

О ДИФРАКЦИИ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА КОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЕ
В УСЛОВИЯХ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

П. А. Мартынюк, Е. Н. Шер

(Новосибирск)

Для нормального падения волны в случае плоской или антиплоской деформации задача о взаимодействии упругих волн с трещиной рассмотрена в [1, 2]. Решение задачи о произвольном падении волны в случае плоской деформации описано в [3].

В п. 1 данной работы рассматривается дифракция ступенчатой волны напряжения на прямолинейной трещине конечной длины при произвольном угле падения в случае антиплоской деформации. Для антиплоской деформации математическое описание движения упругой среды проще, чем при плоской деформации. Это позволяет получать более простые и полные решения.

В п. 2 в той же постановке рассматривается дифракция при нормальном падении волны на трещину при условии, что в некоторый момент времени трещина достигает критического состояния и начинает развиваться под действием падающей волны.

1. Наклонное падение волны напряжения на неподвижную трещину. Рассматривается бесконечное упругое тело, содержащее изолированную трещину длиной $2l$. Деформационное состояние полагается антиплоским. Компоненты тензора напряжения, отличные от нуля

$$(1.1) \quad \tau_{xy} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{zy} = \mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

где $w = w(x, z, t)$ — единственная отличная от нуля компонента вектора смещения. Введем безразмерные переменные

$$x' = \frac{x}{l}, \quad z' = \frac{z}{l}, \quad w' = \frac{w}{l}, \quad \tau' = \frac{\tau}{\mu}, \quad t' = t \frac{c}{l}, \quad c = \sqrt{\mu/\rho}$$

где c — скорость поперечных волн, μ — модуль сдвига. Уравнения (1.1) и уравнение движения для безразмерных величин запишутся в виде (штрихи для простоты записи опущены)

$$\tau_{xy} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{zy} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Пусть на трещину слева падает волна сдвига в форме ступеньки с амплитудой p_0 и пусть в момент $t = 0$ она касается левого края трещины в точке $x = -1$. Угол между направлением нормали фронта волны с положительным направлением оси z обозначим через φ . Задача о падении такой волны на трещину эквивалентна задаче о свободной трещине, на берегах которой в начальный момент времени появляется нагрузка

$$(1.2) \quad p(x, t) = \mp \tau_{yz} = \pm p_0 \cos \varphi H[t - (x + 1) \sin \varphi]$$

$$H(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$$

Верхний знак в равенстве относится к верхнему берегу разреза. Длина трещины во все время остается постоянной.

Приведенный вид $p(x, t)$ означает, что нагрузка интенсивностью $\pm p_0 \cos \varphi$ распространяется по длине трещины из края $x = -1$ с посто-

янной скоростью $(\sin \varphi)^{-1}$ до тех пор, пока она не достигнет противоположного края трещины. После этого нагрузка остается постоянной. Решение задачи о дифракции можно получить сложением решения задачи о свободной трещине, подвергнутой в начальный момент действию нагрузки (1.2), и решения, описывающего движение падающей волны в сплошном бесконечном упругом теле. Для такой волны

$$w(x, z, t) = -p_0 H [t - (1+x) \sin \varphi - z \cos \varphi]$$

Компонента тензора напряжения τ_{yz} в такой волне на трещине $z = 0$, $-1 < x < +1$ будет

$$\tau_{yz} = p_0 \cos \varphi H [t - (1+x) \sin \varphi]$$

В сумме со значением из (1.2) это дает на трещине условие $\tau_{yz} = 0$, что и должно выполняться в дифракционной задаче. Задача с нагрузкой (1.2) является частным случаем задачи, решенной в [4]. На фиг. 1 представлена кинематика различных волновых фронтов, возникающих из-за отражения волны от краев трещины. Решение ищется в зонах, обозначенных цифрами 0, I, II.

Согласно [4] в зоне 0 выражения для τ_{yz} при $z = 0$ имеют вид

$$(1.3) \quad \tau_{10}(\xi_0, \eta_0) = \frac{p_0 \cos \varphi}{\pi \sqrt{\eta_0 - \eta_1(\xi_0)}} \int_{-\gamma_1 \xi_0 + \beta}^{\eta_1(\xi_0)} \frac{\sqrt{\eta_1(\xi_0) - \eta}}{\eta_0 - \eta} d\eta$$

$$\tau_{20}(\xi_0, \eta_0) = \frac{p_0 \cos \varphi}{\pi \sqrt{\xi_0 - \xi_1(\eta_0)}} \int_{-\gamma_1 \eta_0 + \beta_1}^{\xi_1(\eta_0)} \frac{\sqrt{\xi_1(\eta_0) - \xi}}{\xi_0 - \xi} d\xi$$

$$\xi = (t-x)/\sqrt{2}, \quad \eta = (t+x)/\sqrt{2}, \quad \xi_1 = \sqrt{2} + \eta, \quad \eta_1 = \sqrt{2} + \xi$$

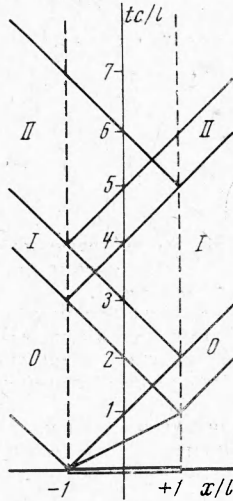
$$\gamma = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad \gamma_1 = \gamma^{-1}, \quad \beta = \frac{\sqrt{2} \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad \beta_1 = \frac{\sqrt{2} \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$$

где ξ, η — характеристические переменные, τ_{10}, τ_{20} есть значения τ_{yz} для правого и левого концов трещины соответственно. Взяв интегралы в (1.3), получим

$$(1.4) \quad \tau_{10}(\xi, \eta) = \frac{2p_0 \cos \varphi}{\pi} \left\{ \left[\frac{2\xi + \sqrt{2}(1-2\sin \varphi)}{(\eta - \xi - \sqrt{2})(1 - \sin \varphi)} \right]^{1/2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{2\xi + \sqrt{2}(1-2\sin \varphi)}{(\eta - \xi - \sqrt{2})(1 - \sin \varphi)} \right]^{1/2} \right\}$$

$$\tau_{20}(\xi, \eta) = \frac{2p_0 \cos \varphi}{\pi} \left\{ \left[\frac{2\eta + \sqrt{2}}{(\xi - \eta - \sqrt{2})(1 + \sin \varphi)} \right]^{1/2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{2\eta + \sqrt{2}}{(\xi - \eta - \sqrt{2})(1 + \sin \varphi)} \right]^{1/2} \right\}$$

Как видно из (1.3), (1.4), τ_{10} и τ_{20} имеют особенности порядка $(\Delta x)^{-1/2}$, где $\Delta x \ll 1$, при стремлении η_0 к η_1 (ξ_0 к ξ_1). В предельном случае можно



Фиг. 1

написать

$$(1.5) \quad \tau_{10}(\xi_0, \eta_1) = \frac{K_{10}(\xi_0)}{\sqrt{\Delta x}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} \left[\frac{1}{\pi 2^{3/4}} \int_{-\sqrt{\xi_0 + \beta}}^{\eta_1(\xi_0)} \frac{\tau(\xi_0, \eta)}{\sqrt{\eta_1(\xi_0) - \eta}} d\eta \right]$$

$$\tau_{20}(\xi_1, \eta_0) = \frac{K_{20}(\eta_0)}{\sqrt{\Delta x}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} \left[\frac{1}{\pi 2^{3/4}} \int_{-\sqrt{\eta_0 + \beta_1}}^{\xi_1(\eta_0)} \frac{\tau(\xi, \eta_0)}{\sqrt{\xi_1(\eta_0) - \xi}} d\xi \right]$$

$$(1.6) \quad K_{10}(\xi) = \frac{p_0}{\pi} 2^{3/4} [2\xi + \sqrt{2}(1 - 2 \sin \varphi)]^{1/2} \cos \beta$$

$$K_{20}(\eta) = \frac{p_0}{\pi} 2^{3/4} [2\eta + \sqrt{2}]^{1/2} \sin \beta \quad \left(\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

Здесь K_{10} и K_{20} — коэффициенты интенсивности при особенностях в носиках трещины при подходе к ним извне. Величины K_{10} и K_{20} являются монотонно возрастающими функциями своих аргументов, причем к моменту прихода первой отраженной волны от противоположного конца трещины, т. е. для K_{10} при $\xi = 1/\sqrt{2}$, а для K_{20} при $\eta = (1 + 2 \sin \varphi)/\sqrt{2}$ значения их совпадают и равны величине $(p_0/\pi) 2^{3/2} \sin 2\beta$. Отсюда видно, что с изменением φ от 0 до $\pi/2$ максимальное значение K_{10} и K_{20} меняется от $(p_0/\pi) 2^{3/2}$ до 0. При нормальном падении волны на трещину, т. е. при $\varphi = 0$, τ_{10} совпадает с τ_{20} .

В зонах I и II коэффициенты интенсивности напряжений рассчитывались по формулам

$$(1.7) \quad K_{11}(\xi_0) = \frac{2^{-1/4}}{\pi} \left\{ - \int_{-1/\sqrt{2}}^{\eta_2} \frac{\tau_{20}(\xi_0, \eta)}{\sqrt{\eta_1(\xi_0) - \eta}} d\eta + 2^{7/4} p_0 \cos \varphi \right\}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \xi_0 < \frac{3 + 2 \sin \varphi}{\sqrt{2}}$$

$$K_{12}(\xi_0) = \frac{2^{-1/4}}{\pi} \left\{ - \int_{-1/\sqrt{2}}^{\eta_*} \frac{\tau_{20}(\xi_0, \eta)}{\sqrt{\eta_1(\xi_0) - \eta}} d\eta - \right.$$

$$\left. - \int_{\eta_*}^{\eta_2} \frac{\tau_{21}(\xi_0, \eta)}{\sqrt{\eta_1(\xi_0) - \eta}} d\eta + 2^{7/4} p_0 \cos \varphi \right\}, \quad \frac{3 + 2 \sin \varphi}{\sqrt{2}} < \xi_0 < \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$K_{21}(\eta_0) = \frac{2^{-1/4}}{\pi} \left\{ - \int_{\xi_*}^{\xi_2} \frac{\tau_{10}(\xi, \eta_0)}{\sqrt{\xi_1(\eta_0) - \xi}} d\xi + 2^{7/4} p_0 \cos \varphi \right\}, \quad \frac{1 + 2 \sin \varphi}{\sqrt{2}} \leq \eta_0 < \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$K_{22}(\eta_0) = \frac{2^{-1/4}}{\pi} \left\{ - \int_{\xi_*}^{1/\sqrt{2}} \frac{\tau_{10}(\xi, \eta_0)}{\sqrt{\xi_1(\eta_0) - \xi}} d\xi - \right.$$

$$\left. - \int_{1/\sqrt{2}}^{\xi_2} \frac{\tau_{11}(\xi, \eta_0)}{\sqrt{\xi_1(\eta_0) - \xi}} d\xi + 2^{7/4} p_0 \cos \varphi \right\}, \quad \frac{3}{\sqrt{2}} < \eta_0 < \frac{5 + 2 \sin \varphi}{\sqrt{2}}$$

$$\tau_{11}(\xi_0, \eta_0) =$$

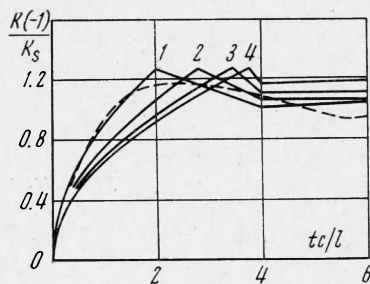
$$= \frac{1}{\pi \sqrt{\eta_0 - \eta_1}} \left\{ - \int_{-1/\sqrt{2}}^{\eta_2} \tau_{20}(\xi_0, \eta) \frac{\sqrt{\eta_1 - \eta}}{\eta_0 - \eta} d\eta + p_0 \cos \varphi \int_{\eta_2}^{\eta_1} \frac{\sqrt{\eta_1 - \eta}}{\eta_0 - \eta} d\eta \right\}$$

$$\tau_{21}(\xi_0, \eta_0) =$$

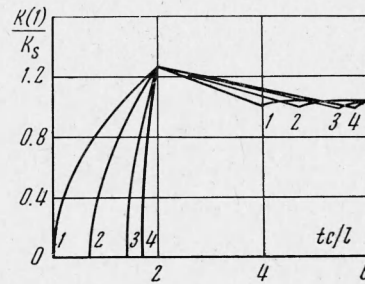
$$= \frac{1}{\pi \sqrt{\xi_0 - \xi_1}} \left\{ - \int_{\xi_*}^{\xi_2} \tau_{10}(\xi, \eta_0) \frac{\sqrt{\xi_1 - \xi}}{\xi_0 - \xi} d\xi + p_0 \cos \varphi \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\sqrt{\xi_1 - \xi}}{\xi_0 - \xi} d\xi \right\}$$

$$\eta_2 = -\sqrt{2} + \xi, \quad \xi_2 = -\sqrt{2} + \eta, \quad \xi_* = \frac{(2 \sin \varphi - 1)}{\sqrt{2}}, \quad \eta_* = \frac{(2 \sin \varphi + 1)}{\sqrt{2}}$$

В этих выражениях первый индекс указывает на конец трещины. Так, 1 соответствует правому концу $x = +1$, а 2 — левому $x = -1$; второй индекс обозначает зону, или количество пришедших отраженных волн. Выражения (1.7) считались численно. На фиг. 2, 3 представлены результаты численного счета изменения отношения коэффициента интенсивности напряжения к его статической величине во времени. Кривые на фиг. 2 отвечают левому концу $x = -1$, а на фиг. 3 — правому концу трещины $x = 1$. Кривые, обозначенные цифрами 1, 2, 3, 4, отвечают значениям $\varphi = 0, \pi/8, \pi/4, \pi/3$ соответственно. Из этих графиков видно, что коэффициенты интенсивности напряжений, отнесенные к своему статическому значению, вначале растут до 1.27, а потом, колеблясь, стремятся к единице. Это согласуется с решениями [1-3]. Для сравнения на фиг. 2 пунктирной линией изображено решение для нормально падающей волны, взятое из [2].



Фиг. 2



Фиг. 3

Отличие от кривой 1, соответствующей нормальному падению, можно объяснить ошибкой приближенных вычислений использованных для получения решения в [1].

С точки зрения разрушения оба конца трещины для волны типа ступеньки являются одинаково опасными. На дальнем конце трещины ($x = 1$) максимальные напряжения возникают раньше, следовательно, там и может начаться разрушение.

2. Дифракция на развивающейся трещине. Если напряжения, появляющиеся при дифракции волны на трещине, превышают критические, то трещина начинает расти. Закон движения конца трещины определяется уравнением [4]

$$(2.1) \quad \dot{x} = \frac{(r^4 - 8\pi T^2)}{(r^4 + 8\pi T^2)}, \quad r = \frac{\pi^{2/4} K}{\sqrt{1-x}}$$

Здесь T — энергия, необратимо теряющаяся при продвижении конца трещины на единицу длины; K — коэффициент интенсивности напряжений в носике трещины, который определяется по формулам, аналогичным приведенным в п. 1 для неподвижной трещины.

В дальнейшем предполагается, что $T = \text{const}$. Рассматривается случай нормального падения волны на трещину. Движение трещины начинается в момент $t = t_0$, при котором интенсивность напряжений достигает своего критического значения и $t_0^2 = \pi T^2 / 4p_0^4$. В силу симметрии можно ограничиться рассмотрением движения одного конца трещины. Закон движения правого конца записывается в виде

$$(2.2) \quad x(t) = 1 + t + [\pi/2 - 1 - 2 \arctg t/t_0] t_0$$

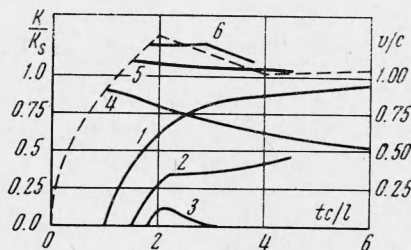
найденном в [4] для полубесконечной трещины. Закон этот справедлив и для трещины конечной длины до момента прихода волны от ее противопо-

ложного конца. Величину этого момента времени t_1 можно определить

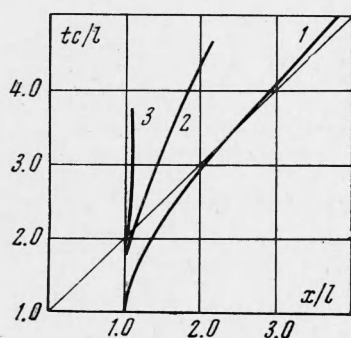
$$(2.3) \quad t_1 = t_0 \operatorname{tg} [1/t_0 + \pi/4 - 1/2]$$

При $t_0 = 4/(2 + \pi)$ это выражение обращается в бесконечность, т. е. при $t_0 \leq 4/(2 + \pi)$ волна от левого конца трещины не может догнать правый конец. В этом случае закон (2.2) выполняется во все время, пока напряжение в падающей волне держится на первоначальном уровне p_0 . Если $t_0 > 4/(2 + \pi)$, то при $t > t_0 \operatorname{tg} [1/t_0 + \pi/4 - 1/2]$ начнет сказываться влияние левого конца трещины. Исследуя зависимость ускорения трещины от t_0 , можно установить, что при $t_0 < 1.71$ движение носика трещины после первой дифракции продолжает ускоряться, а при $t_0 > 1.71$ начинает замедляться и может даже прекратиться.

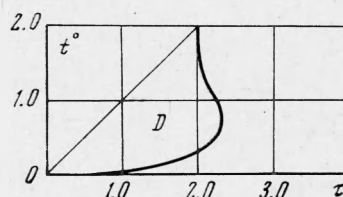
На фиг. 4 приведены графики изменения скорости развития трещины от времени для $t_0 = 1.0, 1.5, 1.8$ (кривые 1, 2, 3 соответственно), полученные численным интегрированием уравнения (2.1). Закон изменения коэффициента интенсивности напряжения от времени для приведенных значений t_0 изображен на фиг. 4 кривыми, обозначенными цифрами 4, 5, 6. Коэффициент интенсивности напряжения K отнесен к своему статическому значению $K_c = p_0 \sqrt{l/2}$, где $2l$ — начальная длина трещины. Пунктирная



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

линия на этом графике соответствует случаю неподвижной трещины. На фиг. 5 кривыми 1, 2, 3 в плоскости xt изображены траектории движения трещины для $t_0 = 1.0, 1.5, 1.8$. Прямая линия на фиг. 5 является траекторией волны, идущей из левого конца трещины.

Приведем некоторые оценки влияния длительности волны на конечный размер трещины. Предположим, что на трещину нормально падает прямоугольная волна длительностью τ . Окончательный размер трещины в этом случае определяется параметрами t_0 и τ .

Если $t_0 > 2$, что означает: коэффициент интенсивности напряжения не достигает своего критического значения, то трещина вообще не сдвинется с места. То же самое произойдет при $\tau \leq t_0$. На фиг. 6 в плоскости $t_0 \tau$ эти области покоя показаны штриховкой. Линия на фиг. 6 ограничивает область D состояний $t_0 \tau$, при которых остановка трещины произойдет до первой дифракции. Для этой области закон движения трещины после сня-

тия нагрузки при $t = \tau$ описывается уравнением

$$(2.4) \quad \dot{x} = [(\sqrt{t} - \sqrt{t - \tau})^4 - t_0^2][(\sqrt{t} - \sqrt{t - \tau})^4 + t_0^2]^{-1}$$

Остановка трещины происходит в момент $t_f = (\tau + t_0)^2/4t_0$. Прирост длины трещины после снятия нагрузки при $t = \tau$ до момента остановки равен

$$\Delta x = \frac{t_0^2 + \tau^2}{4t_0} \left(\arctg \frac{\tau}{t_0} - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\tau^2 - t_0^2}{4t_0}$$

Уравнение граничной кривой на фиг. 6 представляется в виде

$$(4 + \tau) t_0 - 2t_0^2 - \tau^2 + (\tau^2 - 3t_0^2) (\arctg \tau/t_0 - \pi/4) = 0$$

Вне указанной области получить решение в конечном виде не удастся. Можно только отметить, что при больших τ конечный размер трещины будет порядка τ , так как предельная скорость трещины равна единице.

Для полученных результатов существенным является предположение о постоянстве величины T . В некоторых экспериментальных работах по нормальному растяжению оптически-активных полимеров [5] было обнаружено, что T растет с ростом трещины. Как следствие этого, оказывается, что коэффициент интенсивности напряжений является также растущей функцией времени, а предельная скорость распространения трещины значительно меньше теоретически предельной — рэлеевской.

Поступила 4 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ravera R. S., Sih G. C.* Transient analysis of stress waves around cracks under anti-plane strain. *J. Acoust. Soc. America*, 1970, vol. 47, No. 3, pt. 1, pp. 875—881.
2. *Sih G. C., Embley G. T., Ravera R. S.* Impact response of a finite crack in plane extension. *Int. J. Solids and Struct.*, 1972, vol. 8, No. 7, pp. 977—993.
3. *Stephen A. Thau, Tsin-Hwei Lu.* Transient stress intensity factors for a finite crack in an elastic solid caused by a dilatational wave. *Int. J. Solids und Struct.*, 1971, vol. 7, No. 7, pp. 731—750.
4. *Костров Б. В.* Неустановившееся распространение трещины продольного сдвига. *ПММ*, 1966, т. 30, № 6.
5. *Wells A. A., Post D.* The dynamic stress distribution surrounding a running crack, a photoelastic analysis. *Proc. Exper. Stress Analysis*, 1958, vol. 16, No. 1.