

УДК 534.222+539.374

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ КВАЗИАКУСТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Н. Н. Мягков

Институт прикладной механики РАН, 117334 Москва

В квазиакустическом приближении получены выражения для скорости пластической ударной волны и фазовой скорости продольных волн в упругопластической среде с упрочнением. Построено аналитическое решение задачи о затухании ударного импульса. Особенность затухания амплитуды пластической ударной волны состоит в том, что она достигает амплитуды упругого предвестника за конечное время, в то время как в гидродинамике амплитуда квазиакустического ударного импульса стремится к нулю асимптотически.

**Ключевые слова:** упругопластическая среда, изотропное упрочнение, нелинейные волны, ударная волна.

**Введение.** Исследование эволюции нелинейных волн, порожденных взрывным или ударным нагружением материалов и конструкций, представляет научный и практический интерес. Исследования такого рода обычно проводятся в условиях импульсного нагружения с амплитудами давлений в материале от нескольких единиц до десятков гигапаскалей [1]. Как правило, в этом случае возникающие волны можно считать слабыми в смысле малости отношения давления к модулю объемного сжатия материала и соответственно использовать приближение нелинейной акустики [2, 3] для моделирования ударно-волновых процессов.

В настоящей работе распространение нелинейных акустических волн в упругопластической среде рассматривается в рамках модели, предложенной в [4].

**1. Стационарные ударные волны.** Рассмотрим распространение плоских продольных волн при одноосной деформации. При распространении таких волн все величины являются функциями только одной переменной  $X - D_{rm}t$  ( $X = x_1|_{t=0}$ ;  $D_{rm}$  — лагранжева фазовая скорость распространения волны). Пусть среда переводится волной сжатия из состояния  $(\rho, u_1, \sigma_1, \tau)_r$  при  $t \rightarrow -\infty$  в состояние  $(\rho, u_1, \sigma_1, \tau)_m$  при  $t \rightarrow \infty$ . Здесь  $\tau = -(\sigma_1 - \sigma_2)/2$ ;  $\sigma_i$  — главные напряжения;  $u_1$  — скорость перемещения среды;  $\rho$  — плотность. Из законов сохранения следуют соотношения (вязкостью внутреннего трения и теплопроводностью пренебрегаем)

$$\begin{aligned} u_1 - (u_1)_r &= \rho_0 D_{rm} (1/\rho_r - 1/\rho), & \sigma_1 - (\sigma_1)_r &= -(\rho_0 D_{rm})^2 (1/\rho_r - 1/\rho), \\ E - E_r + (\sigma_1 + (\sigma_1)_r)(1/\rho_r - 1/\rho)/2 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $E$  — внутренняя энергия. Уравнения (1) описывают как гладкие, так и разрывные скачкообразные изменения величин в волне. Как известно, внутренняя энергия для изотропной среды является функцией инвариантов тензора деформаций и энтропии  $S$ . Эту зависимость удобно представить в виде  $E = E(\rho, D, \Delta, S)$ , где  $D, \Delta$  — инварианты девиатора тензора эффективных упругих деформаций [5].

Введем малые параметры  $\varepsilon$  (отношение амплитуды напряжения к модулю объемного сжатия) и  $\nu = (C_l^2 - C_0^2)/(2C_0^2) = 2G/(3\rho_0 C_0^2)$  ( $G$  — модуль сдвига;  $C_l$  — фазовая скорость продольных упругих волн;  $C_0$  — объемная скорость звука). Таким образом, предполагается, что компоненты девиатора напряжений рассматриваются как величины следующего

порядка малости по сравнению со средним напряжением (безразмерное среднее напряжение — величина порядка  $O(\varepsilon)$ ). Представляя внутреннюю энергию  $E$  в виде степенного ряда по приращению плотности  $\rho' = (\rho - \rho_0)/\rho_0$ , энтропии  $S' = T_0(S - S_0)/C_0^2$ , инвариантам  $D$  и  $\Delta$  с учетом  $\partial E/\partial D|_0 = 2G/\rho_0$  и удерживая в гидродинамической части тензора напряжений члены до второго порядка малости включительно, получим

$$\sigma'_1 = \sigma_1/(\rho_0 C_0^2) = -[\rho' + \alpha\rho'^2/2 + \Gamma S' + O(\varepsilon^3 + \varepsilon^2\nu)] - 3\nu(\psi + O(\varepsilon^2)). \quad (2)$$

Здесь  $\psi = 2\tau/(3G)$ ; параметр  $\alpha = 4 + \rho_0^3 E_{\rho\rho\rho}|_S/C_0^2$  определяется из уравнения состояния и может быть вычислен, например, через адиабатическую производную от модуля объемного сжатия по давлению, определяемую на основе известных экспериментов [6];  $T_0$  — начальная температура;  $\Gamma$  — коэффициент Грюнайзена. Амплитуда  $\psi$  определяется величиной  $Y/(3G)$  ( $Y$  — предел текучести при растяжении). Для металлов  $Y/(3G) \sim 10^{-3}$ , поэтому, несмотря на то что введенный малый параметр  $\nu$  для металлов является достаточно “большим” ( $\nu \leq 0,3$ ), член  $3\nu\psi$  в (2) будет мал по сравнению с основным членом разложения  $|\rho'| \sim \varepsilon$ . При напряжениях, наблюдающихся в обычных ударно-волновых экспериментах,  $\varepsilon \sim 0,1$ .

Из системы (1), (2) можно получить соотношения для приращения энтропии, скорости  $D_{rm}$  и зависимости  $\psi(\rho')$ :

$$[S'] = (\alpha + 2)[\rho']^3/12 + (9/4)\nu(\psi_m + \psi_r)[2\rho'/3 - \psi] + O(\varepsilon^4 + \varepsilon^3\nu); \quad (3)$$

$$(D_{rm}/C_0)^2 = 1 + (\alpha + 2)(\rho'_r + \rho'_m)/2 + 3\nu[\psi]/[\rho'] + O(\varepsilon^2 + \varepsilon\nu); \quad (4)$$

$$3\nu(\psi - \psi_r)/2 = \delta(\rho' - \rho'_r) - (\alpha + 2)(\rho'^2 - \rho_r'^2)/4 + O(\varepsilon^2 + \varepsilon\nu), \quad (5)$$

где  $[\cdot] = (\cdot)_m - (\cdot)_r$ ;  $\delta = (D_{rm}^2/C_0^2 - 1)/2$ . Первый член в правой части (3) определяет приращение энтропии за счет изменения плотности в ударной волне, второй член характеризует приращение энтропии за счет работы пластических деформаций. Зависимость (5) описывает возможные состояния внутри волны и определяет зависимость напряжения сдвига  $(9/4)\nu(\psi - \psi_r)$  от истинной деформации  $\rho'$ . Для получения стационарных решений к соотношению (5) необходимо добавить определяющее уравнение, связывающее  $\psi$  и  $\rho'$ .

При малых деформациях  $\psi$  связана с пластической деформацией соотношением

$$\dot{\varepsilon}_1^p = -2\rho'/3 + \dot{\psi} \quad (6)$$

(точка означает дифференцирование по времени).

Рассмотрим модель упругопластической среды типа Прандтля — Рейсса и условие текучести Мизеса для случая одноосной деформации. В принятых обозначениях определяющие уравнения имеют вид

$$\dot{\psi} = 2\rho'/3 \quad \text{при} \quad |\psi| \leq \psi_*, \quad \psi = \psi_* \text{ sign } \psi \quad \text{при} \quad |\psi| > \psi_*. \quad (7)$$

Здесь  $\psi_* = Y/(3G)$ . Сначала рассмотрим случай постоянного предела текучести ( $Y = \text{const}$ ). Элементарное исследование уравнений (5) и (7) дает следующие результаты. При  $\rho'_r = \psi_r = 0$  (волна распространяется по невозмущенной среде) возможно единственное стационарное решение для  $\rho'_m > \rho'_*$  ( $\rho'_* = 3\psi_*/2$ ) в виде последовательности двух сильных разрывов (ударных волн). В упругой ударной волне среда переводится скачком из состояния  $(0,0)$  в состояние  $(\rho'_*, \psi_*)$ , в пластической ударной волне — из состояния  $(\rho'_*, \psi_*)$  в состояние  $(4\nu/(\alpha + 2), \psi_*)$ , т. е. амплитуда стационарной волны  $\rho'_m = 4\nu/(\alpha + 2)$  и  $\psi_m = \psi_*$ . При этом  $\delta = (\alpha + 2)\rho'_*/4 + \nu$ . На рис. 1 приведена зависимость  $\psi(\rho')$  (формула (5)). Сдвиг фаз между скачками не определен (он может быть произвольным), определена только последовательность скачков. Если  $\rho'_m > 4\nu/(\alpha + 2)$ , то пластическая ударная волна догоняет упругую ударную волну, в противном случае отстает от нее.

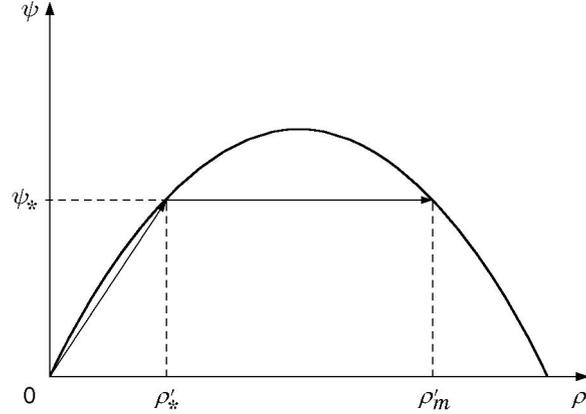


Рис. 1

Далее примем модель изотропного упрочнения, в которой предел текучести зависит от скалярного параметра  $\Lambda$ . Закон течения запишем в виде

$$d\varepsilon_{ij}^p = (3/4)s_{ij} d\Lambda / \sqrt{(3/8)s_{kl}s_{kl}}. \quad (8)$$

Здесь  $\varepsilon_{ij}^p$  — компоненты тензора пластических деформаций;  $s_{ij}$  — компоненты девиатора напряжений. Из (8) следует, что параметр  $\Lambda$  связан с параметром упрочнения  $W^p$ , равным работе пластических деформаций, преобразованием  $dW^p = Y(\Lambda) d\Lambda$ . Интегрируя и подставляя  $W^p = \varphi(\Lambda)$  в известную зависимость  $Y_s(W^p)$ , найдем  $Y(\Lambda) = Y_s(\varphi(\Lambda))$ . Аналогичное преобразование использовалось в работе [7]. Из (6) и (8) для пластической волны получим  $\dot{\Lambda} = 2\rho'/3 - \dot{Y}/(3G)$ . Интегрируя это уравнение с начальными условиями  $\Lambda = 0$ ,  $\rho' = \rho'_*$ ,  $Y(0) = Y_0$  и учитывая, что  $\rho'_* = Y_0/(2G)$ , получим

$$\Lambda = 2\rho'/3 - Y/(3G). \quad (9)$$

Таким образом, при заданной зависимости  $Y = Y(\Lambda)$  стационарное решение для упругопластической волны можно получить как результат решения уравнений (9) и (5), принимая в последнем уравнении  $\rho_r = \rho_*$ ,  $\psi_r = \psi_*$ ,  $\delta = (\alpha+2)\rho'_*/4 + \nu$ . В частности, из (5) следует соотношение  $Y_m - Y_0 = 2G(\rho'_m - \rho'_*)(1 - (\alpha+2)\rho'_m/(4\nu))$ , означающее, что в упрочняющейся среде  $Y_m > Y_0$  возможны стационарные волны с амплитудой  $\rho'_* < \rho'_m < 4\nu/(\alpha+2)$ . В случае  $Y(\Lambda) = Y_0 + Y_1\Lambda$  ( $Y_0, Y_1$  — постоянные) для  $\rho' > \rho'_*$  можно построить решение в виде пластической ударной волны, переводящей скачком среду из состояния  $(\rho'_*, \psi_*)$  в состояние с параметрами  $\rho'_m = 4\nu(1-k)/(\alpha+2)$ ,  $\psi_m = \psi_* + k(2\rho'_m/3 - \psi_*)$ , где  $k = (1 + 3G/Y_1)^{-1}$ ,  $0 < k < 1 - (\alpha+2)\rho'_*/(4\nu)$ ;  $\rho'_* = Y_0/(2G)$ ;  $\psi_* = Y_0/(3G)$ .

Соотношение (4) справедливо для скачкообразных изменений величин в любой продольной волне (в этом случае индексами  $m$  и  $r$  отмечены соответственно величины непосредственно за и перед скачком) для любой упругопластической среды, поскольку при выводе (4) определяющее уравнение не использовалось. Возникновение разрывных решений в виде ударных волн связано с неоднозначностью профиля волны, возникающей в результате опрокидывания первоначально гладкого решения, когда лагранжева скорость распространения фиксированных уровней деформаций  $C(\rho')$  растет с увеличением  $\rho'$ . В рассматриваемом приближении имеем

$$C^2 = \left( \frac{dX}{dt} \right)^2 \Big|_{\rho'} = C_0^2 \left( 1 + (\alpha+2)\rho' + 3\nu \left( \frac{\partial \psi}{\partial \rho'} \right)_X \right) + O(\varepsilon^2 + \varepsilon\nu). \quad (10)$$

Следует отметить, что (10) можно получить из (4) при одновременном стремлении к нулю  $[\rho']$  и  $[\psi]$ , полагая при этом, что  $\rho'_r \rightarrow \rho'$  и  $\rho'_m \rightarrow \rho'$ . В этом случае построение разрывного решения и определение положения фронта можно осуществить с помощью так

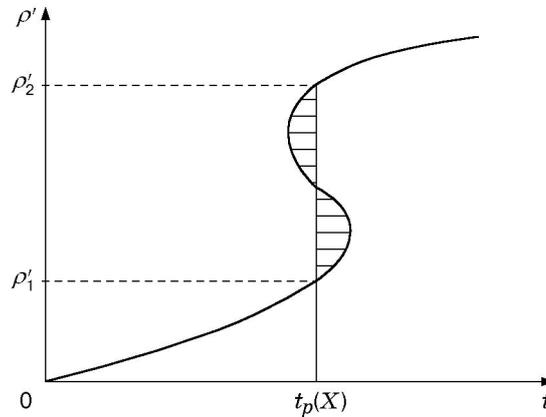


Рис. 2

называемого правила равенства площадей [2, 3]. Покажем, что скорость фронта ударной волны, определяемая по формуле (4), удовлетворяет этому правилу. Пусть в данный момент разрыв занимает положение  $t = t_p(X)$  (рис. 2). Заштрихованная площадь на рис. 2

равна интегралу  $J = \int_{\rho'_1}^{\rho'_2} (t(\rho', X) - t_p(X)) d\rho'$ . Здесь  $t(\rho', X)$  — зависимость, определяемая

соотношением (10). На рис. 2 заштрихованные площади слева и справа от прямой  $t = t_p(X)$  равны. Продифференцируем выражение для  $J$  по  $X$  с учетом (4) и (10). В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial X} J = \int_{\rho'_1}^{\rho'_2} \left( \frac{1}{C(\rho')} - \frac{1}{D_{12}} \right) d\rho' = O(\varepsilon^3 + \varepsilon^2\nu).$$

В точке образования разрыва  $X_p$  заштрихованная площадь, очевидно, равна нулю. Следовательно, при  $X > X_p$  в силу проведенных вычислений правило равенства площадей выполнено асимптотически, по крайней мере на расстояниях  $X - X_p \leq O(\varepsilon^{-1})$ .

Определим скорости ударных волн и скорости  $C(\rho')$  для различных определяющих уравнений. Для упругой деформации из (4), (6), (10) имеем

$$D_{rm}^2 = C_l^2 + C_0^2(\alpha + 2)(\rho'_r + \rho'_m)/2, \quad C^2 = C_l^2 + C_0^2(\alpha + 2)\rho', \quad (11)$$

где  $C_l$  — фазовая скорость продольных упругих волн в невозмущенной среде. Для среды Прандтля — Рейсса с условием текучести Мизеса из (6) и (8) для пластического скачка получим

$$[\Lambda] = 2[\rho']/3 - [Y]/(3G), \quad [\Lambda] \geq 0. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (4) и (10), получим выражения для скорости пластической ударной волны и лагранжевой скорости распространения возмущений при активном нагружении ( $\dot{\rho}' > 0$ ), которые в модели упрочняющейся среды с условием пластичности  $Y(\Lambda)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_0 D_{rm}^2 &= \rho_0 C_0^2 \left( 1 + \frac{\alpha + 2}{2} (\rho'_r + \rho'_m) \right) + \frac{4}{3} \frac{[Y]}{3[\Lambda] + [Y]/G}, \\ \rho_0 C^2 &= \rho_0 C_0^2 (1 + (\alpha + 2)\rho') + \frac{4}{3} \frac{dY}{d\Lambda} / \left( 3 + \frac{1}{G} \frac{dY}{d\Lambda} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, скорость ударной волны однозначно определяется известным состоянием перед фронтом и значением  $\Lambda_m$  ( $\Lambda_m > \Lambda_r$ ) за фронтом с помощью (12) и известной зависимости  $Y(\Lambda)$ . Для малых деформаций первая формула в (13) совпадает с формулой, полученной в работе [8], если  $Y$  и  $\Lambda$  выразить через предел текучести при чистом сдвиге и функцию упрочнения, принятую в этой работе, соответственно. В модели идеальной пластичности, очевидно,  $[Y] = 0$ , и из (13) получим

$$D_{rm}^2 = C_0^2(1 + (\alpha + 2)(\rho'_r + \rho'_m)/2), \quad C^2 = C_0^2(1 + (\alpha + 2)\rho'). \quad (14)$$

В этом случае формулы для скоростей аналогичны используемым в нелинейной акустике [2, 3]. Ударные волны должны удовлетворять условию устойчивости [9]

$$C(\rho'_r) < D_{rm} < C(\rho'_m). \quad (15)$$

Физический смысл этого условия достаточно прост: ударная волна должна быть дозвуковой по отношению к частицам непосредственно за фронтом и сверхзвуковой по отношению к частицам непосредственно перед фронтом. Условие (15) справедливо для ударных волн в упругом материале (11), в идеально пластическом материале (14) и, в частности, в упрочняющемся материале (13), когда  $[Y(\Lambda)] = Y_1[\Lambda]$ .

**2. Затухание ударного импульса в упругопластической среде с упрочнением.** Импульсы напряжения, которые получаются при использовании тонких ударников, коротких лазерных импульсов, детонации слоев конденсированных взрывчатых веществ, имеют четко выраженный фронт и область пологого спада. Рассмотрим следующую задачу. Пусть на границе  $z = 0$ ,  $z = X/(C_0 t_0)$  внезапно приложено давление, монотонно убывающее во времени:

$$\frac{1}{2}V(0, \xi) = \begin{cases} 0, & -\infty < \xi < 0, \\ F(\xi) (F(\xi) > 0, dF(\xi)/d\xi < 0), & 0 \leq \xi < +\infty. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь  $V = -2\sigma'_1$ . Обозначим через  $V_m(z)$  текущую амплитуду волны. На границе  $z = 0$   $F(0) = V_m(0) = V_{m0}$ .

Для описания распространения ударного импульса в полупространстве используем модельное уравнение, предложенное в [4]:

$$\frac{\partial V}{\partial z'} - \frac{1}{2}V \frac{\partial V}{\partial \xi} - 3\nu' \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0. \quad (17)$$

Здесь  $\xi = t' - z$ ;  $z' = z(\alpha + 2)/2$ ;  $\nu' = 2\nu/(\alpha + 2)$ ;  $t' = t/t_0$ . Далее штрихи у  $z$  и  $\nu$  опущены.

Примем определяющие уравнения деформационной теории пластичности и модель линейного упрочнения по схеме Прандтля без учета эффекта Баушингера в предположении, что пределы текучести при растяжении и сжатии равны. Для одноосного деформированного состояния определяющие уравнения в переменных  $V$ ,  $\psi$  имеют вид (рис. 3)

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{1}{3} \frac{\partial V}{\partial \xi} \quad (18)$$

при  $\psi < \psi_* = Y_0/(3G)$  и при  $V_m > V > V_m - \Delta V$  в случае разгрузки,

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{1}{3} k \frac{\partial V}{\partial \xi} \quad (19)$$

при  $V_* \leq V \leq V_m$  в случае нагрузки и при  $V_m - \Delta V \geq V$  в случае разгрузки. В (18), (19)  $Y_0$  — предел текучести;  $k = G'/G$ ;  $G'$  — модуль линейного упрочнения материала. Очевидно, что

$$V_m - \Delta V = V_m(1 - k) - V_*(2 - k). \quad (20)$$

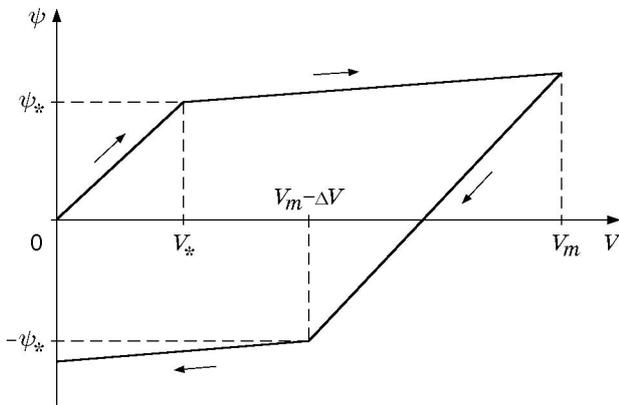


Рис. 3

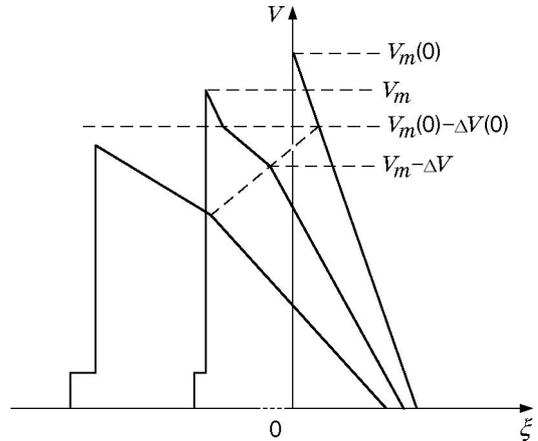


Рис. 4

Если  $V_{m0} \leq 4\nu(1 - k)$ , то при  $z > 0$  волна сильного разрыва расщепляется на упругую ударную волну с амплитудой  $V_*$  (упругий предвестник) и пластическую ударную волну. Скорость последней вычисляется по формуле, аналогичной формуле, по которой вычисляется скорость ударной волны в упругой среде (см. п. 1):

$$\frac{d\xi_p}{dz} = -\left[\frac{1}{4}(V_m + V_*) + \nu k\right] \tag{21}$$

( $\xi_p$  — координата фронта пластической ударной волны). Полагаем далее, что соотношение  $V_{m0} \leq 4\nu(1 - k)$  выполнено.

Из (17)–(19) для области разгрузки следует

$$\frac{dV}{dz} = 0 \quad \text{при} \quad \frac{d\xi}{dz} = \begin{cases} -(V/2 + \nu), & V_m \geq V > V_m - \Delta V, \\ -(V/2 + \nu k), & V_m - \Delta V \geq V > 0. \end{cases} \tag{22}$$

Рассмотрим интервал изменения амплитуды  $V_m(0) \geq V_m \geq V_m(0) - \Delta V(0)$  (рис. 4). Согласно (20)  $V_m(0) - \Delta V(0) = V_{m0}(1 - k) - V_*(2 - k)$ . В соответствии с (22) на затухание амплитуды в этом интервале оказывает влияние только упругая часть профиля, заданного на границе. Пусть  $\tilde{\xi}$  — координата точки на профиле (16) такая, что значение  $V = 2F(\tilde{\xi})$  попадает в этот интервал:  $V_m(0) \geq V \geq V_m(0) - \Delta V(0)$ . Согласно (22) в последующие моменты  $z > 0$  эта точка будет иметь координату  $\xi = F^{-1}(V/2) - (V/2 + \nu)z$  ( $F^{-1}$  — функция, обратная  $F$ ). Подставляя в это соотношение значения переменных  $\xi = \xi_p$ ,  $V = V_m$ , соответствующие моменту пересечения характеристики с фронтом ударной волны, и объединяя полученное выражение с (21), после преобразований получим уравнение для  $V_m(z)$

$$\frac{dV_m}{dz} = -\frac{1}{2} \frac{V_m - V_* + 4\nu(1 - k)}{z - (F^{-1}(V_m/2))'}. \tag{23}$$

Здесь штрих означает производную от  $F^{-1}$  по аргументу. Уравнение дополняется начальным условием  $z = 0, V_m(0) = V_{m0}$ . Решение строится до значения  $z = z_1$  ( $z_1$  определяется из соотношения (20):  $V_m(z_1) = V_{m0}(1 - k) - V_*(2 - k)$ ). Предположим, что решение уравнения (23) найдено. Обозначим его через  $V_m = f_1(z)$ .

Используя (16) и (22), можно построить решения уравнения для области разгрузки на интервале  $0 < z \leq z_1$  (рис. 4):

$$\frac{1}{2} V = \begin{cases} F(\xi + (V/2 + \nu)z), & V_m(z) \geq V \geq V_m(0) - \Delta V(0), \\ F(\xi + (V/2 + \nu)z - (1 - k)\nu z_{pe}(V)), & V_m(0) - \Delta V(0) > V > V_m(z) - \Delta V(z), \\ F(\xi + (V/2 + \nu k)z), & V_m(z) - \Delta V(z) \geq V > 0. \end{cases} \tag{24}$$

Здесь  $z_{pe}(V)$  — момент прихода волны упругой разгрузки в точку  $V$ , первоначально находившуюся в пластической области. Второе равенство следует из соотношения

$$\xi = F^{-1}(V/2) - (V/2 + \nu k)z_{pe} - (V/2 + \nu)(z - z_{pe}), \quad (25)$$

которое вытекает из (22). Для вычисления  $z_{pe}(V)$  необходимо рассмотреть значения  $V_m(z_1) > V > V_m(z_1) - \Delta V(z_1)$ . Точка  $V$  из этого интервала сначала находится в пластической, а затем в упругой области течения. Момент  $z_{pe}(V)$  прохождения границы этих областей определяется из уравнения (20):  $f_1(z_{pe})(1 - k) - V_*(2 - k) = V$ , откуда

$$z_{pe} = f_1^{-1}((V + V_*(2 - k))/(1 - k)) \quad (26)$$

( $f_1^{-1}$  — функция, обратная  $f_1$ ). Таким образом, известное решение для амплитуды  $V_m = f_1(z)$  с учетом (20) и (26) полностью определяет волну разгрузки (24) на интервале  $0 < z \leq z_1$ .

Рассмотрим интервал изменения (затухания) амплитуды  $V_m(z_1) > V_m > V_m(z_1) - \Delta V(z_1)$ . Соотношения (25) и (26) при  $\xi = \xi_p$  и  $V = V_m$  и уравнение (21) дают уравнение для амплитуды ударной волны в этом интервале:

$$\frac{dV_m}{dz} = -\frac{1}{2} \frac{V_m - V_* + 4\nu(1 - k)}{z - (F^{-1}(V_m/2))' - 2\nu(f_1^{-1}((V_m + V_*(2 - k))/(1 - k)))'}. \quad (27)$$

Здесь также штрихи означают производные по аргументу. Начальное условие для уравнения (27) имеет вид

$$z = z_1, \quad V_m(z_1) = V_{m0}(1 - k) - V_*(2 - k).$$

Интегрирование (27) проводится до значения  $z = z_2$  ( $z_2$  определяется из соотношения (20):  $V_m(z_2) = V_m(z_1)(1 - k) - V_*(2 - k)$ ). Предположим, что решение на интервале  $z_1 < z \leq z_2$  найдено. Обозначим его через  $V_m = f_2(z)$ . Тогда решение в области разгрузки на этом интервале значений  $z$  имеет вид

$$\frac{1}{2}V = \begin{cases} F(\xi + (V/2 + \nu)z - \\ - (1 - k)\nu f_1^{-1}((V + V_*(2 - k))/(1 - k))), & V_m(z) \geq V \geq V_m(z_2), \\ F(\xi + (V/2 + \nu)z - \\ - (1 - k)\nu f_2^{-1}((V + V_*(2 - k))/(1 - k))), & V_m(z_2) > V > V_m(z) - \Delta V(z), \\ F(\xi + (V/2 + \nu k)z), & V_m(z) - \Delta V(z) \geq V > 0. \end{cases} \quad (28)$$

Аналогично для  $n$ -го интервала  $z_{n-1} < z \leq z_n$ , где  $z_0 = 0$  и  $z_n$  определяется из уравнения  $V_m(z_n) = V_m(z_{n-1})(1 - k) - V_*(2 - k)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , решение  $V_m(z)$  определяется из уравнения (27), в которое вместо  $f_1^{-1}$  подставляется  $f_{n-1}^{-1}$  ( $V_m = f_{n-1}(z)$  — известное решение из предыдущего ( $n - 1$ )-го интервала). Решение для волны разгрузки строится аналогично (28). Длина цепочки  $N$  определяется амплитудой волны: если  $V_*$  оказывается внутри  $N$ -го интервала, то цепочка на этом номере обрывается и решение строится до значения  $V_m = V_*$ .

Рассмотрим случай, когда на границе  $z = 0$  задан импульс треугольной формы, т. е. когда функция  $F$  в (16) определяется следующим образом:

$$F(\xi) = V_{m0}(\xi_l - \xi)/L_0 \quad \text{при} \quad \xi_l - L_0 \leq \xi \leq \xi_l, \quad F(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad \xi > \xi_l.$$

Для случая  $n = 1$  из (23) имеем

$$z = b(y_0^2/y^2 - 1), \quad 0 < z \leq z_1, \quad z_1 = b(y_0^2/[(1 - k)y_0 - \beta]^2 - 1), \quad (29)$$

где  $y(z) = V_m(z) - V_* + 4\nu(1 - k)$ ;  $y_0 = y(0)$ ;  $b = L_0/V_{m0}$ ;  $\beta = 2V_* - 4\nu k(1 - k)$ . Решение для волны разгрузки определяется из (24):

$$\frac{1}{2} V = \begin{cases} (\xi_l - \xi - \nu z)/(z + b), & V_m(z) \geq V \geq V_{m0}(1 - k) - V_*(2 - k), \\ (\xi_l - \xi - \nu z - \nu(1 - k)z_{pe}(V))/(z + b), & V_{m0}(1 - k) - V_*(2 - k) > V > \\ & > V_m(z)(1 - k) - V_*(2 - k), \\ (\xi_l - \xi - \nu kz)/(z + b), & V_m(z)(1 - k) - V_*(2 - k) \geq V > 0. \end{cases} \quad (30)$$

Здесь  $z_{pe}(V) = b((1 - k)^2 y_0^2 / (V - V_* + 4\nu(1 - k) + \beta)^2 - 1)$ . Во внутренних граничных точках  $z_{pe}(V_{m0}(1 - k) - V_*(2 - k)) = 0$  и  $z_{pe}(V_m(z)(1 - k) - V_*(2 - k)) = z$ , т. е. кусочное решение (30) является непрерывным при  $0 < V < V_m(z)$ . Однако, как нетрудно установить прямым вычислением, в этих точках первая производная  $\partial V / \partial \xi$  терпит разрыв.

Для случая  $n = 2$  имеем

$$z + b = b \frac{y_0^2}{y^2} \left( 1 + 8\nu(1 - k)^3 \left( \frac{y + \beta/2}{(y + \beta)^2} - \frac{y_1 + \beta/2}{(y_1 + \beta)^2} \right) \right), \quad z_1 < z \leq z_2. \quad (31)$$

Здесь  $y_1 = (1 - k)y_0 - \beta$ ;  $z_2$  определяется из (31), если вместо  $y$  подставить  $y_2 = (1 - k)y_1 - \beta$ . Решение для волны разгрузки определяется из (28).

Если в (29) или (31) положить  $V_* = \nu = 0$ , то получим известное в гидродинамике (в приближении нелинейной акустики) решение [2, 9]. Особенность затухания амплитуды пластической ударной волны состоит в том, что она достигает значения амплитуды упругого предвестника  $V_*$  за конечное время (в гидродинамике амплитуда ударной волны стремится к нулю асимптотически при  $z \rightarrow \infty$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Shock waves in materials science** / Ed. by A. B. Sawaoka. Tokyo; N. Y.: Springer-Verlag, 1993.
2. **Руденко О. В., Солуян С. И.** Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
3. **Уизем Дж.** Линеинные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
4. **Myagkov N. N.** Nonlinear waves in shock-loaded condensed matter // J. Phys. D. Appl. Phys. 1994. V. 27. P. 1678–1686.
5. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
6. **Tonks D. L.** The data shop: A database of weak-shock constitutive data. Rep. N LA-12068-MS. Los Alamos, 1991.
7. **Кукуджанов В. Н.** Нелинейные волны в упругопластических средах // Волновая динамика машин. М.: Наука, 1991. С. 126–140.
8. **Садовский В. М.** Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука, 1997.
9. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Гидродинамика. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию 22/V 2002 г.