УДК 532.61.096

ОДНОНАПРАВЛЕННОЕ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ ПРИ ЗАДАННОМ РАСХОДЕ

Е. Н. Черемных

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск, Россия
Сибирский федеральный университет, 660036 Красноярск, Россия
E-mail: elena_cher@icm.krasn.ru

Рассматривается начально-краевая задача, описывающая однонаправленное термогравитационное движение жидкости в плоском канале в случае твердых неподвижных верхней и нижней стенок, на которых задано распределение температур, и в случае теплоизолированной верхней стенки. Движение вызвано совместным действием продольного градиента температуры и заданного нестационарного расхода. Начально-краевая задача является обратной относительно градиента давления вдоль канала. Получено точное стационарное решение. Найдено в явном виде решение нестационарной задачи в изображениях по Лапласу и представлены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: уравнения Обербека — Буссинеска, конвекция, численные эксперименты.

DOI: 10.15372/PMTF20180304

Постановка задачи. Для описания термогравитационного движения вязкой несжимаемой жидкости используются уравнения Обербека — Буссинеска

$$\boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \nu\,\Delta\boldsymbol{v} - \beta\theta\boldsymbol{g}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0, \quad \theta_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\theta = \chi\,\Delta\theta, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости; $\boldsymbol{g}$ — ускорение свободного падения; p — отклонение давления от гидростатического значения; θ — отклонение температуры от среднего значения; ρ — средняя плотность жидкости; ν — кинематическая вязкость жидкости; β — коэффициент объемного расширения; χ — температуропроводность. Положительные величины ρ, ν, χ, β и вектор $\boldsymbol{g}$ полагаются постоянными.

Предположим, что движение является плоским однонаправленным. Тогда $\boldsymbol{v} = (u(x,y,t),0)$, $\boldsymbol{g} = (0,-g)$ и уравнения (1) существенно упрощаются:

$$u_x = 0, \quad u_t = \nu u_{yy} - \rho^{-1}p_x, \quad p_y = \rho g\beta\theta, \quad \theta_t + u\theta_x = \chi(\theta_{xx} + \theta_{yy}). \tag{2}$$

Для случая стационарных плоских течений система (2) изучена в работе [1]. Показано, что функция u есть кубический полином, остальные искомые функции могут быть представлены в виде $\theta = -Ax + T(y)$, $p = -A\rho gxy + q(y)$, где T, q — полиномы пятой и шестой степени соответственно. В работе [2] установлено, что решение Бириха является инвариантным решением системы (1) относительно группы с основными операторами

$\partial_x - A(\partial_\theta + \rho g\beta y\,\partial_p)$, ∂_t, ∂_z ($A = \mathrm{const}$), допускаемой этой системой. В данной работе задача о совместности системы уравнений (2) решается в общем виде.

Из первых трех уравнений (2) следует, что функции p и θ линейно зависят от переменной x. Следуя работе [3], положим

$$u = u(y,t), \qquad \theta = -A(y,t)x + T(y,t), \qquad p = -B(y,t)x + q(y,t). \tag{3}$$

Подставляя (3) в уравнения (2) и "расщепляя" по x, получаем

$$A_t = \chi A_{yy}, \quad By = \rho g\beta A, \quad u_t = \nu u_{yy} + B/\rho, \quad T_t = \chi T_{yy} + Au, \quad q_y = \rho g\beta T. \tag{4}$$

Уравнения (4) решаются последовательно в области $D = \{y,t\colon 0 < y < h,\ t > 0\}$. С использованием начальных и граничных условий находится единственное решение первого уравнения (4). Зная функцию A и интегрируя второе уравнение системы (4), находим функцию B. В результате система для определения функций u, T, q становится замкнутой.

В качестве характерных масштабов длины, времени, функций $A(y,t)$, $u(y,t)$, $C(t)$ введем величины h, h^2/ν, $\tilde{A}$, ν/h, $\rho\nu^2/h^3$ соответственно ($\tilde{A} = \max\limits_{t\geqslant 0}|A_2(t) - A_1(t)| > 0$ при $A_1(t) = A(0,t)$, $A_2(t) = A(h,t)$ или $\tilde{A} = \max\limits_{k}\max\limits_{t}|A_k(t)| > 0$, $k = 1,2$ при $A_1(t) = A_2(t)$).

Запишем уравнения для функций $A(y,t)$ и $u(y,t)$ в безразмерном виде

$$A_t(y,t) = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\,A_{yy}(y,t); \tag{5}$$

$$u_t(y,t) = u_{yy}(y,t) + \mathrm{Gr}\int\limits_0^y A(z,t)\,dz + C(t), \tag{6}$$

где $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля; $\mathrm{Gr} = g\beta\tilde{A}h^4/\nu^2$ — число Грасгофа.

Так как стенки $y = 0$, $y = 1$ твердые и неподвижные, то на них выполнены условия прилипания

$$u(0,t) = u(1,t) = 0. \tag{7}$$

Кроме того, на нижней и верхней стенках задано распределение температуры

$$A(0,t) = A_1(t), \qquad A(1,t) = A_2(t). \tag{8}$$

В данной работе рассматривается также случай, когда верхняя стенка теплоизолированна:

$$A(0,t) = A_1(t), \qquad A_y(1,t) = 0. \tag{9}$$

Начальные условия задаются следующим образом:

$$A(y,0) = A_0(y); \tag{10}$$

$$u(y,0) = u_0(y). \tag{11}$$

В уравнении (6) функция $C(t)$ получена в результате интегрирования второго уравнения (4), является слагаемым в линейной зависимости давления от переменной x и не зависит от конвективного процесса. Функцию $C(t)$ можно определить из условия заданного расхода

$$\int\limits_0^1 u(y,t)\,dy = q(t). \tag{12}$$

Для того чтобы получить решения задач (5)–(11), необходимо задать условия согласования

$$\begin{gathered}u_0(0) = u_0(1) = 0, \qquad \int\limits_0^1 u_0(y)\,dy = q(0),\\ A_0(0) = A_1(0), \qquad A_0(1) = A_2(0) \qquad (A_{0y}(1) = 0).\end{gathered} \tag{13}$$

Постановка задачи (6), (7), (11), (12) приведена в работе [3]. Однозначная разрешимость этой задачи также показана в работе [3] путем сведения к операторному уравнению для $C(t)$.

Стационарное решение. Стационарное решение задачи (5)–(8), (12) имеет вид

$$A^s(y) = A_1^s(1-y) + A_2^s y; \tag{14}$$

$$u^s(y) = \frac{\mathrm{Gr}}{120}\,(5(A_1^s - A_2^s)y^4 - 20A_1^s y^3 + 3(7A_1^s + 3A_2^s)y^2 - (6A_1^s + 4A_2^s)y) - 6q^s y(y-1); \tag{15}$$

$$C^s = \frac{\mathrm{Gr}}{20}\,(7A_1^s + 3A_2^s) - 12q^s, \tag{16}$$

где $A_1^s = A^s(0)$; $A_2^s = A^s(1)$; $q^s = \int\limits_0^1 u^s(y)\,dy$. Полагая в (15) $q^s = 0$ (условие замкнутости потока) и $A_1^s = A_2^s = A$, получим решение, совпадающее с решением, найденным в работе [1].

Запишем стационарное решение задачи (5)–(7), (9), (12)

$$A^s = A_1^s; \tag{17}$$

$$u^s(y) = -\,\mathrm{Gr}\,(2y^3 - 3y^2 + y)/12 + 6q^s y(1-y); \tag{18}$$

$$C^s = 12q^s - \mathrm{Gr}\,A_1^s/2. \tag{19}$$

Число Грасгофа характеризует влияние термогравитационных сил, а безразмерный параметр q^s — влияние сил инерции. Поэтому при $|q^s| \gg \mathrm{Gr}$ в слое преобладают силы инерции и профиль скорости является параболическим (течение Пуазейля). При $|q^s| \ll \mathrm{Gr}$ преобладают термогравитационные силы и возникает зона возвратного течения (рис. 1).

Замечание. Используя методику априорных оценок [4], можно показать, что решения начально-краевых задач (5)–(8), (10)–(12) и (5)–(7), (9)–(12) при условии $\lim\limits_{t\to\infty} q(t) = q^s$ и условии сходимости интегралов

$$\int\limits_0^\infty |A_1^s - A_1(t)|\,\mathrm{e}^{\delta_1 t}\,dt, \qquad \int\limits_0^\infty |A_2^s - A_2(t)|\,\mathrm{e}^{\delta_1 t}\,dt, \qquad \int\limits_0^\infty |A_{1t}(t)|\,\mathrm{e}^{\delta t}\,dt, \qquad \int\limits_0^\infty |A_{1t}(t)|\,\mathrm{e}^{\delta_1 t}\,dt,$$

$$\int\limits_0^\infty |A_{1tt}(t)|\,\mathrm{e}^{\delta t}\,dt, \qquad \int\limits_0^\infty |A_{kt}(t)|\,\mathrm{e}^{\delta_2 t}\,dt, \qquad \int\limits_0^\infty |A_{2t}(t)|\,\mathrm{e}^{\delta_1 t}\,dt, \qquad \int\limits_0^\infty |A_{2tt}(t)|\,\mathrm{e}^{\delta_2 t}\,dt,$$

$$\int\limits_0^\infty |q_t(t)|\,\mathrm{e}^{\delta_1 t}\,dt, \qquad \int\limits_0^\infty |q_{tt}(t)|\,\mathrm{e}^{\delta_1 t}\,dt,$$

где $\delta = 2\chi/h^2$; $\delta_1 = \pi^2\nu/h^2$; $\delta_2 = \chi\pi^2/h^2$; $t \to \infty$, стремятся к соответствующим стационарным решениям (14)–(16) и (15)–(19).

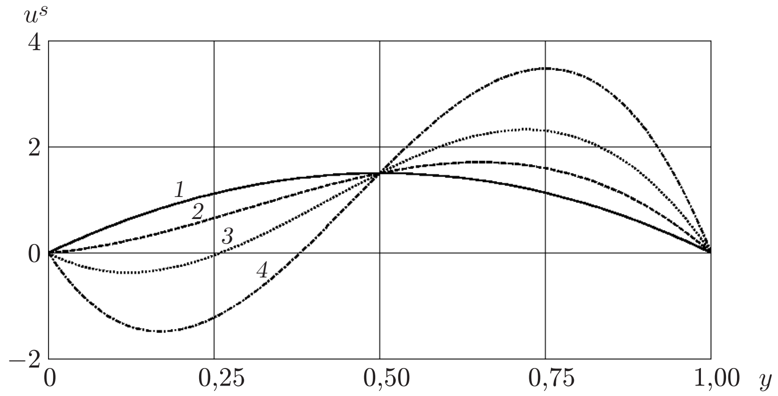

Рис. 1. Стационарный профиль безразмерной скорости (16) при $q^s = 1$ и различных значениях числа Грасгофа:
1 — Gr = 1, *2* — Gr = 60, *3* — Gr = 150, *4* — Gr = 300

Нестационарное течение. Для описания нестационарного термогравитационного течения вязкой жидкости применим преобразование Лапласа при решении задач (5)–(12). В результате получаем краевую задачу для изображений $\hat{A}(y,p)$, $\hat{u}(y,p)$ функций $A(y,t)$ и $u(y,t)$:

$$\begin{gathered}\hat{A}_{yy}(y,p) - p\,\mathrm{Pr}\,\hat{A}(y,p) = -\,\mathrm{Pr}\,A_0(y),\\ \hat{u}_{yy}(y,p) - p\hat{u}(y,p) = -\Big(u_0(y) + \mathrm{Gr}\int\limits_0^y \hat{A}(z,p)\,dz + \hat{C}(p)\Big);\end{gathered}\qquad(20)$$

$$\begin{gathered}\hat{u}(0,p) = \hat{u}(1,p) = 0, \qquad \int\limits_0^1 \hat{u}(y,p)\,dy = \hat{q}(p),\\ \hat{A}(0,p) = \hat{A}_1(p), \qquad \hat{A}(1,p) = \hat{A}_2(p) \qquad (\hat{A}_y(1,p) = 0).\end{gathered}\qquad(21)$$

При выводе уравнений (20) использованы начальные данные (10), (11). В (21) $\hat{A}_1(p)$, $\hat{A}_2(p)$, $\hat{q}(p)$ — изображения функций $A_1(t)$, $A_2(t)$, $q(t)$ соответственно (см. (8), (9), (12)).

Если на верхней стенке ($y = 1$) задано распределение температуры, общее решение первого уравнения (20) с учетом граничных условий (21) имеет вид

$$\hat{A}(y,p) = \frac{1}{\mathrm{sh}\sqrt{p\,\mathrm{Pr}}}\Big[\hat{A}_1(p)\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{p\,\mathrm{Pr}}\,(1-y)) + \mathrm{sh}\,(\sqrt{p\,\mathrm{Pr}}\,y)\Big(\hat{A}_2(p) + \\ + \sqrt{\frac{\mathrm{Pr}}{p}}\int\limits_0^1 A_0(z)\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{p\,\mathrm{Pr}}\,(1-z))\,dz\Big)\Big] - \sqrt{\frac{\mathrm{Pr}}{p}}\int\limits_0^y A_0(z)\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{p\,\mathrm{Pr}}\,(y-z))\,dz, \qquad (22)$$

если верхняя стенка теплоизолированна, — вид

$$\hat{A}(y,p) = \frac{1}{\mathrm{ch}\sqrt{p\,\mathrm{Pr}}}\Big(\hat{A}_1(p)\,\mathrm{ch}\,(\sqrt{p\,\mathrm{Pr}}\,(1-y)) + \frac{\sqrt{\mathrm{Pr}}\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{p\,\mathrm{Pr}}\,y)}{\sqrt{p}}\,\times \\ \times\int\limits_0^1 A_0(z)\,\mathrm{ch}\,(\sqrt{p\,\mathrm{Pr}}\,(1-z))\,dz\Big) - \sqrt{\frac{\mathrm{Pr}}{p}}\int\limits_0^y A_0(z)\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{p\,\mathrm{Pr}}\,(y-z))\,dz. \qquad (23)$$

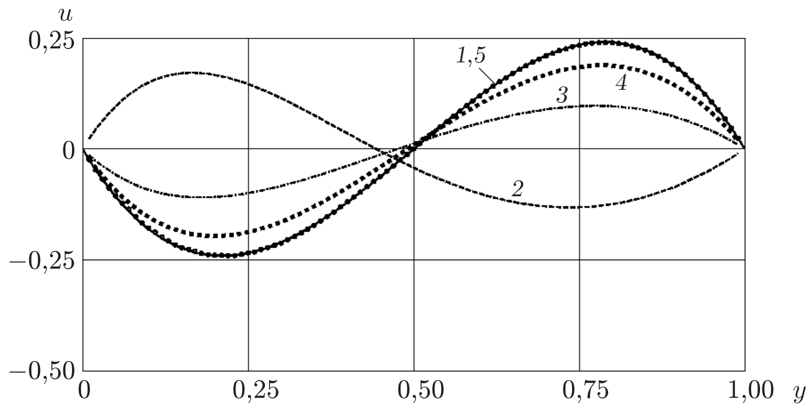

Рис. 2. Профиль безразмерной скорости при $A_1(t) = 1 - 5\,\mathrm{e}^{-0{,}01}\sin(0{,}1t)$:
1 — стационарное решение, *2* — $t = 15$, *3* — $t = 100$, *4* — $t = 165$, *5* — $t = 400$

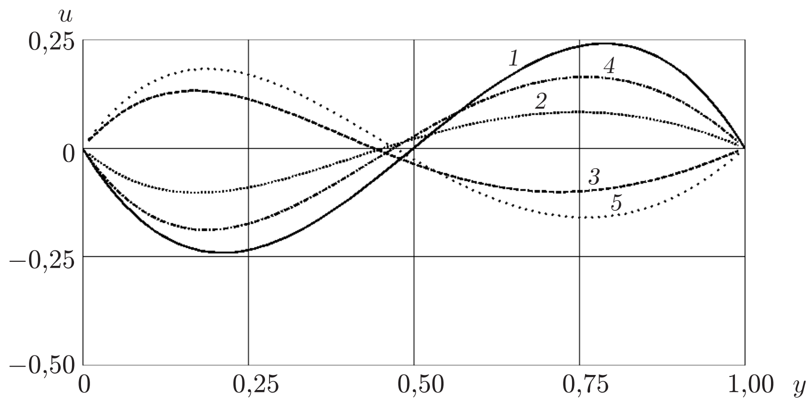

Рис. 3. Профиль безразмерной скорости при $A_1(t) = 2\sin(0{,}05t)$:
1 — стационарное решение, *2* — $t = 20$, *3* — $t = 100$, *4* — $t = 170$, *5* — $t = 235$

Общее решение второго уравнения (20) имеет вид

$$\begin{gathered}\hat{u}(y,p) = m\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{p}\,y) - \frac{1}{\sqrt{p}}\int\limits_0^y f(z,p)\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{p}\,(y-z))\,dz + \frac{\hat{C}(p)}{p}\,(1 - \mathrm{ch}\,(\sqrt{p}\,y)),\\ \hat{C}(p) = \frac{p\sqrt{p}}{m_1}\Big(\hat{q}(p) + \frac{(1-\mathrm{ch}\,\sqrt{p}\,)I}{p\,\mathrm{sh}\,\sqrt{p}} + \frac{I_1}{\sqrt{p}}\,\Big),\end{gathered} \tag{24}$$

где

$$f(y,p) = u_0(y) + \mathrm{Gr}\int\limits_0^y \hat{A}(z,p)\,dz,$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{p}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{p}}\Big(I - \frac{\hat{C}(p)(1-\mathrm{ch}\,\sqrt{p}\,)}{\sqrt{p}}\Big), \qquad m_1 = \sqrt{p} - 2\,\frac{\mathrm{ch}\,\sqrt{p} - 1}{\mathrm{sh}\,\sqrt{p}},$$

$$I = \int\limits_0^1 f(z,p)\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{p}\,(1-z))\,dz, \qquad I_1 = \int\limits_0^1\int\limits_0^y f(z,p)\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{p}\,(y-z))\,dz\,dy.$$

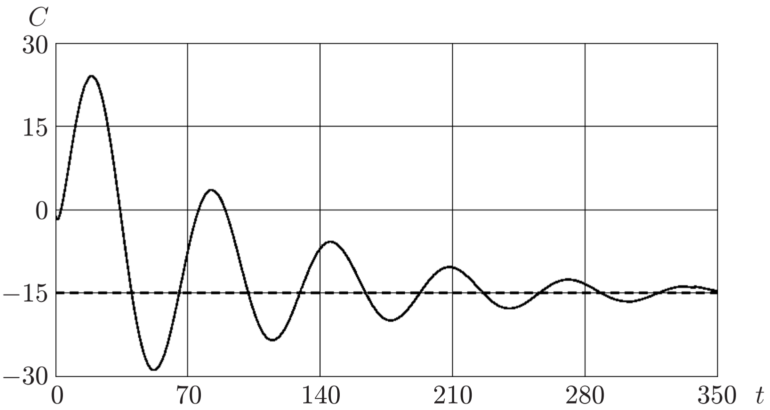

Рис. 4. Безразмерная функция $C(t)$ при $A_1(t) = 1 - 5\,\mathrm{e}^{-0{,}01}\sin(0{,}1t)$, $\mathrm{Gr} = 30$ (штриховая линия — стационарное решение C^s)

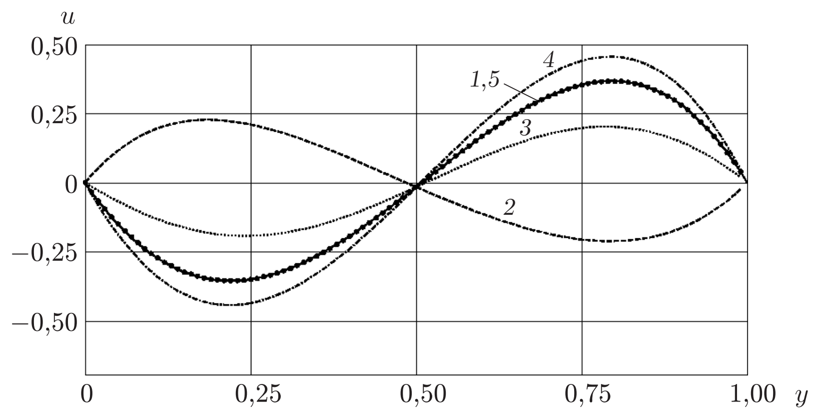

Рис. 5. Профиль безразмерной скорости при $A_1(t) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}01}\sin(0{,}1t)$, $A_2(t) = 2 - \mathrm{e}^{-0{,}01}\sin(0{,}1t)$:
1 — стационарное решение, *2* — $t = 15$, *3* — $t = 80$, *4* — $t = 190$, *5* — $t = 400$

Предположим, что $\lim\limits_{t\to\infty} A_k(t) = A_k^s$ и $\lim\limits_{t\to\infty} q(t) = q^s$. С использованием формул (22)–(24) можно доказать предельные равенства

$$\lim_{t\to\infty} A(y,t) = \lim_{p\to 0} p\hat{A}(y,p) = A^s(y), \qquad \lim_{t\to\infty} u(y,t) = \lim_{p\to 0} p\hat{u}(y,p) = u^s(y),$$

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = \lim_{p\to 0} p\hat{C}(p) = C^s,$$

где функции $A^s(y)$, $u^s(y)$ и C^s задаются формулами (14)–(16) или (17)–(19) в зависимости от граничных условий на верхней стенке.

Применим метод численного обращения преобразования Лапласа для формул (22)–(24). Расчеты проводились для жидкого силикона, имеющего следующие параметры: $\rho = 0{,}86 \cdot 10^3$ кг/м^3, $\nu = 18{,}49 \cdot 10^{-6}$ м^2/с, $\chi = 1{,}21 \cdot 10^{-5}$ м^2/с, $\beta = 0{,}7 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$. Рассмотрен случай, когда $q(t) = q^s = 0$ (расход равен нулю). На рис. 2, 3 показаны профили безразмерной скорости $u(y,t)$, в случае когда верхняя стенка теплоизолированна. В случае, представленном на рис. 3, при $t \to \infty$ предела функции $A_1(t)$ не существует и решение не выходит на стационарный режим. На рис. 4 показана зависимость $C(t)$ в случае $A_1(t) = 1 - 5\,\mathrm{e}^{-0{,}01t}\sin(0{,}1t)$. Видно, что с увеличением времени решение стремится к константе $C^s = -15$ (см. (19)).

На рис. 5 представлен профиль безразмерной скорости, в случае когда на верхней стенке заданы распределение температуры $A_1(t) = 1 - 5\,\mathrm{e}^{-0{,}01t}\sin(0{,}1t)$ и $A_2(t) = 2 - 5\,\mathrm{e}^{-0{,}01t}\sin(0{,}1t)$. Видно, что с увеличением времени решение стремится к стационарному решению (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бирих Р. В.** О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.
2. **Катков В. Л.** Точные решения некоторых задач конвекции // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, № 3. С. 482–487.
3. **Пухначев В. В.** Нестационарные аналоги решения Бириха // Изв. Алт. гос. ун-та. 2011. № 1/2. С. 62–69.
4. **Андреев В. К., Черемных Е. Н.** Совместное ползущее движение трех вязких жидкостей в плоском слое: априорные оценки и сходимость к стационарному режиму // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т. 19, № 1. С. 3–17.

Поступила в редакцию 10/III 2017 г.,
в окончательном варианте — 14/VI 2017 г.