

УДК 532.591+532.526

СЛОЙ СМЕШЕНИЯ ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В. Ю. Ляпидевский, А. А. Чесноков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mails: liapid@hydro.nsc.ru, chesnokov@hydro.nsc.ru

В приближении длинных волн рассматривается течение однородной жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести. Выведены математические модели развития приповерхностного турбулентного слоя в течениях со сдвигом скорости. Построены стационарные решения задачи об эволюции слоя смешения под свободной поверхностью и о формировании поверхностной турбулентной струи. В частности, решена задача о структуре турбулентного бора в сверхкритическом течении и исследованы условия формирования локальной докритической зоны перед препятствием.

Ключевые слова: уравнения мелкой воды, слой смешения, турбулентный бор, обрушение волн.

Введение. Процессы обрушения поверхностных волн, развития гидравлических прыжков и турбулентных боров являются особенностями течений жидкости в реках и каналах. В рамках классической гидравлики открытых русел гидравлические прыжки описываются разрывными решениями уравнений мелкой воды. Такие решения являются аналогом ударных волн в газовой динамике. Однако, в отличие от нелинейных волн в газах, в гидравлическом прыжке область перехода от сверхкритического к докритическому течению имеет сложную структуру и может занимать достаточно большую область рассматриваемого течения [1]. Развитие экспериментальных методов визуализации течений и измерения скорости в области турбулентного течения позволило выявить существенную неоднородность вертикального распределения скорости в зоне обрушения волн [2–4]. Поэтому при построении достаточно простой математической модели, позволяющей в приближении мелкой воды описать структуру гидравлического прыжка, необходимо учитывать эту неоднородность.

Математическая модель турбулентного бора, основанная на использовании полных законов сохранения массы, импульса и энергии для описания непрерывного перехода от сверхкритического к докритическому течению в гидравлическом прыжке, построена в работах [5, 6]. Эта модель, использующая заданный “универсальный” профиль скорости в верхнем неоднородном слое, пригодна для расчета нелинейных волн, распространяющихся с известной скоростью D , в частности для анализа стационарных гидравлических прыжков, так как локальная скорость бора D входит в число определяющих параметров модели.

В работах [7, 8] построена новая модель распространения длинных нелинейных возмущений в открытых каналах, учитывающая внутреннюю неоднородность течения при

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-00249), Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 2012-1.5-8503) и в рамках программы Президиума РАН (проект № 23.2).

обрушении волн. Модель основана на использовании осредненных уравнений вихревой мелкой воды, полученных в [9], и представляет структуру гидравлических прыжков и боров в течениях тонких слоев жидкости над неровным дном и в наклонных каналах. При использовании данного подхода решение, описывающее турбулентный бор, состоит из разрыва, за которым генерируется средняя завихренность потока, и основной непрерывной зоны, в которой происходит трансформация вихревого течения в равномерный поток. Сравнение построенных профилей в гидравлическом прыжке и экспериментальных данных при одних и тех же числах Фруда набегающего потока показывает, что результаты для случая развитых турбулентных прыжков хорошо согласуются. Кроме того, численная реализация задачи о формировании турбулентного бора в сверхкритическом потоке показала неустойчивость стационарного решения и выход течения на определенный нестационарный колебательный режим, близкий к построенному стационарному течению.

Еще один подход к моделированию процесса обрушения поверхностных волн в гидравлических прыжках и борах основан на применении к течениям однородной жидкости теории многослойной мелкой воды с учетом турбулентного перемешивания, построенной в [10] для стратифицированных течений. В рамках данного подхода турбулентный бор представляется в виде непрерывного решения уравнений двухслойной мелкой воды, в котором на фронте невозмущенного потенциального течения развивается приповерхностный турбулентный слой, достигающий дна [11]. Такая схема течения соответствует современным экспериментальным представлениям о механизме обрушения поверхностных волн в случае, когда положение свободной границы является однозначной функцией пространственных переменных, т. е. для так называемых растекающихся боров [3]. Заметим, что турбулентный бор может рассматриваться как предельный случай эволюции слоя смешения в приповерхностную турбулентную струю в результате развития сдвиговой неустойчивости течения [12, 13]. Уравнения трехслойной мелкой воды, описывающие динамику слоя смешения под свободной поверхностью, представлены в [10, 14]. При выводе данной модели, которую будем называть моделью I, использована гипотеза гидростатичности распределения полного давления в турбулентном слое.

Целью настоящей работы является вывод и анализ уравнений трехслойного течения под свободной поверхностью с учетом завихренности промежуточного слоя (модель II), а также сравнение решений задачи об эволюции слоя смешения и структуре турбулентного бора для моделей I, II.

1. Уравнения движения. Плоскопараллельное сдвиговое течение тонкого слоя идеальной однородной жидкости со свободной границей в поле силы тяжести над неровным дном в длинноволновом приближении описывается системой уравнений [15]

$$\begin{aligned} U_t + UU_x + VU_y + gH_x &= -gz_x, & U_x + V_y &= 0, \\ Y_t + UY_x - V|_{y=Y} &= 0, & Uz_x - V|_{y=z} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x, y — пространственные переменные; t — время; U, V — компоненты вектора скорости; H — толщина слоя жидкости со свободной границей $y = Y(t, x)$; уравнением $y = z(x)$ задан рельеф дна; g — ускорение свободного падения. Система уравнений (1) исследовалась во многих работах. Значительная часть известных теоретических результатов для модели вихревой мелкой воды содержится в [10]. В работах [7, 9] для моделирования слабосдвиговых течений жидкости предложены осредненные по толщине уравнения газодинамического типа. При этом вихревые свойства течения характеризуются в терминах среднеквадратичного отклонения профиля скорости от ее среднего значения по всей толщине слоя. Данные экспериментов [2, 3] показывают, что границы, разделяющие области потенциального и турбулентного движения, являются достаточно четкими. Поэтому для

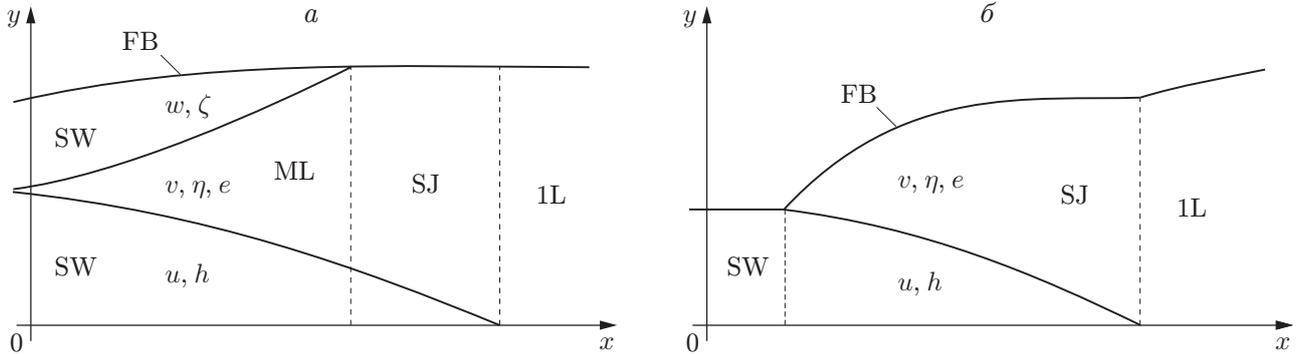


Рис. 1. Трехслойная (а) и двухслойная (б) схемы течения:
 FB — свободная граница, ML — слой смешения, SJ — поверхностная струя,
 1L — область однослойного течения, SW — область потенциального течения

моделирования развития неустойчивости Кельвина — Гельмгольца и формирования турбулентного слоя смешения целесообразно использовать предложенную ниже трехслойную схему течения.

Будем считать, что в придонном и приповерхностном слоях течение тонкого слоя жидкости является потенциальным ($U_y = 0$) с горизонтальными скоростями $u(t, x)$, $w(t, x)$ и толщинами $h(t, x)$, $\zeta(t, x)$ (рис. 1, а). В промежуточном слое толщиной $\eta(t, x)$, в который вовлекается жидкость из потенциальных слоев, вихревое течение характеризуется средней скоростью $v(t, x)$ и величинами $e(t, x) = e_1 + e_2$, $P(t, x) = \eta e_2$, где

$$v = \frac{1}{\eta} \int_{h+z}^{Y-\zeta} U dy, \quad e_1 = \frac{1}{\eta} \int_{h+z}^{Y-\zeta} U'^2 dy, \quad e_2 = \frac{1}{\eta} \int_{h+z}^{Y-\zeta} (U - v)^2 dy,$$

U' — пульсационная составляющая горизонтальной скорости в завихренном слое. Скорость вовлечения жидкости в турбулентную прослойку будем полагать пропорциональной скорости “больших вихрей” $q = \sqrt{\bar{e}}$, а диссипацию турбулентной кинетической энергии — пропорциональной q^3 .

В сделанных предположениях трехслойная модель развития слоя смешения имеет вид

$$\begin{aligned} h_t + (uh)_x &= -\sigma q, & \zeta_t + (w\zeta)_x &= -\sigma q, & \eta_t + (v\eta)_x &= 2\sigma q, \\ u_t + (u^2/2 + gH)_x &= -gz_x, & w_t + (w^2/2 + gH)_x &= -gz_x, \\ \bar{Q}_t + (u^2h + v^2\eta + w^2\zeta + gH^2/2 + P)_x &= -gH z_x, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (u^2h + (v^2 + e)\eta + w^2\zeta + gH^2)_t + (u^3h + (v^2 + e)v\eta + w^3\zeta + 2Pv + 2g\bar{Q}H)_x = \\ = -2g\bar{Q}z_x - \theta q^3, \end{aligned}$$

где $H = h + \eta + \zeta$ и $\bar{Q} = uh + v\eta + w\zeta$ — толщина и полный расход слоя жидкости; σ , θ — эмпирические постоянные.

Уравнения (2) будем рассматривать для двух случаев: $e_1 \neq 0$, $e_2 = 0$ (модель I) и $e_1 = 0$, $e_2 \neq 0$ (модель II). Следует отметить, что только в этих случаях система уравнений (2) является замкнутой (в случае $e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$ требуется дополнительное замыкающее соотношение). Модель I построена в работах [10, 14]; ниже приводится вывод модели II на основе подхода, предложенного в [9].

1.1. *Вывод модели II.* Из системы уравнений длинных волн (1) следует, что уравнения импульса в придонном и приповерхностном слоях, а также законы баланса массы имеют вид

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + gH_x &= -gz_x, & w_t + ww_x + gH_x &= -gz_x, \\ h_t + (uh)_x &= -\sigma q, & \zeta_t + (w\zeta)_x &= -\sigma q, & \eta_t + (v\eta)_x &= 2\sigma q, \end{aligned} \quad (3)$$

где $q = \sqrt{e_2}$. С учетом тождества $U = v + (U - v)$ вычислим интегралы

$$\int_{z+h}^{Y-\zeta} U^2 dy = (v^2 + e_2)\eta, \quad \int_{z+h}^{Y-\zeta} U^3 dy = (v^2 + 3e_2)v\eta + P_3, \quad P_3 = \int_{z+h}^{Y-\zeta} (U - v)^3 dy.$$

Согласно [7, 9] величина P_3 является малой ($P_3 = O(\varepsilon^{3\beta}) \ll \eta e = O(\varepsilon^{2\beta})$) и может быть опущена, если начальные данные для системы (1) удовлетворяют условию слабой завихренности $U_y = O(\varepsilon^\beta)$, $0 < \beta < 1$. (Здесь $\varepsilon \ll 1$ — длинноволновый параметр (отношение толщины слоя жидкости к длине волны).) Поскольку при выводе уравнений длинных волн допускается погрешность порядка $O(\varepsilon^2)$, при $\beta > 1$ движение тонкого слоя жидкости со свободной границей можно описывать классическими уравнениями мелкой воды.

Первое уравнение системы (1), а также это уравнение, умноженное на U , проинтегрируем по промежуточной прослойке. Учитывая вытекающие из (1) равенства

$$\begin{aligned} V_y &= -U_x, & U|_{y=z+h} &= u, & V|_{y=z+h} &= uz_x - hu_x, \\ U|_{y=Y-\zeta} &= w, & V|_{y=Y-\zeta} &= uz_x - hu_x - \int_{z+h}^{Y-\zeta} U_x dy \end{aligned}$$

и соотношения баланса массы (последние три уравнения в (3)), получаем уравнения импульса и энергии для турбулентной прослойки

$$\begin{aligned} (v\eta)_t + ((v^2 + e_2)\eta)_x + g\eta H_x &= (u + w)\sigma q - g\eta z_x, \\ ((v^2 + e_2)\eta)_t + ((v^2 + 3e_2)v\eta)_x + 2gv\eta H_x &= (u^2 + w^2)\sigma q - 2gv\eta z_x - \theta q^3. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что слагаемое $-\theta q^3$ в правой части второго уравнения (4) учитывает диссипацию турбулентной кинетической энергии ($\theta = \text{const}$).

Уравнения (3), (4) формируют замкнутую систему для определения параметров течения в потенциальных слоях и турбулентной прослойке. При $e_1 = 0$, $e = e_2$ данная система приводится к дивергентному виду (2).

1.2. *Двухслойная и однослойная модели.* В случае отсутствия одного или обоих потенциальных слоев система уравнений (2) упрощается. Пусть $\zeta = 0$, $w = 0$, что соответствует двухслойной схеме течения и формированию поверхностной турбулентной струи (см. рис. 1,б). Уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} h_t + (uh)_x &= -\sigma q, & \eta_t + (v\eta)_x &= \sigma q, & u_t + (u^2/2 + gH)_x &= 0, \\ \bar{Q}_t + (u^2h + v^2\eta + gH^2/2 + P)_x &= -gHz_x, \\ (u^2h + (v^2 + e)\eta + gH^2)_t + (u^3h + (v^2 + e)v\eta + 2Pv + 2g\bar{Q}H)_x &= -\theta q^3. \end{aligned} \quad (5)$$

Как и выше, рассматриваются лишь два случая: $e_2 = 0$ (модель I) и $e_1 = 0$ (модель II). Для простоты уравнения записаны для ровного дна ($z = \text{const}$).

В однослойном случае также будем полагать $h \equiv 0$, $u \equiv 0$, тогда модель (5) редуцируется к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \eta_t + (v\eta)_x &= 0, & (v\eta)_t + (v^2\eta + g\eta^2/2 + P)_x &= 0, \\ ((v^2 + e)\eta + g\eta^2)_t + ((v^2 + e)v\eta + 2Pv + 2gv\eta^2)_x &= -\theta q^3. \end{aligned} \quad (6)$$

При $e_2 = 0$ (модель I) система (6) сводится к классическим уравнениям теории мелкой воды, поскольку последнее уравнение энергии становится независимым и величина e_1 не оказывает влияния на профиль волны и скорость течения. В случае $e_1 = 0$ (модель II) система (6) сводится к уравнениям мелкой воды для слабосдвиговых течений [7, 9].

1.3. *Дифференциальные следствия.* Для дальнейшего анализа уравнений движения и проведения расчетов получим ряд следствий. В силу системы уравнений (2) средняя скорость потока v в слое смешения удовлетворяет уравнению

$$v_t + vv_x + gH_x + \eta^{-1}P_x = \sigma q\eta^{-1}(u - 2v + w) - gz_x. \quad (7)$$

Для моделей I и II уравнения для энергии e можно представить различными способами. В случае $e_2 = 0$ получаем

$$e_t + ve_x = \sigma q\eta^{-1}((u - v)^2 + (w - v)^2 - (2 + \delta)e), \quad (8)$$

в случае $e_1 = 0$ имеем

$$\left(\frac{e}{\eta^2}\right)_t + v\left(\frac{e}{\eta^2}\right)_x = \frac{\sigma q}{\eta^3}((u - v)^2 + (w - v)^2 - (6 + \delta)e). \quad (9)$$

Здесь и далее $\delta = \theta/\sigma$.

Для уравнений двухслойного течения (5) получаем следующие дифференциальные следствия для средней скорости v и энергии e :

$$\begin{aligned} v_t + vv_x + gH_x + \eta^{-1}P_x &= \sigma q\eta^{-1}(u - v), \\ e_t + ve_x &= \sigma q\eta^{-1}((u - v)^2 - (1 + \delta)e) \quad (e_2 = 0), \\ \left(\frac{e}{\eta^2}\right)_t + v\left(\frac{e}{\eta^2}\right)_x &= \frac{\sigma q}{\eta^3}((u - v)^2 - (3 + \delta)e) \quad (e_1 = 0). \end{aligned} \quad (10)$$

Как указано выше, система (6) представляет собой модель однослойной мелкой воды, из которой следуют уравнения для v и e

$$\begin{aligned} v_t + vv_x + g\eta_x + \eta^{-1}P_x &= 0, \\ e_t + ve_x &= -\theta\eta^{-1}e^{3/2} \quad (e = e_1), \\ (\eta^{-2}e)_t + v(\eta^{-2}e)_x &= -\theta\eta^{-3}e^{3/2} \quad (e = e_2). \end{aligned}$$

Уравнения однослойного течения (6) являются гиперболическими и имеют одну контактную $dx/dt = v$ и две “звуковые” характеристики

$$\frac{dx}{dt} = v \pm \sqrt{g\eta + 3e_2},$$

определяющие скорость распространения поверхностных волн малой амплитуды.

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнения (2), (5) описывают трехслойные и двухслойные течения однородной жидкости со сдвигом скорости, в частности эволюцию контактного разрыва. Неустойчивость Кельвина — Гельмгольца, характерная для сдвиговых течений однородной жидкости, учитывается в уравнениях (2), (5) путем введения величин e , P , $q = \sqrt{e}$, определяющих процесс вовлечения жидкости в турбулентный слой. Нелинейные модели (2), (5), не являющиеся гиперболическими для рассматриваемых ниже классов течений,

адекватно описывают нелинейную стадию развития неустойчивости Кельвина — Гельмгольца. Кроме того, наличие по крайней мере трех вещественных характеристик (двух звуковых, обеспечивающих конечность скорости распространения поверхностных волн, и одной контактной) дает возможность по аналогии с (6) использовать полные системы законов сохранения (2), (5) для построения консервативных численных схем.

2. Стационарные течения. Структуру бегущих волн в моделях (2), (5), (6) можно исследовать в системе координат, движущейся со скоростью, равной скорости волны (уравнения движения допускают галилеев перенос), поэтому для получения решения задачи о структуре слоя смещения достаточно рассмотреть стационарные течения.

2.1. *Слой смещения под свободной поверхностью.* Пусть $Q = \eta v$, $z = \text{const}$ и при $x = 0$ начинается формирование слоя смещения (в этой точке параметры течения обозначаются нижним индексом 0; $\eta_0 = 0$). Тогда пять из семи уравнений системы (2) можно проинтегрировать:

$$\begin{aligned} uh + Q/2 &= u_0 h_0, & w\zeta + Q/2 &= w_0 \zeta_0, \\ u^2/2 + gH &= u_0^2/2 + gH_0, & w^2/2 + gH &= w_0^2/2 + gH_0, \\ u^2 h + v^2 \eta + w^2 \zeta + gH^2/2 + P &= u_0^2 h_0 + w_0^2 \zeta_0 + gH_0^2/2. \end{aligned} \quad (11)$$

С использованием (11) уравнения (2) можно свести к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений, например для Q и e , относительно независимой переменной x . Однако для единообразного анализа стационарных решений (2), (5) в рамках моделей I и II в качестве независимой переменной целесообразно выбрать Q .

Пусть штрих означает производную по Q , $s = P/\eta^3 = e_2/\eta^2$ (для модели I $P \equiv 0$ и $s \equiv 0$). Тогда из первых пяти уравнений (2) и следствия (7) получаем

$$\begin{aligned} uh' + hu' &= -1/2, & v\eta' + \eta v' &= 1, & w\zeta' + \zeta w' &= -1/2, \\ uu' + gH' &= 0, & ww' + gH' &= 0, \\ vv' + gH' + 3\eta s\eta' + \eta^2 s' &= (u - 2v + w)/(2\eta). \end{aligned} \quad (12)$$

Величину s для модели II находим с помощью следствия (9), принимающего вид

$$s' = \frac{(u - v)^2 + (w - v)^2 - (6 + \delta)\eta^2 s}{2v\eta^3}. \quad (13)$$

Из уравнений (12) следует

$$H' = \frac{1}{2\Delta} \left(\frac{4v - u - w + 2\eta^3 s'}{v^2 - 3\eta^2 s} - \frac{1}{u} - \frac{1}{w} \right), \quad \Delta = 1 - \frac{gh}{u^2} - \frac{g\zeta}{w^2} - \frac{g\eta}{v^2 - 3\eta^2 s}.$$

Знак определителя Δ указывает на тип течения: докритический при $\Delta < 0$ и сверхкритический при $\Delta > 0$. Для модели II ($e = \eta^2 s$) система (12), (13) является замкнутой, для модели I ($s \equiv 0$) к системе (12) требуется добавить уравнение (8) в виде

$$e' = \frac{(u - v)^2 + (w - v)^2 - (2 + \delta)e}{2v\eta}. \quad (14)$$

Зависимость построенного решения (12), (13) или (12), (14) от пространственной переменной x восстанавливается в результате интегрирования уравнения $dx/dQ = (2\sigma q)^{-1}$.

2.2. *Поверхностная струя.* В течениях однородной жидкости со сдвигом скорости слой смещения может достигать свободной поверхности или дна. Из соотношений (11) следует, что при $w_0 \zeta_0 < u_0 h_0$ слой смещения выходит на свободную поверхность ($\zeta \rightarrow 0$), а при выполнении обратного неравенства достигает дна ($h \rightarrow 0$). Далее будем рассматривать первый случай.

В стационарном случае из уравнений (5) получаем

$$\begin{aligned} uh + v\eta &= u_0h_0 + w_0\zeta_0, & u^2/2 + gH &= u_0^2/2 + gH_0, \\ u^2h + v^2\eta + gH^2/2 + P &= u_0^2h_0 + w_0^2\zeta_0 + gH_0^2/2, \end{aligned} \quad (15)$$

где $H = h + \eta$; $H_0 = h_0 + \zeta_0$. Аналогично с использованием следствия (10) находим

$$\begin{aligned} uh' + hu' &= -1, & v\eta' + \eta v' &= 1, \\ uu' + gH' &= 0, & vv' + gH' + 3\eta s\eta' &= (u - v - \eta^3 s')/\eta \end{aligned} \quad (16)$$

(в качестве независимой переменной выбрана $Q = v\eta$). В модели I ($s = 0$) отсутствует дополнительный член $P = \eta^2 s$ в законе сохранения импульса, в модели II третье уравнение в (10) принимает вид

$$s' = \frac{(u - v)^2 - (3 + \delta)\eta^2 s}{v\eta^3}. \quad (17)$$

Уравнение

$$H' = \frac{1}{\Delta_1} \left(\frac{2v - u + \eta^3 s'}{v^2 - 3\eta^2 s} - \frac{1}{u} \right), \quad \Delta_1 = 1 - \frac{gh}{u^2} - \frac{g\eta}{v^2 - 3\eta^2 s} \quad (18)$$

является следствием (16). Знак определителя Δ_1 определяет докритическое ($\Delta_1 < 0$) и сверхкритическое ($\Delta_1 > 0$) течения.

В рамках модели II система (16), (17) является замкнутой. В случае модели I к системе (16) необходимо добавить второе уравнение в (10), принимающее вид

$$e' = ((u - v)^2 - (1 + \delta)e)/(v\eta). \quad (19)$$

Зависимость решения от x определяется в результате интегрирования уравнения

$$\frac{dx}{dQ} = \frac{1}{\sigma q}. \quad (20)$$

На последнем участке развития слоя смешения (область однослойного течения 1L на рис. 1) его нижняя граница достигает дна ($h \rightarrow 0$) и в рамках модели I решение вырождается: $Q = u_0h_0 + w_0\zeta_0$, $\eta = \text{const}$. При этом величина e уменьшается (это следует из второго уравнения в (10)). В случае модели II общая толщина слоя жидкости η не является постоянной вследствие уменьшения средней завихренности ($s \rightarrow 0$). Для слабосдвиговых течений (6) при $e = e_2$ стационарные уравнения мелкой воды принимают вид

$$\eta_x = -\frac{\theta e^{3/2}}{v\Delta_2}, \quad e_x = \frac{v^2 - g\eta - e}{\eta}\eta_x, \quad \Delta_2 = v^2 - g\eta - 3e. \quad (21)$$

Из соотношений (21) следует, что в докритическом течении ($\Delta_2 < 0$) глубина слоя жидкости увеличивается ($\eta_x > 0$), в сверхкритическом ($\Delta_2 > 0$) — уменьшается ($\eta_x < 0$).

2.3. Начальный участок слоя смешения. Выше получены дифференциальные уравнения для описания стационарного слоя смешения на различных участках (ML, SJ, 1L на рис. 1). Для построения решения необходимо задать условия при $x = 0$, т. е. найти асимптотику стационарного решения (2) при $\eta \rightarrow 0$ (или $Q \rightarrow 0$). Будем полагать, что при $x \rightarrow 0$ существуют конечные пределы функций $v \rightarrow v_0$, $e \rightarrow e_0$, и найдем эти значения.

В модели I необходимыми условиями существования пределов являются соотношения

$$v_0 = \frac{u_0 + w_0}{2}, \quad e_0 = \frac{(u_0 - w_0)^2}{2(2 + \delta)}, \quad (22)$$

следующие из соотношений (12), (14). Поскольку условия (22) обеспечивают конечность производных всех искомых функций при $x \rightarrow 0$, эти условия являются достаточными для построения решения задачи о слое смещения. Соответствующее решение построено в работе [14].

В рамках модели II величина s , характеризующая завихренность в слое смещения, не ограничена в окрестности $x = 0$, однако величина $e = s\eta^2$ имеет конечный предел. Из (12), (13) получаем

$$\begin{aligned} v\eta' + \eta v' &= 1, & vv' + gH' + e' &= (u - 2v + w - 2e\eta')(2\eta)^{-1}, \\ e\eta' + \eta e' &= 3e\eta' + ((u - v)^2 + (w - v)^2 - (6 + \delta)e)(2v)^{-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для того чтобы производные искомых функций при $\eta \rightarrow 0$ были ограниченными, необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} \eta' &= v_0^{-1}, & u_0 - 2v_0 + w_0 - 2e_0v_0^{-1} &= 0, \\ (u_0 - v_0)^2 + (w_0 - v_0)^2 - (2 + \delta)e_0 &= 0, \end{aligned}$$

которые сводятся к квадратному уравнению для v_0 :

$$v_0^2 - \frac{(3 + \delta/2)(u_0 + w_0)}{4 + \delta}v_0 + \frac{u_0^2 + w_0^2}{4 + \delta} = 0. \quad (24)$$

Введем обозначения

$$a = \frac{16(4 + \delta)}{(6 + \delta)^2}, \quad r = \frac{1 + \sqrt{1 - (a - 1)^2}}{a - 1}.$$

Уравнение (24) имеет вещественные корни, если выполняются условия

$$(u_0 + w_0)^2 - a(u_0^2 + w_0^2) > 0. \quad (25)$$

В случае $1 < a < 16/9$ (параметр δ принадлежит интервалу $(0, \delta_*)$, $\delta_* = 2(1 + 2\sqrt{2})$) неравенство (25) выполняется при $w_0/u_0 \in (r^{-1}, r)$. При $0 < a < 1$ (параметр $\delta > \delta_*$) величина r является отрицательной и неравенство (25) выполняется, если $w_0/u_0 \notin (r, r^{-1})$. Заметим, что в обоих случаях $|r| > 1$. Таким образом, модель II пригодна для описания эволюции слоя смещения под свободной поверхностью только при выполнении указанных ограничений на отношение скоростей в потенциальных слоях.

2.4. Турбулентный бор. Модель поверхностной турбулентной струи можно использовать для описания структуры турбулентного бора. Для этого достаточно начальную толщину верхнего потенциального слоя положить равной нулю ($\zeta_0 = 0$) и найти асимптотику решения (16)–(19) при $\eta \rightarrow 0$.

Для модели II получаем следующий аналог уравнений (23):

$$\begin{aligned} v\eta' + \eta v' &= 1, & vv' + gH' + e' &= (u - v - e\eta')/\eta, \\ e\eta' + \eta e' &= 3e\eta' + ((u - v)^2 - (3 + \delta)e)/v. \end{aligned}$$

В результате предельного перехода при $\eta \rightarrow 0$ получаем соотношения

$$e_0 = (u_0 - v_0)v_0 = (u_0 - v_0)^2/(1 + \delta),$$

из которых следует, что либо решение является вырожденным, т. е. $v_0 = u_0$, $e_0 = 0$, либо имеют место соотношения

$$v_0 = \frac{u_0}{2 + \delta}, \quad e_0 = \frac{(1 + \delta)u_0^2}{(2 + \delta)^2}. \quad (26)$$

Уравнения (26) соответствуют развитию процесса вовлечения жидкости в однородный слой с конечной скоростью ($q_0 > 0$) и определяют конечный наклон свободной поверхности в точке формирования турбулентного бора:

$$\left. \frac{dH}{dx} \right|_{x=0} = \sigma q_0 H' = \frac{\sigma(1+\delta)^{3/2}}{(2+\delta)(1-\text{Fr}^{-2})} \quad (27)$$

($\text{Fr} = u_0/\sqrt{gh_0}$ — число Фруда набегающего потока). Для вывода уравнения (27) использованы формулы (26) и представление (18) для H' при $\eta \rightarrow 0$.

В рамках модели I ($s = 0$) поведение решения (16), (19) изучено в работе [10], в которой показано, что в силу уравнений (19), (20) решение задачи о структуре турбулентного бора сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dQ}{dx} = \sigma q, \quad \frac{dq}{dx} = \frac{(f(Q) - (1+\delta)q^2)\sigma}{2Q}, \quad (28)$$

которая может быть решена в квадратурах. Здесь $f(Q) = (u-v)^2$, зависимость u и v от переменной Q можно получить из (15) при $P = 0$. Нетрудно заметить, что система (28) сводится к линейному уравнению

$$Qe' = f(Q) - (1+\delta)e. \quad (29)$$

Ограниченное решение (29) можно представить в виде

$$e(Q) = Q^{-(1+\delta)} \int_0^Q \tau^\delta f(\tau) d\tau. \quad (30)$$

Из соотношения (30) определяем предельное значение $e(0)$ на “подошве” волны:

$$e(0) = e_0 = (u_0 - v_0)^2 / (1 + \delta).$$

При значении $v_0 = u_0$, следующем из (16) при $s = 0$, получаем вырожденное решение $\eta = 0$, $e = 0$. Анализ алгебраической системы (15) при $s = 0$, $\zeta_0 = 0$ показывает, что существует еще одно предельное значение $v_0 = 0$, которое можно получить, если в качестве независимой переменной выбрать параметр u или h вместо Q . При этом $dQ/du|_{u=u_0} = 0$, и в окрестности точки u_0 решение имеет интегрируемую особенность [10]

$$h(x) \sim \sqrt{x}, \quad \eta(x) \sim \sqrt{x} \quad (x > 0).$$

Таким образом, основное отличие решения задачи о структуре турбулентного бора для модели I от соответствующего решения в рамках модели II состоит в возникновении интегрируемой особенности на фронте волны.

3. Численное решение задачи о слое смешения. Численная реализация стационарного решения задачи о развитии слоя смешения под свободной поверхностью для моделей I и II не представляет трудностей, так как выше приведены системы обыкновенных дифференциальных уравнений для каждой из областей ML, SJ и 1L эволюции слоя смешения. Используя начальную асимптотику течения, решение можно построить как для докритического ($\Delta < 0$), так и для сверхкритического течения. На рис. 2 приведено стационарное решение, описывающее эволюцию слоя смешения ML с последующей трансформацией его в приповерхностную турбулентную струю SJ и переход в течение 1L. Используются безразмерные переменные ($g = 1$, $H = 1$), а также следующие параметры набегающего потока: $u_0 = 0,7$, $w_0 = 2$, $h_0 = 0,9$, $\zeta_0 = 0,1$, $\eta_0 = 0$. Расчеты выполнены при $\delta = 2$ для модели I и при $\delta = 4$ для модели II ($\sigma = 0,15$). Из рис. 2 следует, что при

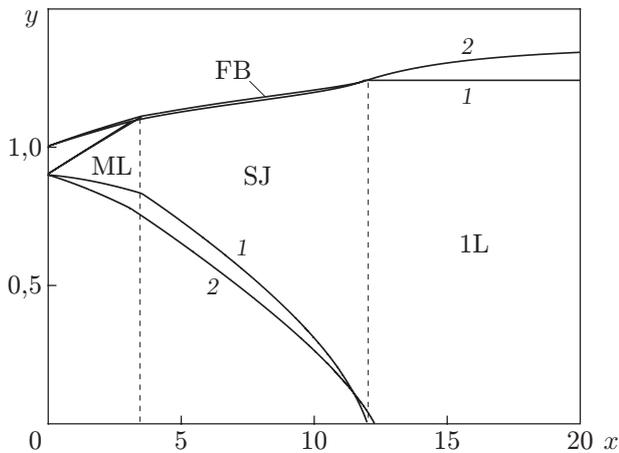


Рис. 2

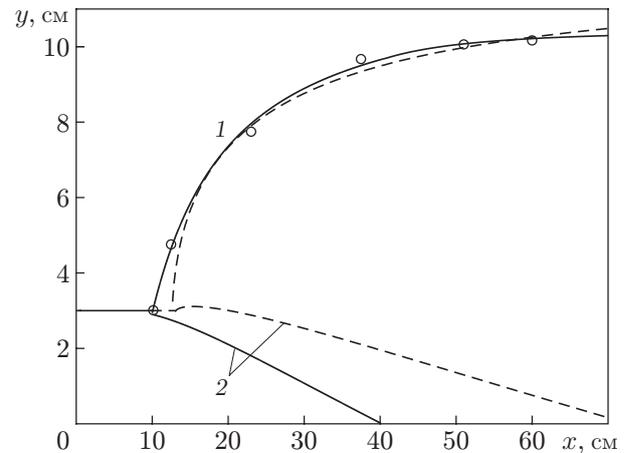


Рис. 3

Рис. 2. Стационарное решение в областях ML, SJ и 1L:

1 — модель I, 2 — модель II; остальные обозначения те же, что на рис. 1

Рис. 3. Профили турбулентного бора:

1 — глубина, 2 — толщина потенциального слоя; сплошные линии — модель II, штриховые — модель I, точки — эксперимент [16]

использовании моделей I и II глубина слоя жидкости, а также верхняя граница слоя смещения практически совпадают. Для нижней границы слоя смещения результаты расчетов по моделям I и II незначительно различаются. Такой же результат получен при вариации параметра σ , от которого зависит только растяжение пространственной переменной. Различие решений на участке 1L обусловлено влиянием величины e_2 на форму свободной поверхности в модели II. В модели I на этом участке $\eta = \text{const}$.

Структура стационарного турбулентного бора ($\zeta_0 = 0$, $\eta_0 = 0$) показана на рис. 3 для числа Фруда набегающего потока $\text{Fr} = u_0/\sqrt{gh_0} = 2,9$ и параметров $\delta = 4$, $\sigma = 0,4$. Профили бора для моделей I, II приведены в размерных переменных ($h_0 = 2,9$ см, $g = 980$ см/с²) для удобства сравнения с экспериментальным профилем (см. рис. 2 в [16]). Основное различие моделей I и II в задаче о турбулентном боре состоит в поведении решений в окрестности подошвы волны. Для модели I наклон свободной поверхности имеет интегрируемую особенность, для модели II угол между свободной поверхностью турбулентного бора и невозмущенной поверхностью является конечным и вычисляется по формуле (27), из которой следует, что при возрастании числа Фруда угол определяется только параметрами σ и δ . Более того, экспериментальные данные о форме гидравлического прыжка, полученные различными исследователями и представленные в [17], показывают, что при увеличении числа Фруда профиль турбулентного бора становится линейным. Поэтому формулу (27) можно использовать для построения профиля скачка. На рис. 4 в безразмерных переменных ($H = 1$, $g = 1$) показана форма стационарного турбулентного бора для $\text{Fr} = 2,98$; 5,53, вычисленная по модели II при $\sigma = 0,2$, $\delta = 2$, а также соответствующие экспериментальные профили (см. рис. 2 в [17]). Заметим, что выбор значения $\sigma = 0,2$ не является оптимальным. Вариация коэффициента σ в интервале $0,15 \div 0,40$ во всем диапазоне чисел Фруда дает существенно лучшие результаты. Это означает, что гипотеза о постоянстве величины σ в модели II может быть пересмотрена при последующем развитии представленной модели. Однако даже при $\sigma = \text{const}$ модель II описывает важные свойства трансформации профиля стационарного гидравлического прыжка при увеличении чисел Фруда набегающего потока.

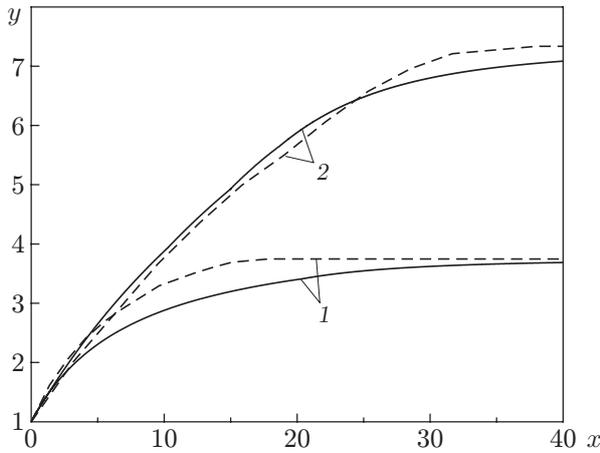


Рис. 4

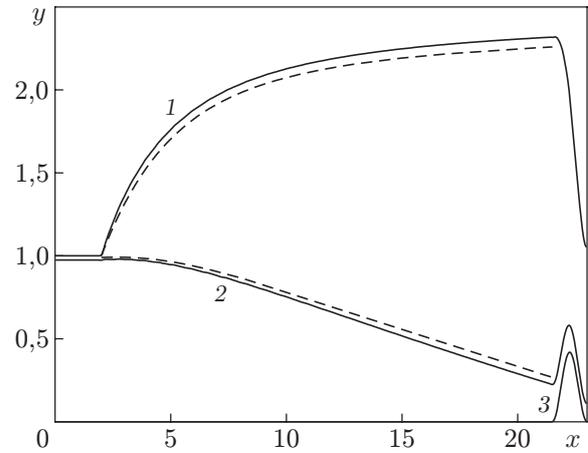


Рис. 5

Рис. 4. Формы стационарного турбулентного бора при различных числах Фруда: 1 — $Fr = 2,98$; 2 — $Fr = 5,53$; сплошные линии — модель II, штриховые — данные работы [17]

Рис. 5. Выход на стационарный режим в двухслойной модели II: 1 — свободная поверхность, 2 — граница потенциального слоя, 3 — рельеф дна; сплошные линии — решение уравнений (5) при $t = 375$, штриховые — стационарное решение

Для моделирования нестационарных течений использовалась центральная схема Насыху — Тэдмора [18] типа предиктор-корректор:

$$\mathbf{u}_j^{n+1/2} = \mathbf{u}_j^n - \lambda \frac{\mathbf{f}'_j}{2} + \mathbf{R}(\mathbf{u}_j^n) \frac{\Delta t}{2} \quad (\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}), \tag{31}$$

$$\mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1} = \frac{\mathbf{u}_j^n + \mathbf{u}_{j+1}^n}{2} + \frac{\mathbf{u}'_j - \mathbf{u}'_{j+1}}{8} - \lambda (\mathbf{f}(\mathbf{u}_{j+1}^{n+1/2}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_j^{n+1/2})) + (\mathbf{R}(\mathbf{u}_j^n) + \mathbf{R}(\mathbf{u}_{j+1}^n)) \frac{\Delta t}{2}.$$

Схема (31) аппроксимирует систему балансовых соотношений вида

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{f}(\mathbf{u}))_x = \mathbf{R}(\mathbf{u}),$$

к которой относятся рассматриваемые модели (2), (5), (6). Здесь Δx — шаг разбиения по пространственной переменной x ; Δt — шаг по времени, выбираемый из условия Куранта; \mathbf{u}_j^n — значение функций в узле $x = x_j$ при $t = t^n$; величины $\mathbf{u}'_j/\Delta x$ и $\mathbf{f}'_j/\Delta x$ — аппроксимация производных первого порядка по x . Для вычисления производных использовалась процедура “ENO limiter” [19].

Для численного решения балансовых соотношений (2), (5) схема (31) реализована в среде Matlab. Расчеты проводились в безразмерных переменных при $g = 1$, $\sigma = 0,2$, $\theta = 0,45$. Для дискретизации по пространственной переменной x использовалось $N = 400$ узлов.

Формирование стационарного турбулентного бора в рамках двухслойных уравнений движения (5) (модель II) показано на рис. 5. В качестве начальных данных при $t = 0$ задан сверхкритический поток, имеющий скорость $u = 2$ и полную глубину $H = 1$. Начальная толщина турбулентной прослойки $\eta = 0,025$; скорость $v = u$, энергия $e = 0$. На левой границе $x = 0$ в качестве граничных условий используются начальные данные, на правой границе — “мягкие” условия ($\mathbf{u}_{N+1} = \mathbf{u}_N$). Формирование бора осуществляется за счет управления препятствием. В начальный момент времени дно ровное ($z = 0$). За время $T_1 = 5$ высота гладкого препятствия шириной 1,5, расположенного на правой

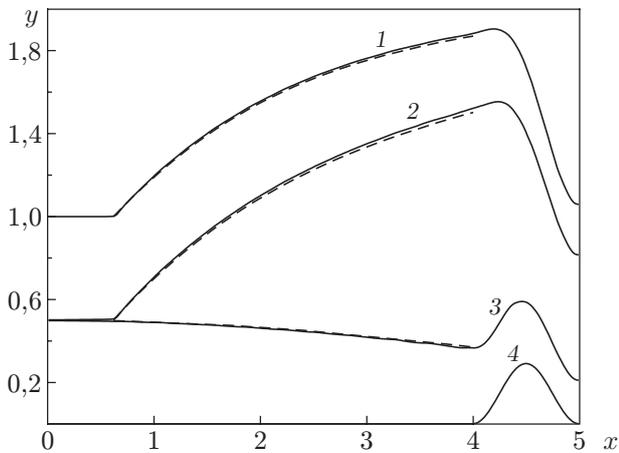


Рис. 6

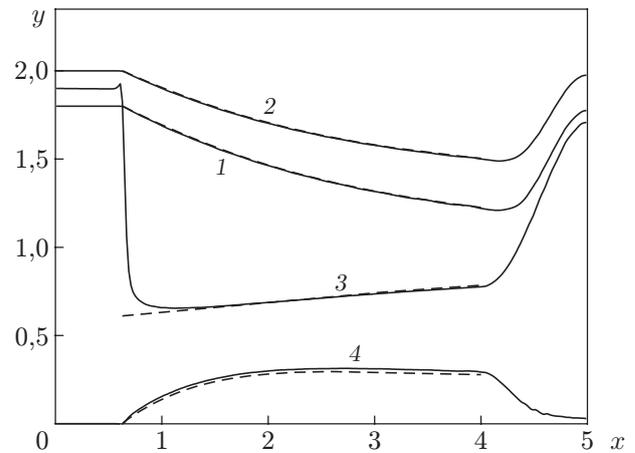


Рис. 7

Рис. 6. Выход на стационарный режим в трехслойной модели II:

1 — свободная поверхность, 2, 3 — верхняя и нижняя границы турбулентного слоя, 4 — рельеф дна; сплошные линии — решение уравнений (2) при $t = 185$, штриховые — стационарное решение

Рис. 7. Распределения скоростей u, w, v (1-3) и величины P (4) при выходе на стационарный режим в трехслойной модели II:

1 — нижний слой, 2 — верхний слой, 3 — турбулентный слой; сплошные линии — решение уравнений (2) при $t = 185$, штриховые — стационарное решение

границе, увеличивается до 0,7, затем за время $T_2 = 5$ уменьшается до 0,42 (линия 3 на рис. 5). Полученное таким образом решение со временем выходит на стационарный режим. Штриховыми линиями на рис. 5 показано решение стационарных уравнений (16), (17) с условиями (26) при $u_0 = 2$, $\delta = 2,25$ в точке $x = 2$. Для интегрирования уравнений (16), (17) использовался метод Рунге — Кутты четвертого порядка. Стационарное решение построено в области до препятствия, так как при переходе через препятствие величина Δ_1 в уравнении (18) становится равной нулю (течение переходит из докритического режима в сверхкритический).

Аналогичный расчет выполнен для трехслойной схемы течений (2) (модель II). При $t = 0$ заданы следующие значения: $h = \zeta = 0,498$, $\eta = 4 \cdot 10^{-3}$, $u = 1,8$, $w = 2$, $v = (u + w)/2$, $e = 0$. Для формирования слоя смещения использовано управление препятствием. Как и в предыдущем случае, со временем решение выходит на стационарный режим. На рис. 6 показаны свободная граница жидкости $y = H + z$, верхняя $y = h + \eta + z$ и нижняя $y = h + z$ границы турбулентного слоя, рельеф дна $y = z$. На рис. 7 приведены скорости u в нижнем, w в верхнем и v в промежуточном слоях, а также величина $P = \eta e_2$. Видно, что средняя скорость течения в турбулентном слое смещения значительно меньше, чем в потенциальных слоях. Штриховыми линиями на рис. 6, 7 показано соответствующее решение стационарных уравнений (12), (13).

Заключение. Рассмотрены две модели развития приповерхностного турбулентного слоя в течениях со сдвигом скорости (модели I и II). Эти модели представлены уравнениями многослойной мелкой воды с учетом процессов вовлечения жидкости из областей потенциального течения в турбулентную прослойку. Гипотезы, использованные для замыкания моделей, связаны с выбором масштаба осреднения в турбулентном потоке. В модели I в качестве вертикального масштаба использована толщина турбулентного слоя η , т. е. вертикальный перенос массы и импульса определяется эволюцией “больших вихрей”. При

этом распределение средней скорости в области турбулентного течения может быть восстановлено с помощью границ турбулентного течения и удельной кинетической энергии e_1 “больших вихрей”, полученных для трехслойной схемы течения (модель I) [10, 14]. При построении модели II процесс формирования неоднородного профиля скорости считается связанным с эволюцией завихренности в потоке, т. е. масштаб турбулентности считается малым по сравнению с толщиной завихренного слоя. Очевидно, что обе модели являются предельными случаями более общей модели (2), для замыкания которой требуется связать дополнительным соотношением величины e_1 и e_2 , характеризующие неоднородность профиля скорости в прослойке между областями потенциального течения. Однако анализ стационарных и нестационарных решений задачи об эволюции слоя смещения под свободной поверхностью и о формировании непрерывной области перехода от сверхкритического к докритическому течению в турбулентном боре для моделей I и II показывает, что при определенном выборе параметров модели эти решения близки.

Таким образом, каждая модель может быть использована для решения указанного класса проблем. Модель I более адекватно описывает начальную стадию развития слоя смещения вдали от свободной поверхности и дна. Модель II более приемлема в случае, когда рост “больших вихрей” ограничен их взаимодействием с внешними границами течения, например в приповерхностной или придонной турбулентной струе. Так, в задаче о структуре турбулентного бора решение модели I имеет интегрируемую особенность в окрестности подошвы волны, в то время как угол наклона свободной поверхности к невозмущенной границе для турбулентного бора, рассчитанного по модели II, конечен. Более того, модель II описывает экспериментально обнаруженное свойство уплощения профиля турбулентного бора при увеличении числа Фруда набегающего потока (см. рис. 4).

Заметим, что определяющие параметры σ и θ для модели II, использованные в работе, не являются оптимальными. Анализ стационарных решений, описывающих структуру турбулентного бора, показывает, что экспериментально полученные средние профили практически совпадают с расчетными, если при увеличении числа Фруда величина σ меняется в диапазоне $0,15 \div 0,40$, т. е. скорость вовлечения является более сложной функцией расчетных параметров течения. Построение математической модели, объединяющей модели I и II с учетом сделанных замечаний, является целью дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Chanson H.** Current knowledge in hydraulic jumps and related phenomena. A survey of experimental results // *Europ. J. Mech. B. Fluids*. 2009. V. 28. P. 191–210.
2. **Nadaoka K., Hino M., Koyano Y.** Structure of the turbulent flow field under breaking waves in the surf zone // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 204. P. 359–387.
3. **Lin J.-C., Rockwell D.** Instantaneous structure of a breaking wave // *Phys. Fluids*. 1994. V. 6. P. 2877–2879.
4. **Kimmoun O., Branger H.** A particle image velocimetry investigation on laboratory surf-zone breaking waves over a sloping beach // *J. Fluid Mech.* 2007. V. 588. P. 353–397.
5. **Madsen P. A., Svendsen I. A.** Turbulent bores and hydraulic jumps // *J. Fluid Mech.* 1983. V. 129. P. 1–25.
6. **Svendsen I. A., Madsen P. A.** A turbulent bore on a beach // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 148. P. 73–96.
7. **Richard G. L., Gavriluk S. L.** A new model of roll waves: comparison with Brock’s experiments // *J. Fluid Mech.* 2012. V. 698. P. 374–405.
8. **Richard G. L., Gavriluk S. L.** The classical hydraulic jump in a model of shear shallow water flows // *J. Fluid Mech.* 2013. V. 725. P. 492–521.

9. **Тешуков В. М.** Газодинамическая аналогия для вихревых течений со свободной границей // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 3. С. 8–15.
10. **Ляпидевский В. Ю.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
11. **Ляпидевский В. Ю.** Структура турбулентного бора в однородной жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 56–68.
12. **Hoyt J. W., Sellin R. H. J.** Hydraulic jump as “mixing layer” // J. Hydraul. Engng. 1989. V. 115. P. 1607–1614.
13. **Battjes J. A., Sakai T.** Velocity field in a steady breaker // J. Fluid Mech. 1981. V. 111. P. 421–437.
14. **Chesnokolov A. A., Liapidevskii V. Yu.** Shallow water equations for shear flows // Notes Numer. Fluid Mech. Multidisciplinary Design. 2011. V. 115. P. 165–179.
15. **Benney D. J.** Some properties of long nonlinear waves // Stud. Appl. Math. 1973. V. 52. P. 45–50.
16. **Гусев А. В., Ляпидевский В. Ю.** Турбулентный бор в сверхкритическом потоке над неровным дном // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2005. № 1. С. 62–70.
17. **Rajaratnam N., Subramanya K.** Profile of the hydraulic jump // ASCE J. Hydraul. Engng. 1968. V. 94. P. 663–673.
18. **Nessyahu H., Tadmor E.** Non-oscillatory central differencing schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1990. V. 87. P. 408–463.
19. **Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarthy S.** Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III // J. Comput. Phys. 1987. V. 71. P. 231–303.

Поступила в редакцию 29/VII 2013 г.
