

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 621.391

ОПТИМАЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАТОРЫ
ДЛЯ АЛГОРИТМА ОЦЕНИВАНИЯ ОРИЕНТАЦИИ
НА ОСНОВЕ ГРАДИЕНТНОГО СТРУКТУРНОГО ТЕНЗОРА*

И. С. Грузман

*Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Новосибирский государственный технический университет»,
630092, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20
E-mail: isgruzman@gmail.com*

Предложен способ построения оптимальных масочных дифференцирующих фильтров, минимизирующих уровень среднеквадратической или систематической ошибки оценивания ориентации анизотропной текстуры, наблюдаемой в присутствии аддитивного белого шума. Приведены результаты сравнительного анализа точности градиентных алгоритмов. Показано, что применение оптимальных дифференцирующих фильтров приводит к значительному повышению точности алгоритма оценивания ориентации.

Ключевые слова: оптимальные масочные дифференцирующие фильтры, градиентный структурный тензор.

Введение. Для оценки ориентации анизотропной текстуры широко используется градиентный структурный тензор (ГСТ) [1, 2]. Компоненты ГСТ представляют собой числовые характеристики производных по вертикальному и горизонтальному направлениям двумерной функции яркости [1, 2]. Алгоритмы на основе идеальных дифференциаторов обладают низкой помехоустойчивостью [3]. Поэтому при анализе цифровых изображений, искажённых шумом, в качестве дифференциаторов применяются помехоустойчивые масочные дифференцирующие фильтры (МДФ) — двумерные фильтры с конечной импульсной характеристикой.

Использование в качестве МДФ оператора Собела, сочетающего дифференцирование и усреднение в перпендикулярных направлениях двумерной функции яркости изображения, приводит к большим систематическим ошибкам (СО) оценивания ориентации [2, 3]. Для снижения уровня СО применяются оптимизированные дифференциаторы [2, 4, 5], аппроксимирующие идеальный дифференциатор с высокой точностью. В [6] предложен способ построения масочных дифференцирующих фильтров, минимизирующих уровень СО оценивания ориентации. Однако существующие методы построения МДФ не учитывают шумы, искажающие изображение. Кроме того, они не обеспечивают минимума среднеквадратической ошибки (СКО) оценивания ориентации, которая является универсальной количественной мерой эффективности оценок.

Цель данной работы — создание метода построения оптимальных МДФ, учитывающего влияние аддитивного белого шума наблюдения, а также свойств и размеров анализируемого фрагмента анизотропной текстуры на точность алгоритма оценивания ориентации на основе ГСТ.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-07-00077-а).

Алгоритм оценивания ориентации анизотропной текстуры на основе ГСТ с МДФ. При использовании МДФ вместо идеальных дифференциаторов компоненты ГСТ J_1 и J_2 , на основе которых вычисляется оценка ориентации [1, 2]

$$\tilde{\alpha} = 0,5 \arctg(J_1/J_2), \quad (1)$$

определяются следующими соотношениями:

$$J_1 = \frac{2}{N^2} \sum_{i_1=-n}^n \sum_{i_2=-n}^n (h_r(i_1, i_2) \otimes \lambda(i_1, i_2))(h_c(i_1, i_2) \otimes \lambda(i_1, i_2)), \quad (2)$$

$$J_2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i_1=-n}^n \sum_{i_2=-n}^n (h_c(i_1, i_2) \otimes \lambda(i_1, i_2))^2 - (h_r(i_1, i_2) \otimes \lambda(i_1, i_2))^2, \quad (3)$$

где $\lambda = \{\lambda(i_1, i_2), i_1 = \overline{-n, n}, i_2 = \overline{-n, n}\}$ — анализируемый фрагмент изображения размером $(2n+1) \times (2n+1) = N \times N$ элементов; h_r и h_c — импульсные характеристики (ИХ) МДФ размером $(2n_\partial+1) \times (2n_\partial+1) = N_\partial \times N_\partial$ элементов, дифференцирующих двумерную функцию яркости вдоль строк и столбцов дискретного изображения соответственно; \otimes — символ двумерной свёртки.

МДФ с разделимыми по координатам импульсными характеристиками. По аналогии с помехоустойчивым оператором Собела будем строить МДФ в классе разделимых фильтров, двумерные ИХ которых можно представить в виде произведения ИХ дифференцирующего $h_{\mathcal{D}}$ и сглаживающего $h_{\mathcal{S}}$ одномерных фильтров [2]:

$$h_c = h_{\mathcal{D}} h_{\mathcal{S}}^T, \quad (4)$$

$$h_r = h_c^T = h_{\mathcal{S}} h_{\mathcal{D}}^T, \quad (5)$$

где

$$h_{\mathcal{D}} = [d(n_\partial), \dots, d(2), d(1), 0, -d(1), -d(2), \dots, -d(n_\partial)]^T, \quad (6)$$

$$h_{\mathcal{S}} = [s(n_\partial), \dots, s(2), s(1), s(0), s(1), s(2), \dots, s(n_\partial)]^T. \quad (7)$$

Так же, как и оператор Собела, фильтры (4) и (5) сглаживают изображение в направлении, перпендикулярном дифференцированию. Поскольку величина оценки (1) не изменится при умножении ИХ (6) или (7) на произвольную положительную константу, то, не нарушая общности, далее примем, что $s(0) = 1$ и $d(1) = 1$, т. е.

$$h_{\mathcal{D}} = [d(n_\partial), \dots, d(2), 1, 0, -1, -d(2), \dots, -d(n_\partial)]^T, \quad (8)$$

$$h_{\mathcal{S}} = [s(n_\partial), \dots, s(2), s(1), 1, s(1), s(2), \dots, s(n_\partial)]^T. \quad (9)$$

Комплексные частотные характеристики дифференцирующего и сглаживающего масочных одномерных фильтров (8) и (9) соответственно имеют вид [2]

$$\mathcal{D}(f) = 2j(\sin(2\pi f) + \sum_{k=2}^{n_\partial} d_k \sin(2\pi k f)),$$

$$\mathcal{S}(f) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{n_\partial} s_k \cos(2\pi k f),$$

где j — мнимая единица.

Критерии оптимизации. Дисперсия и смещение оценки (1) зависят от величины оцениваемого угла α [3], поэтому при определении оптимальных коэффициентов $\mathbf{d} = \{d(i), i = \overline{2, n_\partial}\}$ и $\mathbf{s} = \{s(i), i = \overline{1, n_\partial}\}$ в (8) и (9) необходимо выполнить усреднение по α . При отсутствии априорной информации о преимущественных направлениях ориентации распределение оцениваемого угла α обычно полагают равномерным на интервале $(-\pi/2, \pi/2]$.

Оптимальные значения \mathbf{d} и \mathbf{s} определим путём минимизации СКО ε [7]:

$$\varepsilon_m = \min_{\mathbf{d}, \mathbf{s}} \varepsilon, \quad (10)$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{M\{(\alpha - \tilde{\alpha})^2\}} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D\{\tilde{\alpha}\} d\alpha + \delta^2}; \quad (11)$$

ε_m — наименьшее значение СКО среди величин ε для фильтров (8) и (9) при фиксированном значении n_∂ ;

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\alpha - M\{\tilde{\alpha}\})^2 d\alpha} \quad (12)$$

— систематическая ошибка оценки (1); $D\{\tilde{\alpha}\}$ и $M\{\tilde{\alpha}\}$ — дисперсия и математическое ожидание оценки (1), вычисленные при фиксированном значении α .

Наряду с СКО одной из важнейших характеристик оценок является СО, величину которой нельзя уменьшить путём усреднения оценок ориентации, полученных для локальных областей текстуры. Поэтому также рассмотрим синтез МДФ, удовлетворяющих критерию

$$\delta_m = \min_{\mathbf{d}, \mathbf{s}} \delta, \quad (13)$$

где δ_m — наименьшее значение СО среди величин δ для фильтров (8) и (9) при фиксированном значении n_∂ .

Следует отметить, что в [6] критерий (13) уже применялся для построения МДФ. Отличительной особенностью метода синтеза, предлагаемого в данной работе, является то, что он учитывает шумы наблюдения, оказывающие существенное влияние на СКО и СО при анализе изображений, сильно искажённых шумами.

Синтез МДФ будем выполнять в частотной области. Из соотношений (2) и (3) следует, что J_2 представляет собой разность мощностей изображений, формируемых МДФ h_r и h_c , а J_1 — удвоенный взаимный корреляционный момент этих изображений. Следовательно, соотношения для вычисления компонент ГСТ J_1 и J_2 с помощью МДФ с точностью до константы, не влияющей на величину оценки ориентации (1), можно представить в виде [8]

$$J_1 = 2 \sum_{k_1 = -n}^n \sum_{k_2 = -n}^n H_r(f_1, f_2) H_c^*(f_1, f_2) G_\lambda(f_1, f_2), \quad (14)$$

$$J_2 = \sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=-n}^n |H_c(f_1, f_2)|^2 G_{\lambda}(f_1, f_2) - \sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=-n}^n |H_r(f_1, f_2)|^2 G_{\lambda}(f_1, f_2), \quad (15)$$

где

$$H_c(f_1, f_2) = F_2\{h_c(i_1, i_2)\} = \mathcal{D}(f_1)\mathcal{S}(f_2),$$

$$H_r(f_1, f_2) = F_2\{h_r(i_1, i_2)\} = \mathcal{S}(f_1)\mathcal{D}(f_2)$$

— комплексные частотные характеристики (КЧХ) h_c и h_r дифференцирующих фильтров; $F_2\{\cdot\}$ — двумерное дискретное преобразование Фурье (ДПФ); «*» — символ комплексного сопряжения; $G_{\lambda}(f_1, f_2)$ — выборочный двумерный спектр мощности анализируемого фрагмента λ , вычисленный с помощью ДПФ; $f_i = k_i/N$, $i = \overline{1, 2}$, — пространственные частоты.

С учётом симметрии спектра мощности $G_{\lambda}(f_1, f_2)$ и КЧХ дифференцирующих фильтров выражения (14) и (15) представим в виде

$$J_1 = 4 \sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=1}^n H_1(f_1, f_2) G_{\lambda}(f_1, f_2), \quad (16)$$

$$J_2 = 2 \left(\sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=1}^n H_2(f_1, f_2) G_{\lambda}(f_1, f_2) + \sum_{k_1=1}^n H_2(f_1, 0) G_{\lambda}(f_1, 0) \right), \quad (17)$$

где

$$H_1(f_1, f_2) = H_r(f_1, f_2) H_c^*(f_1, f_2);$$

$$H_2(f_1, f_2) = |H_c(f_1, f_2)|^2 - |H_r(f_1, f_2)|^2.$$

Очевидно, что соотношения для вычисления компонент ГСТ с помощью МДФ в частотной области аналогичны соотношениям для вычисления компонент ГСТ с помощью идеального дифференциатора [1], поэтому воспользуемся приближённым методом вычисления СО и СКО алгоритма оценивания ориентации на основе ГСТ, предложенным в [9].

В этой работе показано, что компоненты ГСТ J_1 и J_2 являются приближённо совместно гауссовскими случайными величинами, если фрагмент λ представляет собой аддитивную смесь квазидетерминированной двумерной функции

$$\mathbf{z} = \left\{ z(i_1, i_2) = \sum_{l=1}^L A_l \cos(2\pi(\Omega_l i_1 \cos \alpha + \Omega_l i_2 \sin \alpha) + \phi_l), \quad i_1 = \overline{-n, n}, \quad i_2 = \overline{-n, n} \right\} \quad (18)$$

(здесь частоты $0 < \Omega_l < 0,5$, начальные фазы ϕ_l и амплитуды A_l — произвольные неслучайные величины) и дискретного гауссовского белого шума $\boldsymbol{\eta} = \{\eta(i_1, i_2), i_1 = \overline{-n, n}, i_2 = \overline{-n, n}\}$ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $D_{\boldsymbol{\eta}}$.

Двумерная функция (18) обладает линейной симметрией [1] (изолинии являются параллельными прямыми, ориентация которых определяется углом α) и в большинстве практических случаев может быть использована для аппроксимации функции яркости анизотропной текстуры в локальной области.

Используя соотношения, полученные в [9], нетрудно показать, что при применении МДФ вместо идеального дифференциатора математические ожидания, дисперсии и взаимно ковариационный момент J_1 и J_2 выражаются как

$$m_1 = M\{J_1\} = 4 \sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=1}^n H_1(f_1, f_2) G_{\mathbf{z}}(f_1, f_2), \quad (19)$$

$$m_2 = M\{J_2\} = 2 \left(\sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=1}^n H_2(f_1, f_2) G_{\mathbf{z}}(f_1, f_2) + \sum_{k_1=1}^n H_2(f_1, 0) G_{\mathbf{z}}(f_1, f_2) \right), \quad (20)$$

$$R_{11} = D\{J_1\} = 16 \sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=1}^n H_1(f_1, f_2)^2 D\{G_{\lambda}(f_1, f_2)\}, \quad (21)$$

$$R_{22} = D\{J_2\} = 4 \left(\sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=1}^n H_2(f_1, f_2)^2 D\{G_{\lambda}(f_1, f_2)\} + \sum_{k_1=1}^n H_2(f_1, 0)^2 D\{G_{\lambda}(f_1, 0)\} \right), \quad (22)$$

$$R_{12} = \text{cov}\{J_1 J_2\} = 8 \sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=1}^n H_1(f_1, f_2) H_2(f_1, f_2) D\{G_{\lambda}(f_1, f_2)\}, \quad (23)$$

где

$$D\{G_{\lambda}(f_1, f_2)\} = \begin{cases} D_{\eta}^2 + 2D_{\eta}G_{\mathbf{z}}(f_1, f_2) & \text{при } f_1 \neq 0 \text{ и } f_2 \neq 0, \\ 2D_{\eta}^2 + 2D_{\eta}G_{\mathbf{z}}(f_1, f_2) & \text{при } f_1 = 0 \text{ и } f_2 = 0 \end{cases} \quad (24)$$

— дисперсия отсчётов $G_{\lambda}(f_1, f_2)$;

$$G_{\mathbf{z}}(f_1, f_2) = \left| \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L A_l (W(f_1 - \Omega_l \cos \alpha, f_2 - \Omega_l \sin \alpha) \exp(j\phi_l) + W(f_1 + \Omega_l \cos \alpha, f_2 + \Omega_l \sin \alpha) \exp(-j\phi_l)) \right|^2 \quad (25)$$

— выборочный двумерный спектр мощности текстуры (18);

$$W(f_1, f_2) = \prod_{i=1}^2 \frac{\sin \pi f_i N}{N \sin \pi f_i}$$

— нормированная частотная характеристика двумерного прямоугольного окна [10].

Разложив (1) в двумерный ряд Тейлора второго порядка по степеням $(J_1 - m_1)$ и $(J_2 - m_2)$ в окрестности точки (m_1, m_2) , соотношения для вычисления математического ожидания $M\{\tilde{\alpha}\}$ и дисперсии $D\{\tilde{\alpha}\}$ оценки (1) представим в виде [9]

$$M\{\tilde{\alpha}\} \approx b_{00} + b_{11}R_{12} + b_{20}R_{11} + b_{02}R_{22}, \quad (26)$$

$$D\{\tilde{\alpha}\} \approx b_{10}^2 R_{11} + b_{01}^2 R_{22} + b_{11}^2 (R_{11} R_{22} + R_{12}^2) + 2(b_{20}^2 R_{11}^2 + b_{02}^2 R_{22}^2 + b_{01} b_{10} R_{12}) + \\ + 4R_{12}(b_{20} b_{11} R_{11} + b_{02} b_{11} R_{22} + b_{02} b_{20} R_{12}), \quad (27)$$

где

$$b_{00} = 0,5 \operatorname{arctg} \frac{m_1}{m_2}; \quad b_{10} = \frac{m_2}{2(m_1^2 + m_2^2)};$$

$$b_{01} = -\frac{m_1}{2(m_1^2 + m_2^2)}; \quad b_{02} = -b_{20} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1^2 + m_2^2)^2}; \quad b_{11} = \frac{m_1^2 - m_2^2}{2(m_1^2 + m_2^2)^2}.$$

Подставив (26) и (27) в формулы (11) и (12), получим соотношения, устанавливающие связь между характеристиками текстуры, дисперсией белого шума, КЧХ масочных дифференцирующих фильтров, размерами анализируемого фрагмента, с одной стороны, и среднеквадратической и систематической ошибками оценки ориентации (1), с другой стороны. Эти соотношения применим к вычислению оптимальных значений \mathbf{d} и \mathbf{s} , удовлетворяющих критерию (10) или (13).

Результаты экспериментальных исследований. Синтез оптимальных \mathbf{d} и \mathbf{s} проводился для анизотропной текстуры

$$\mathbf{z} = \{z(i_1, i_2) = A \cos(2\pi(\Omega i_1 \cos \alpha + \Omega i_2 \sin \alpha)), \quad i_1 = \overline{-n, n}, i_2 = \overline{-n, n}\} \quad (28)$$

при частоте $\Omega = 0,35$.

В табл. 1 и 2 приведены оптимальные значения коэффициентов \mathbf{d} и \mathbf{s} , вычисленные для двух критериев при отношениях сигнал/шум $q = A/\sqrt{2D_\eta} = 0,5$ (см. табл. 1) и $q = 2,5$ (см. табл. 2), где $A/\sqrt{2}$ — эффективное значение гармонического двумерного сигнала (28). Размер фрагмента изображения 17×17 элементов. Из этих данных следует, что оптимальные значения коэффициентов МДФ зависят как от выбранного критерия, так и от размеров МДФ. С увеличением отношения сигнал/шум значения коэффициентов одномерного сглаживающего фильтра уменьшаются по сравнению с $s(0) = 1$, что соответствует расширению его полосы пропускания, при этом значения коэффициентов одномерного дифференцирующего фильтра возрастают.

Таблица 1

Коэффициент МДФ	N_∂					
	3		5		7	
	Критерий					
	$\min \varepsilon$	$\min \delta$	$\min \varepsilon$	$\min \delta$	$\min \varepsilon$	$\min \delta$
$s(1)$	0,306	0,316	0,194	0,184	0,304	0,331
$s(2)$	—	—	-0,023	-0,229	-0,126	-0,102
$s(3)$	—	—	—	—	0,0565	0,057
$d(2)$	—	—	-0,154	-0,216	-0,208	-0,393
$d(3)$	—	—	—	—	0,111	0,117

Таблица 2

Коэффициент МДФ	N_∂					
	3		5		7	
	Критерий					
	$\min \varepsilon$	$\min \delta$	$\min \varepsilon$	$\min \delta$	$\min \varepsilon$	$\min \delta$
$s(1)$	0,318	0,319	0,225	0,142	0,097	-0,158
$s(2)$	—	—	-0,202	-0,188	-0,105	0,058
$s(3)$	—	—	—	—	0,062	0,076
$d(2)$	—	—	-0,195	-0,253	-0,369	-0,595
$d(3)$	—	—	—	—	0,113	0,236

Поскольку метод определения СКО и СО является приближённым, то эффективность оптимальных МДФ проверялась методом компьютерного моделирования. Значения СКО и СО вычислялись путём усреднения по $5 \cdot 10^4$ тестовым изображениям для каждого значения отношения сигнал/шум q при независимых реализациях аддитивного дискретного белого гауссовского шума от изображения к изображению. Значение α в (28) менялось случайным образом от изображения к изображению в соответствии с равномерным распределением в диапазоне $(-\pi/2, \pi/2]$.

Зависимости среднеквадратической ошибки оценивания ε_m (в градусах) от отношения сигнал/шум для различных размеров МДФ и размеров анализируемого фрагмента показаны на рис. 1. Сплошные линии соответствуют СКО для фрагмента изображения размером 11×11 элементов, штриховые — 17×17 элементов. Очевидно, что увеличение размеров маски оптимальных МДФ приводит к уменьшению СКО более чем в 1,5 раза. Также уменьшить СКО можно за счёт увеличения размеров анализируемого фрагмента. Однако это увеличение ухудшает точность локализации границ анизотропных областей при анализе реальных изображений, обычно содержащих области с различной ориентацией текстуры.

На рис. 2 показаны зависимости оптимальных значений СО δ_m (сплошные линии) и значений СО δ (штрихпунктирные линии), полученных для масочных дифференцирующих фильтров, оптимальных в смысле минимума СКО (10), от отношения сигнал/шум

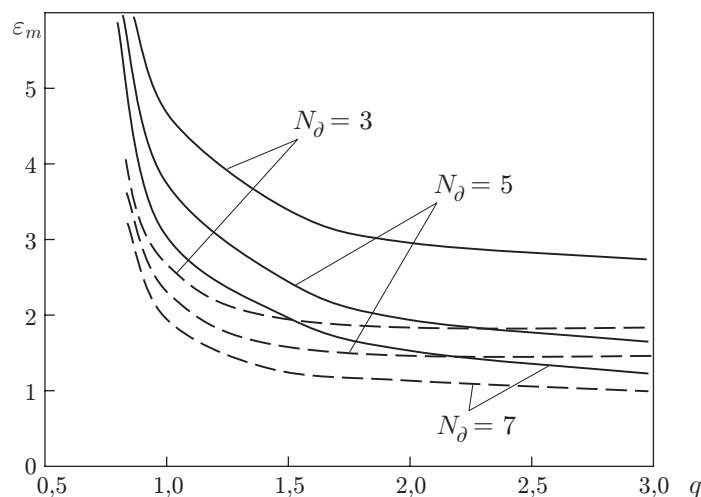


Рис. 1

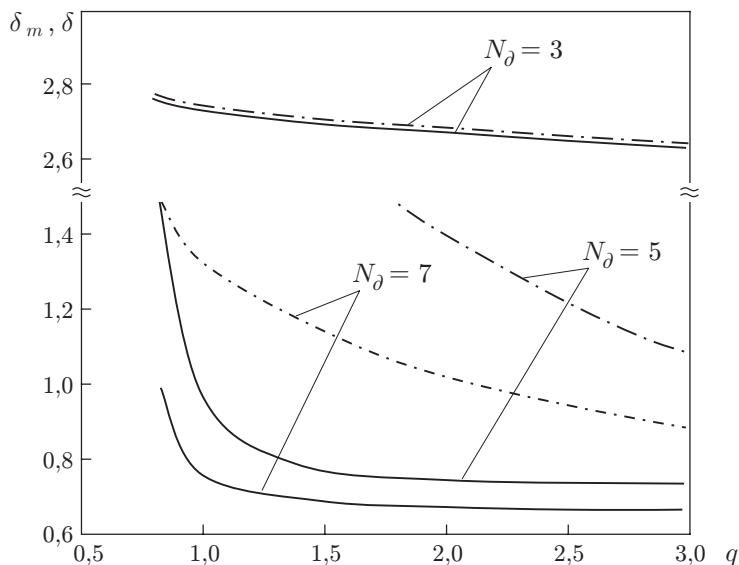


Рис. 2

для фрагмента изображения размером 11×11 элементов. Из этих зависимостей следует, что использование оптимальных МДФ, удовлетворяющих критерию (10), приводит к значительному увеличению СО по сравнению с минимально возможными значениями.

Экспериментальные исследования показали, что если минимизируется СО, то возрастает СКО за счёт роста дисперсии оценки. Кроме того, при увеличении размеров фрагментов до 17×17 элементов СО изменяется незначительно.

Таким образом, критерий (10) целесообразно применять, если требуется обеспечить максимальную точность оценки ориентации. Если необходимо получить оценку ориентации с минимально возможной систематической ошибкой, то следует использовать критерий (13). При этом дисперсия оценки может быть уменьшена путём усреднения оценок ориентации, полученных для различных фрагментов одной и той же анизотропной текстуры, или за счёт увеличения размеров анализируемого фрагмента.

Заключение. В данной работе предложен способ построения оптимальных помехоустойчивых МДФ, основанный на минимизации среднеквадратической или систематической ошибки градиентных алгоритмов оценивания ориентации анизотропной текстуры. Отличительной особенностью метода является учёт шумов, искажающих анализируемую текстуру. Показано, что использование этих критериев приводит к различным МДФ и, как следствие, к разным характеристикам эффективности алгоритмов оценивания. Минимизация среднеквадратической ошибки приводит к увеличению систематической ошибки, и наоборот. Экспериментальные исследования показали, что применение оптимальных МДФ обеспечивает значительное улучшение характеристик оценки ориентации, соответствующих принятому критерию оптимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bigun J.** Vision with Direction: A Systematic Introduction to Image Processing and Computer Vision. Berlin: Springer-Verlag, 2006. 396 p.
2. **Яне Б.** Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2007. 584 с.
3. **Грузман И. С., Карпушин В. Б.** Анализ систематических ошибок алгоритма построения поля направлений на основе спектральных моментов // Доклады АН ВШ РФ. 2008. № 1(10). С. 73–82.

-
4. **Jahne В., Haubecker Н., Geibler Р.** Handbook of Computer Vision and Applications. Vol. 2: Signal Processing and Pattern Recognition. San Diego: Academic Press, 1999. 942 p.
 5. **Farid Н., Simoncelli Е. Р.** Differentiation of discrete multidimensional signals // IEEE Trans. Image Processing. 2004. **13**, N 4. P. 496–508.
 6. **Грузман И. С., Карпушин В. Б.** Синтез градиентных алгоритмов с минимальной систематической ошибкой оценивания поля направлений // Автометрия. 2010. **46**, № 1. С. 3–11.
 7. **Бендат Дж., Пирсол А.** Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989. 540 с.
 8. **Гонсалес Р., Вудс Р.** Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2006. 1072 с.
 9. **Грузман И. С.** Эффективность оценки ориентации анизотропной текстуры на основе градиентного структурного тензора // Автометрия. 2011. **47**, № 6. С. 3–10.
 10. **Марпл-мл. С. Л.** Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с.

Поступила в редакцию 14 сентября 2011 г.
