B_0}{B_v} \right)^2 \frac{L^2}{c_l T_0} + \frac{4}{3} \frac{\sigma}{a_0 \rho_{l0}^0 \alpha_0}}.$$

Заметим, что при получении формулы (2.2) пренебрегалось сжимаемостью жидкости, а также параметром α_0 вследствие его малости по сравнению с единицей. В частных случаях ($2\sigma/(a_0 p_0) \ll 1$), когда $k_0 = 0$, $k_0 = 1$ (см. (2.2)), имеем формулы Мэллока [4] и Ландау [8]

$$C_M = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_{l0}^0 \alpha_0}}, \quad C_L = \frac{\rho_{v0}^0}{\rho_{l0}^0} \frac{L}{\sqrt{c_l T_0}}.$$

Из формулы (2.2) следует, что в случае если в полученном выражении второе слагаемое, связанное с капиллярными силами на межфазной поверхности, больше первого слагаемого, то равновесная скорость C_e является мнимой. Это в свою очередь означает, что в случае если параметры жидкости с газовыми зародышами удовлетворяют данному условию, состояния системы неустойчивы [6]. В случае если второе слагаемое не превышает первое, состояния системы устойчивы. Приравнявая к нулю выражение для C_e в (2.2), получаем условие для параметров, определяющих границу устойчивых и неустойчивых состояний:

$$p_{g0} \left((1 - k_0) H_a + \frac{k_0 \alpha_0 \gamma}{\beta} \right) = \frac{2\sigma}{3a_0}. \quad (2.3)$$

Данное условие совпадает с аналогичным условием, полученным в рамках равновесной схемы исследования системы жидкость — парогазовые пузырьки [9].

Для удобства проведения численных расчетов уравнение (2.3) разрешим относительно объемной доли пузырьков. Получаем

$$\alpha_0 = \alpha_*, \quad \alpha_* = \left(\frac{2\sigma}{3p_{g0} a_0} - (1 - k_0) H_a \right) \frac{\beta}{k_0 \gamma}. \quad (2.4)$$

В случае отсутствия газа в пузырьках ($k_0 = 1$) имеем

$$\alpha_* = \frac{2}{3} \frac{\sigma}{\rho_{l0}^0 a_0 C_L^2}, \quad C_L = \frac{\rho_{g0}^0}{\rho_{l0}^0} \frac{L}{\sqrt{c_l T_0}}$$

(C_L — скорость звука Ландау [8]).

Поскольку $(1 - k_0) H_a p_{g0} = p_{a0}$, формулу (2.4) с учетом (1.1) можно привести к виду

$$\alpha_* = \left(\Delta p_v - \frac{4\sigma}{3a_0} \right) \frac{\beta}{k_0 \gamma P_{g0}}, \quad \Delta p_v = p_s(T_0) - p_0. \quad (2.5)$$

С использованием уравнения Клапейрона — Клаузиуса (1.8) в линейном приближении перепад давления Δp_v можно выразить через степень перегрева жидкости ΔT_0 :

$$\Delta p_v = \frac{\rho_{v0}^0 L}{T_0} \Delta T_0. \quad (2.6)$$

С учетом (2.6) уравнение (2.5) запишем в виде

$$\alpha_* = \left(\frac{\rho_{v0}^0 L}{T_0} \Delta T_0 - \frac{4\sigma}{3a_0} \right) \frac{\beta}{k_0 \gamma p_{g0}}. \quad (2.7)$$

С использованием уравнения (2.4) (или (2.7)) на плоскости (α_0, a_0) можно получить кривые, определяющие границу между зонами устойчивого и неустойчивого состояний системы при заданных значениях давления p_0 и температуры T_0 . Значения параметров p_{g0} , k_0 , входящих в правую часть выражения (2.4), вычисляются по формулам

$$p_{g0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}, \quad k_0 = \frac{\rho_{v0}^0}{\rho_{v0}^0 + \rho_{a0}^0}, \quad \rho_{v0}^0 = \frac{p_s(T_0)}{B_v T_0}, \quad \rho_{a0}^0 = \frac{p_{g0} - p_s(T_0)}{B_g T_0},$$

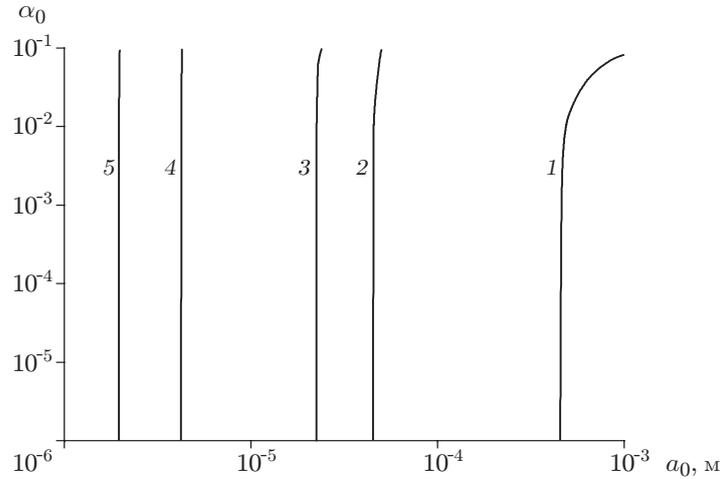


Рис. 1. Границы областей устойчивых и неустойчивых состояний перегретой воды с паровоздушными пузырьками при различных значениях степени перегрева:

1 — $\Delta T_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ К, 2 — $\Delta T_0 = 5 \cdot 10^{-1}$ К, 3 — $\Delta T_0 = 1$ К, 4 — $\Delta T_0 = 5$ К, 5 — $\Delta T_0 = 10$ К

масса газового зародыша определяется в виде

$$m_{g0} = (4/3)\pi a_0^3 \rho_{g0}^0.$$

Для неустойчивых состояний (когда область значений a_0 и α_0 на рис. 1 для соответствующего значения ΔT_0 расположена правее показанных линий) дисперсионное уравнение (2.1), рассматриваемое как уравнение для ω при заданных $K > 0$ (как и в случае пузырьковой парожидкостной среды), имеет решение вида $\omega = \omega' i$, причем $\omega' > 0$ [6]. При этом зависимость $\omega' = \omega'(K)$ является монотонно возрастающей и имеющей асимптоту $\omega' = \omega'_\infty$ при $K \rightarrow \infty$. При анализе скорости развития неустойчивости наибольший интерес представляет предельное значение ω'_∞ инкремента. Пренебрегая сжимаемостью жидкости ($C_e \rightarrow \infty$), для определения инкремента получаем уравнение

$$\psi(\omega'_\infty) = 0,$$

которое следует из (2.1) при замене $-i\omega$ на ω'_∞ .

3. Результаты расчетов. С использованием дисперсионного уравнения (2.1) и его следствия (2.2) проведены численные расчеты для воды с паровоздушными пузырьками. Значения физических и теплофизических параметров взяты из справочника [11], начальная объемная доля равна $\alpha_0 = 10^{-3}$ (за исключением рис. 1).

На рис. 1 показаны линии, полученные с использованием (2.4) (или (2.7)) и определяющие на плоскости (a_0, α_0) границы областей устойчивых и неустойчивых состояний перегретой воды с паровоздушными пузырьками при $p_0 = 0,1$ МПа ($T_s(p_0) = 373$ К). Зоны, расположенные левее представленных линий, соответствуют устойчивым состояниям, правее — неустойчивым.

На рис. 1 видно, что значение объемной доли пузырьков оказывает слабое влияние на характер кривых, определяющих границы областей устойчивости. При всех значениях степени перегрева границы представляют собой практически вертикальные линии, причем соответствующее приближенное значение равновесного радиуса a_0^* согласно (2.7) можно определить из формулы

$$a_0^* \simeq \frac{4}{3} \frac{\sigma}{\rho_{v0}^0 L} \frac{T_0}{\Delta T_0}. \tag{3.1}$$

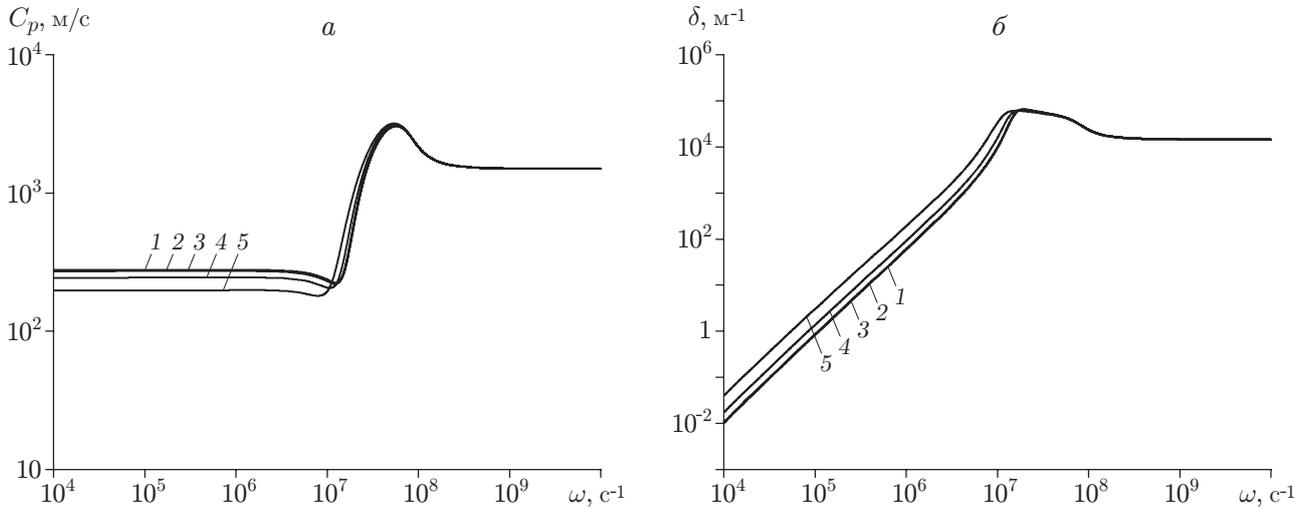


Рис. 2. Зависимости фазовой скорости (*а*) и коэффициента затухания (*б*) от частоты возмущений при различных значениях степени перегрева ΔT (обозначения те же, что на рис. 1)

Для кривых, представленных на рис. 1, соответствующие радиусы, вычисленные по формуле (3.1) для указанных значений степени перегрева, равны $a_0^* \simeq 4,4 \cdot 10^{-4}$; $4,4 \cdot 10^{-5}$; $2,2 \cdot 10^{-5}$; $3,8 \cdot 10^{-6}$; $1,7 \cdot 10^{-6}$ м.

На рис. 2 приведены зависимости фазовой скорости и коэффициента затухания от частоты возмущений для устойчивых систем при различных значениях степени перегрева ΔT_0 . Равновесный радиус пузырьков равен $a_0 = 10^{-6}$ м. Для рассматриваемых значений степени перегрева ΔT_0 массовая доля пара и масса воздушного зародыша составляют $k_0 = 0,348$; $0,351$; $0,355$; $0,430$; $0,533$ и $m_{g0} = 7,2 \cdot 10^{-18}$; $7,1 \cdot 10^{-18}$; $7,0 \cdot 10^{-18}$; $6,8 \cdot 10^{-18}$; $6,5 \cdot 10^{-18}$ кг. В диапазоне низких частот $\omega \leq \omega_R$ ($\omega_R = a_0^{-1} \sqrt{3\gamma p_0 / \rho_{l0}^0}$ — миннаэрттовская частота собственных колебаний пузырьков) наблюдается некоторое влияние степени перегрева на величину фазовой скорости. Также на рис. 2 видно, что при рассматриваемых значениях степени перегрева характер зависимости фазовой скорости от частоты не меняется, что обусловлено достаточно высокой массовой долей инертного газа в пузырьках. Вследствие этого упругость пузырьков в основном определяется массовой долей газа. Значения декремента затухания в области устойчивости системы различаются не более чем в два раза.

На рис. 3 приведена зависимость равновесной скорости звука от радиуса пузырьков a_0 при различных значениях степени перегрева ΔT_0 . Для рассматриваемых задач радиус пузырьков меняется от значения $a_0 = 10^{-6}$ м до значения a_0^* , которое определяется по формуле (3.1). Из рис. 3 следует, что с увеличением степени перегрева пузырьковой жидкости существенно (на 2–3 порядка) уменьшается критический радиус a_0^* , являющийся максимальным в области устойчивости. Это обусловлено тем, что при увеличении степени перегрева жидкости область устойчивости уменьшается.

Кроме того, в случае более перегретой жидкости кривые равновесной скорости расположены ниже, что обусловлено увеличением массовой доли пара в пузырьках. В данном случае упругость паров в пузырьках определяется фазовыми переходами. Вследствие этих переходов, испарения и конденсации парциальное давление пара в пузырьках меняется незначительно. Следовательно, общая упругость парогазовой смеси в пузырьках в основном определяется парциальным давлением газа.

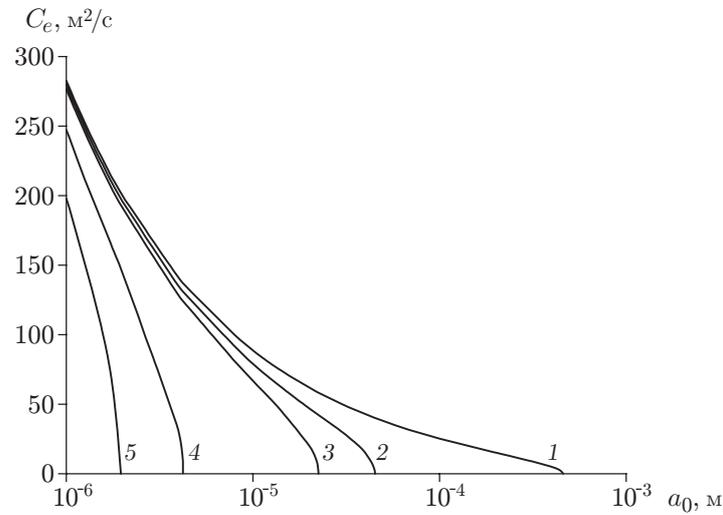


Рис. 3. Зависимость равновесной скорости звука от радиуса пузырьков при различных значениях степени перегрева ΔT_0 (обозначения те же, что на рис. 1)

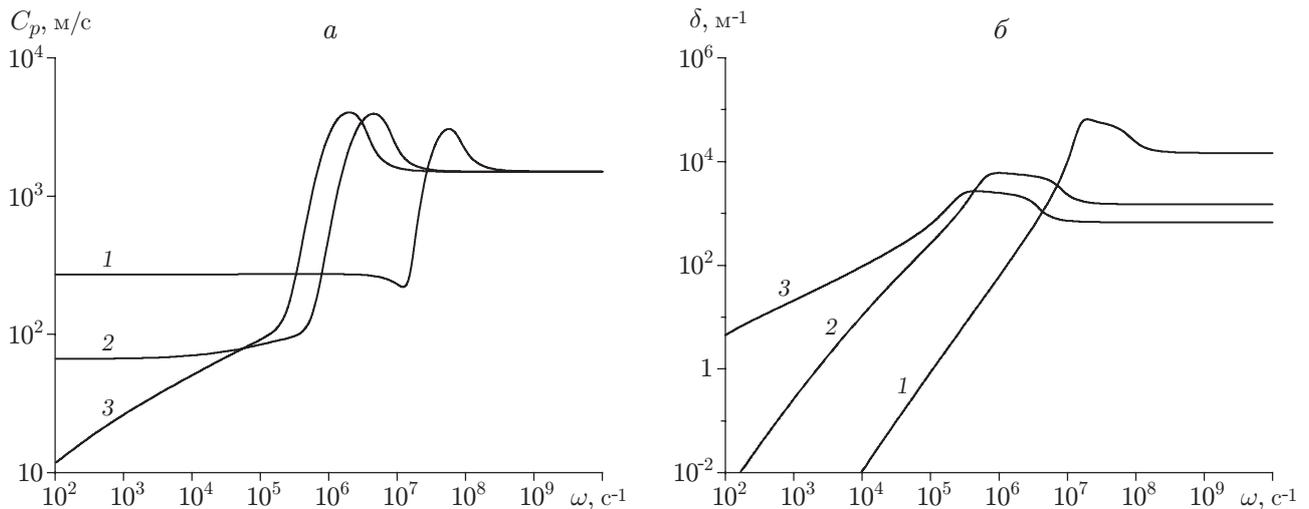


Рис. 4. Зависимости фазовой скорости (а) и коэффициента затухания (б) от частоты возмущений при $\Delta T_0 = 1$ К и различных значениях радиуса пузырьков: 1 — $a_0 = 10^{-6}$ м, 2 — $a_0 = 10^{-5}$ м, 3 — $a_0 = 2,2 \cdot 10^{-5}$ м

На рис. 4 приведены дисперсионные зависимости при $\Delta T_0 = 1$ К и дискретном изменении равновесного радиуса a_0 . Наибольшее значение радиуса соответствует равновесному радиусу a_0^* , расположенному на границе области устойчивости. На рис. 4 видно, что аномальное увеличение коэффициента затухания происходит при $a_0 \rightarrow a_0^*$. В области низких частот увеличение радиуса в два раза приводит к увеличению коэффициента затухания на 2–3 порядка. Фазовая скорость при этом уменьшается в несколько раз.

На рис. 5 приведена зависимость величины инкремента ω' от радиуса a_0 при объемной доле пузырьков $\alpha_0 = 10^{-3}$ и различных значениях степени перегрева ΔT_0 . Видно, что при увеличении радиуса пузырьков от значения a_0^* до некоторого максимального радиуса $a_0^{(M)}$ значение инкремента увеличивается от нуля до $\omega'^{(M)}$, соответствующего отсутствию газа в пузырьках ($k_0 = 1$). При этом согласно (1.1) при $p_{g0} = 0$ максимальный радиус опреде-

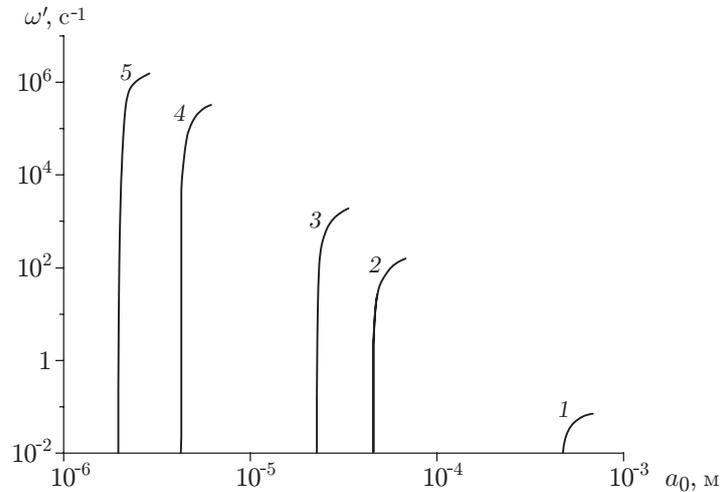


Рис. 5. Зависимость величины инкремента ω' от радиуса a_0 при $\alpha_0 = 10^{-3}$ и различных значениях степени перегрева ΔT_0 (обозначения те же, что на рис. 1)

ляется следующим образом:

$$a_0^{(M)} \simeq 2\sigma/\Delta p_v, \quad \Delta p_v = p_s(T_0) - p_0. \quad (3.2)$$

При небольших значениях степени перегрева ($\Delta T_0 \ll T_0$) из (3.2) с учетом (2.6) получаем

$$a_0^{(M)} \simeq \frac{4}{3} \frac{\sigma}{\rho_{v0}^0 L} \frac{T_0}{\Delta T_0}. \quad (3.3)$$

На рис. 5 видно, что значение максимального инкремента величины $a_0^{(M)}$ монотонно уменьшается приблизительно по закону $\omega'^{(M)} \sim (a_0^{(M)})^{-3}$. Следовательно, с учетом (3.3) максимальное значение инкремента для парожидкостной смеси зависит от степени перегрева следующим образом: $\omega'^{(M)} \sim \Delta T_0^3$.

Заключение. В настоящей работе, являющейся продолжением работ [12–14], с использованием аналитических и численных расчетов построены карты зон устойчивости в области (a_0, α) мелкодисперсной пузырьковой парогазожидкостной смеси при различных значениях степени перегрева жидкости ΔT_0 . Получено приближенное соотношение для расчета равновесного значения радиуса на границе области устойчивости. Исследовано влияние степени перегрева жидкости ΔT_0 на фазовую скорость и коэффициент затухания, когда система находится в устойчивом состоянии. Установлено, что для рассмотренного равновесного значения радиуса ($a_0 = 10^6$ м) в зоне устойчивости степень перегрева не оказывает существенного влияния на изменение фазовой скорости и коэффициента затухания, что обусловлено достаточно высокой концентрацией инертного газа в пузырьках. Декремент затухания в области устойчивости меняется не более чем в два раза.

С увеличением степени перегрева жидкости равновесное критическое значение радиуса существенно уменьшается обратно пропорционально степени перегрева ΔT_0 , причем это значение является максимальным в области устойчивости системы. Это обусловлено тем, что увеличение степени перегрева жидкости приводит к уменьшению области устойчивости вследствие увеличения массовой доли пара в пузырьках.

Полученные результаты согласуются с условиями устойчивости, полученными в [9] при анализе равновесной схемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Fox F. E., Curley S. R., Larson G. S.** Phase velocity and absorption measurements in water containing air bubbles // J. Acoust. Soc. Amer. 1955. V. 27, iss. 3. P. 534–539.
2. **Silberman E.** Sound velocity and attenuation in bubbly mixture measured in standing wave tubes // J. Acoust. Soc. Amer. 1957. V. 29, iss. 8. P. 925–933.
3. **Кедринский В. К.** Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ. 1968. № 4. С. 29–34.
4. **Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р.** Распространение малых возмущений в парожидкостной смеси // Проблемы теплофизики и физической гидродинамики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1974. С. 161–166.
5. **Crespo A.** Sound and shock waves in liquid containing bubbles // Phys. Fluid. 1969. V. 12, iss. 11. P. 2274–2282.
6. **Вахитова Н. К., Шагапов В. Ш.** О распространении малых возмущений в парожидкостных пузырьковых средах // ПМТФ. 1984. № 5. С. 34–43.
7. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1, 2.
8. **Ландау Л. Д.** Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Физматлит, 2006.
9. **Шагапов В. Ш., Коледин В. В., Вахитова Н. К.** Об устойчивости перегретой жидкости, содержащей парогазовые зародыши // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 5. С. 64–80.
10. **Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш., Вахитова Н. К.** Проявление сжимаемости несущей фазы при распространении волны в пузырьковой среде // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304, № 5. С. 1077–1081.
11. **Варгафтик Н. Б.** Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972.
12. **Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Вдовенко И. И., Хабеев Н. С.** Особенности распространения звука в теплой воде с воздушными пузырьками // Инж.-физ. журн. 2018. Т. 91, № 4. С. 912–921.
13. **Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Вдовенко И. И.** Особенности отражения и прохождения акустических волн на границе “чистой” и пузырьковой жидкости при прямом их падении // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57, № 2. С. 284–290.
14. **Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Вдовенко И. И.** Особенности отражения и прохождения акустических волн на границе “чистой” и пузырьковой жидкости при “косом” их падении // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57, № 3. С. 464–468.

*Поступила в редакцию 4/VII 2018 г.,
после доработки — 4/VII 2018 г.
Принята к публикации 26/XI 2018 г.*