

УДК 621.9.047; 532.528

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОЙ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ

Н. М. Миназетдинов

Камская государственная инженерно-экономическая академия, 423810 Набережные Челны  
E-mail: matem@kampi.ru

Предложен способ определения формы границы анода-детали при заданной форме катода-инструмента в плоских задачах теории размерной электрохимической обработки металлов. В рамках принятых предположений граница анода-детали разделяется на рабочую зону, в которой происходит растворение металла, и примыкающую к ней область, в которой обработка (растворение) прекращается. Исходная задача сводится к задаче о фиктивном плоскопараллельном потенциальном течении идеальной жидкости с нелинейным условием на свободной поверхности. При этом точка, разделяющей две указанные области анодной границы, соответствует точке схода фиктивного потока с твердой границы. Для построения замкнутой системы уравнений, определяющих решение задачи, в точке схода задается условие гладкого отрыва Бриллюэна — Вилла.

**Ключевые слова:** электрохимическая обработка металлов, гидродинамическая аналогия, численно-аналитическое решение.

**Введение.** Размерная электрохимическая обработка (ЭХО) является одним из современных методов изготовления деталей из металлов и сплавов с заданными формой, размерами и качеством поверхности за счет анодного растворения заготовки в проточном электролите с помощью специального катода-инструмента. Подробное описание процесса и технологии размерной ЭХО приведено в работах [1–4].

Для обеспечения высокой точности копирования формы и размеров катода-инструмента на обрабатываемой заготовке с заданным припуском на обработку нужно локализовать процесс электрохимического растворения металла в зоне, предназначенной для обработки. За пределами этой зоны процесс растворения должен резко замедляться вплоть до полного прекращения. В работе [4] на основе анализа электродных процессов для различных электролитов показано, что локализация растворения металла существенно зависит от состава электролита, свойств металла и условий проведения процесса. При малых значениях плотности тока  $i$  значение выхода по току  $\eta$  (доля общего количества электричества, затраченная на анодное растворение металла (сплава)) для реакций анодного растворения металла [3] в растворах  $\text{NaNO}_3$ ,  $\text{NaClO}_3$  практически равно нулю. В результате анодной активации металла [4] под действием анионов этих солей при некоторой критической плотности тока  $i_{cr}$  значение  $\eta$  начинает увеличиваться с увеличением  $i$ . При этом растворение металла в основном сосредоточено на тех участках обрабатываемой заготовки, где межэлектродное расстояние наименьшее, а скорость растворения максимальна. Применение растворов  $\text{NaNO}_3$ ,  $\text{NaClO}_3$  позволяет добиваться высокой точности обработки.

При соблюдении необходимых условий после длительного времени обработки поверхность принимает определенную, постоянную во времени форму, которая называется установившейся, или стационарной [4]. В установившемся режиме форма обрабатываемой поверхности в подвижной системе координат, связанной с катодом, не изменяется, т. е. поверхность анода перемещается вместе с катодом с постоянной скоростью  $V_c$ .

В настоящей работе в рамках модели идеального процесса [4] строится численно-аналитическое решение плоской задачи теории ЭХО — определяется установившаяся форма поверхности детали при обработке двугранным катодом-инструментом с изолированной боковой гранью с учетом локализирующих свойств указанных электролитов.

**1. Модель процесса.** В модели идеального процесса ЭХО электрическое поле может быть описано уравнением Лапласа

$$\nabla^2 u = 0, \quad (1.1)$$

где  $u$  — потенциал электрического поля. Потенциал  $u_a = U - E_a$  на поверхности детали (анода) определяется разностью между заданным неизменным значением напряжения  $U$  между электродами и скачком электродного потенциала  $E_a$  анода. На рабочей поверхности катода-инструмента (катода) потенциал  $u_c = -E_c$  представляет собой скачок электродного потенциала катода. В модели идеального процесса предполагается, что  $E_a, E_c$  являются постоянными усредненными на поверхности электродов скачками потенциалов [4].

Распределение плотности тока  $i$  на установившейся анодной границе определяется равенством [4]

$$\eta(i_a)i_a = (\rho V_c/\varepsilon) \cos \theta, \quad (1.2)$$

где  $i_a$  — анодная плотность тока;  $\varepsilon$  — электрохимический эквивалент металла;  $\rho$  — плотность материала анода;  $\theta$  — угол между вектором  $\mathbf{V}_c$  скорости подачи катода и вектором  $\mathbf{n}_a$  внешней нормали в данной точке анодной границы. В условии (1.2) учитывается, что  $\eta$  является функцией  $i$ .

В работе [5] представлены графики зависимости выхода по току от плотности тока при обработке стали марки 5ХНМ в растворах  $\text{NaNO}_3, \text{NaClO}_3$  с различной концентрацией  $C$ . Для указанных электролитов аналитическую зависимость  $\eta(i_a)$  можно представить в виде [6]

$$\eta(i_a) = \begin{cases} 0, & i_a \leq i_{cr}, \\ a_0 + a_1/i_a, & i_a > i_{cr}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Здесь  $a_0, a_1, i_{cr}$  — постоянные.

Используя (1.2), (1.3) и равенство  $i_a = \kappa \partial u / \partial n_a$ , где  $\kappa$  — удельная электропроводность среды, получим краевое условие на анодной границе

$$\kappa \frac{\partial u}{\partial n_a} = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{\rho V_c}{a_0 \varepsilon} \cos \theta. \quad (1.4)$$

Перейдем к безразмерным переменным  $\psi = (u - u_c)/(u_a - u_c)$ ,  $n = n_a/H$  ( $H = \kappa(u_a - u_c)/i_0$  — характерный размер;  $i_0 = \rho V_c/\varepsilon$  — характерная плотность тока) [7]. Из (1.1) следует, что функция  $\psi$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\nabla^2 \psi = 0$  в межэлектродном промежутке. На границах электродов выполняются условия

$$\psi_a = 1, \quad \psi_c = 0. \quad (1.5)$$

Условие (1.4) принимает вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = a + b \cos \theta, \quad a = -\frac{a_1}{a_0 i_0}, \quad b = \frac{1}{a_0}. \quad (1.6)$$

На линиях симметрии и границах диэлектрических покрытий выполняется условие

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0. \quad (1.7)$$

В работе [8] выявлена важная гидродинамическая аналогия задачи теории размерной ЭХО металлов для установившегося режима и показана возможность применения теории краевых задач для аналитических функций при исследовании плоскопараллельных задач теории электрохимического формообразования.

Согласно гидродинамической аналогии плоское потенциальное электрическое поле моделируется фиктивным плоскопараллельным потенциальным течением идеальной несжимаемой жидкости. Будем считать, что подвижная система координат связана с катодом и направление оси ординат совпадает с направлением скорости подачи катода относительно неподвижного анода. Если ввести комплексный потенциал  $W(x, y) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  электростатического поля (функция  $\varphi(x, y)$  соответствует силовой функции электростатического поля), то вдоль линии  $\psi = \text{const}$  будет выполняться равенство  $\partial\psi/\partial n = V$ . Тогда при гидродинамической интерпретации задач размерной ЭХО вектор  $\mathbf{V}$  соответствует вектору скорости указанного фиктивного потока. Угол наклона вектора  $\mathbf{V}$  к оси абсцисс в данной точке анодной границы с точностью до знака совпадает с углом между направлением подачи катода и вектором внешней нормали в той же точке. Из условия (1.6) получаем

$$V = a + b \cos \theta. \quad (1.8)$$

Здесь  $V, \theta$  — модуль и аргумент вектора скорости соответственно. Выражение (1.8) определяет годограф скорости указанного течения на неизвестной анодной границе. Гидродинамическая аналогия облегчает формулировку краевых задач, что позволяет использовать методы, применяемые в теории струй идеальной жидкости [9, 10], для исследования задач размерной ЭХО металлов.

**2. Постановка задачи и ее численно-аналитическое решение.** Схема межэлектродного промежутка представлена на рис. 1. Электрод-инструмент, представленный на данной схеме, можно применять для формообразования полостей деталей машин, обработки кромок и в других технологических процессах.

Согласно условию (1.3) искомую анодную границу можно разделить на две области. В области  $AB$  происходит растворение металла. Нормальная производная  $\partial\psi/\partial n$  на этом участке удовлетворяет условию (1.6). В области, моделируемой вертикальным прямолинейным участком  $AD$ , анодный выход по току практически равен нулю и растворения металла не происходит. Плотность тока на участке  $AD$  изменяется от значения  $i_{cr}$  в точке  $A$  до нуля в бесконечно удаленной точке  $D$ . Положение точки  $A$  заранее неизвестно и

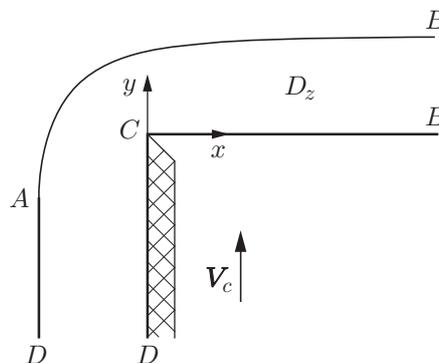


Рис. 1. Схема межэлектродного промежутка:

$B CD$  — граница катода;  $BC$  — рабочая поверхность катода, перпендикулярная направлению его подачи;  $CD$  — граница диэлектрического покрытия

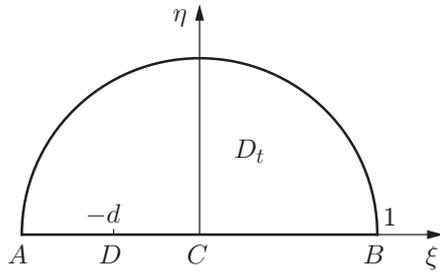


Рис. 2

Рис. 2. Плоскость параметрической переменной  $t$

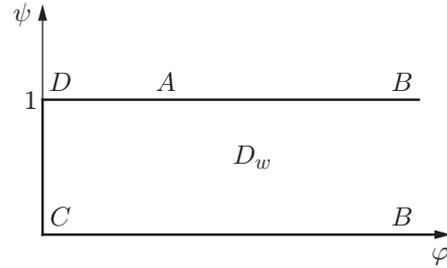


Рис. 3

Рис. 3. Область изменения комплексного потенциала  $W(t)$

должно быть определено в ходе решения задачи. Вектор  $V_c$  указывает направление подачи катода. Направление оси абсцисс ортогонально направлению подачи катода.

Гидродинамическим аналогом является задача теории плоских установившихся течений идеальной несжимаемой жидкости об определении границы свободной поверхности с заданным законом изменения скорости (1.8). Поток создается системой источников, непрерывно распределенных вдоль линии  $CD$ . В дальнейшем рассматривается соответствующая указанной постановке струйная задача.

В соответствии с априорными представлениями о форме свободной границы  $AB$  на этом участке угол  $\theta$  монотонно уменьшается от значения  $\pi/2$  до нуля, т. е. на свободной границе точки перегиба отсутствуют. Вдоль границы  $AD$  скорость должна монотонно уменьшаться от постоянного значения  $V = a$  в точке  $A$  до нуля в бесконечно удаленной точке  $D$ . Для обеспечения выполнения указанных требований используем известное в гидродинамике условие гладкого отрыва Бриллюэна — Вилла [9, 10]. Согласно этому условию кривизна свободной поверхности  $AB$  в точке  $A$  конечна и совпадает с кривизной стенки  $AD$ , т. е. в данной задаче равна нулю.

Введем вспомогательную комплексную переменную  $t = \xi + i\eta$ , изменяющуюся в области  $D_t = \{|t| \leq 1, \eta \geq 0\}$  (рис. 2), и будем искать функцию  $z(t)$ , конформно отображающую полукруг единичного радиуса на область течения. При этом требуется соответствие точек, указанных на рис. 1, 2. Вместо функции  $z(t)$  можно искать функцию Жуковского [10]

$$\chi(t) = \ln \left( \frac{1}{V_0} \frac{dW}{dz} \right) = r - i\theta, \quad r = \ln \left( \frac{V}{V_0} \right),$$

где  $V_0 = a + b$  — значение скорости фиктивного течения в точке  $B$  ( $t = 1$ ). Функция  $\chi(t)$  связана с функциями  $W(t)$  и  $z(t)$  соотношением

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\exp(-\chi(t))}{V_0} \frac{dW}{dt}. \tag{2.1}$$

Согласно условиям (1.5), (1.7) область  $D_w$  изменения комплексного потенциала представляет собой полуполосу единичной ширины (рис. 3). Выражение для производной комплексного потенциала имеет вид

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1+d}{\pi} \frac{t+1}{(1-t)\sqrt{t(t+d)(1+td)}}.$$

Функцию  $\chi(t)$  представим в виде суммы [10]

$$\chi(t) = \chi_*(t) + \omega(t), \tag{2.2}$$

где  $\omega(t)$  — аналитическая в области изменения переменной  $t$  функция; функция  $\chi_*(t) = r_* - i\theta_*$  соответствует течению по заданной схеме (см. рис. 1) с условием  $V_* = V_0$  на анодной границе  $AB$ ;  $r_* = \ln(V_*/V_0)$ . Из условия (1.8) и схемы течения (см. рис. 1) следует, что на границе области  $D_t$  функции  $\chi(t)$  и  $\chi_*(t)$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} a + b \cos \theta(t) - V_0 \exp(r(t)) &= 0, & t &= \exp(i\sigma), & \sigma &\in [0, \pi], & r(1) &= 0, \\ \operatorname{Im} \chi(\xi) = \operatorname{Im} \chi_*(\xi) &= -\pi/2, & \xi &\in [-1, -d), \\ \operatorname{Im} \chi(\xi) = \operatorname{Im} \chi_*(\xi) &= -\pi, & \xi &\in (-d, 0), \\ \operatorname{Im} \chi(\xi) = \operatorname{Im} \chi_*(\xi) &= 0, & \xi &\in (0, 1], \\ \operatorname{Re} \chi_*(t) &= 0, & t &= \exp(i\sigma), & \sigma &\in [0, \pi]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Используя метод особых точек Чаплыгина [10], получим

$$\chi_*(t) = -\ln(t) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{t+d}{1+td}\right), \quad (2.4)$$

где  $d$  — координата образа точки  $D$  в области  $D_t$ .

Учитывая равенство (2.2) и граничные условия (2.3), для функции  $\omega(t)$  получим следующую нелинейную краевую задачу:

$$a + b \cos(T + \mu) - V_0 \exp(\lambda) = 0; \quad (2.5)$$

$$\operatorname{Im} \omega(\xi) = 0, \quad \xi \in [-1, 1], \quad \operatorname{Re} \omega(1) = 0. \quad (2.6)$$

Здесь

$$T = \operatorname{Im} \chi_*(\exp(i\sigma)), \quad \mu = \operatorname{Im} \omega(\exp(i\sigma)), \quad \lambda = \operatorname{Re} \omega(\exp(i\sigma)).$$

В силу условия (2.6) функция  $\omega(t)$ , представляющая собой решение краевой задачи (2.5), (2.6), имеет разложение вида

$$\omega(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \quad c_0 = -\sum_{k=1}^{\infty} c_k, \quad (2.7)$$

где  $c_k$  — вещественные постоянные.

Согласно [9, 10] условие гладкого отрыва в точке  $A$  можно представить в виде равенства

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = 0 \quad \text{при} \quad \sigma = \pi. \quad (2.8)$$

С помощью формул (2.2), (2.4), (2.7) это соотношение приводится к виду

$$1 - \frac{1+d}{2(1-d)} - \sum_{k=1}^{\infty} c_k k (-1)^k = 0.$$

Отсюда следует

$$d = \frac{F-1}{F+1}, \quad F = 2 \left( 1 - \sum_{k=1}^{\infty} c_k k (-1)^k \right). \quad (2.9)$$

Все необходимые геометрические характеристики течения можно найти с помощью параметрической зависимости (2.1)

$$dz = \frac{1+d}{\pi V_0 \exp(c_0)} \frac{1+t}{1-t} \frac{\sqrt{t}}{t+d} \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n\right) dt.$$

Расчетные значения параметра  $d$  и координат точки  $A$

$N$	$d$	$x_A$	$y_A$
60	0,821 400 290 538 45	-0,660 722 441 393 243	-0,707 434 137 085 583
120	0,821 372 350 965 38	-0,660 810 055 242 296	-0,707 194 346 531 225
240	0,821 365 393 056 51	-0,660 809 957 626 806	-0,707 175 375 037 151

Для численного решения задачи задаются коэффициенты  $a_0, a_1$ , характеризующие свойства электролита, и характерная плотность тока  $i_0$ . Коэффициенты разложения (2.7) определяются таким образом, чтобы на искомой анодной границе выполнялось условие (2.5). Задача решается методом коллокации, который широко используется при решении задач гидродинамики плоских установившихся течений идеальной жидкости при наличии свободных поверхностей [10]. Система уравнений для вычисления коэффициентов разложения (2.7) решается методом Ньютона совместно с уравнением (2.9), предназначенным для определения математического параметра  $d$ .

**3. Результаты расчетов.** Для оценки точности численных результатов в зависимости от числа  $N$  точек коллокации выполнены тестовые расчеты при следующих значениях задаваемых параметров:  $i_0 = 100 \text{ A/cm}^2$ ,  $a_0 = 0,906$ ,  $a_1 = -12,818$  (значения  $a_0, a_1$  соответствуют раствору  $\text{NaNO}_3$  ( $C = 15 \%$ )) [6]. В таблице приведены значения математического параметра  $d$  и координаты точки  $A$  при различных значениях числа  $N$ . При  $N = 120$  приближенное решение в данном частном случае можно найти с точностью до  $10^{-4}$ . На рис. 4 приведены результаты расчета анодной границы. На рис. 5 представлена область изменения функции

$$\frac{dW}{dz} = V_0 \exp(\chi(t)) = V \exp(-i\theta) = V_x - iV_y$$

для значения параметра  $d_* \approx 0,821 365$ , найденного из условия (2.8) гладкого отрыва. Видно, что вдоль свободной границы  $AB$  модуль скорости монотонно уменьшается от

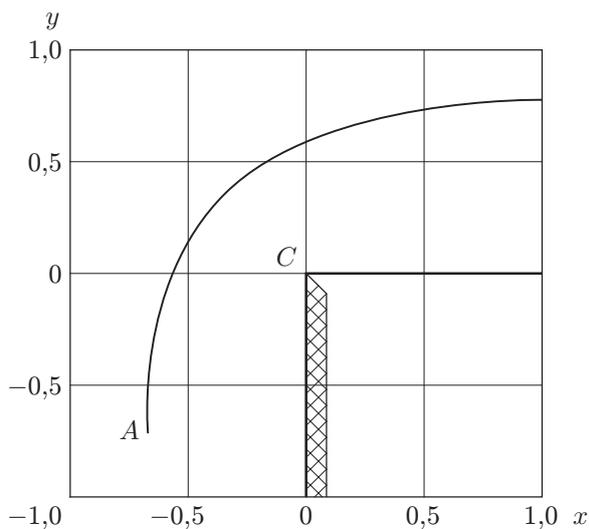


Рис. 4

Рис. 4. Результаты расчета анодной границы (заштрихованная область — катод-инструмент)

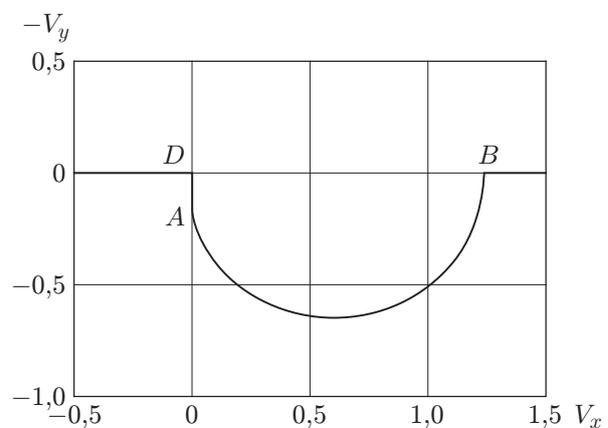


Рис. 5

Рис. 5. Область годографа скорости

значения  $a + b \approx 1,245$  в точке  $B$  до значения  $a \approx 0,141$  в точке  $A$ . Вдоль границы  $AD$  скорость монотонно уменьшается, достигая нуля в бесконечно удаленной точке  $D$ .

При  $d \neq d_*$  нарушается условие монотонного изменения скорости вдоль свободной границы  $AB$  и границы  $AD$ , что не позволяет построить свободную границу, удовлетворяющую граничному условию (1.8).

**Заключение.** В работе на основе двумерной математической модели идеального процесса [4] с учетом конкретной зависимости выхода по току от анодной плотности тока решена задача расчета формы установившейся анодной границы для заданной конфигурации катода-инструмента. Применение условия гладкого отрыва [9] позволяет определить свободную границу, удовлетворяющую граничному условию (1.8). При этом обеспечивается единственно возможная величина зазора между боковой изолированной гранью катода и вертикальным участком обработанной поверхности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Мороз И. И.** Электрохимическая обработка металлов / И. И. Мороз, Г. А. Алексеев, О. А. Водяницкий, Ю. С. Волков, Р. Б. Исакова, Б. Б. Кузнецов, М. А. Моница. М.: Машиностроение, 1969.
2. **Седыкин Ф. В.** Размерная электрохимическая обработка деталей машин. М.: Машиностроение, 1976.
3. **Щербак М. В.** Основы теории и практики электрохимической обработки металлов и сплавов / М. В. Щербак, М. А. Толстая, А. П. Анисимов, В. Х. Постаногов. М.: Машиностроение, 1981.
4. **Давыдов А. Д.** Высокоскоростное электрохимическое формообразование / А. Д. Давыдов, Е. Козак. М.: Наука, 1990.
5. **Седыкин Ф. В., Орлов Б. П., Матасов В. Ф.** Исследование анодного выхода по току при электрохимической обработке с применением постоянного и импульсного напряжения // Технология машиностроения (Тула). 1975. № 39. С. 3–10.
6. **Котляр Л. М., Миназетдинов Н. М.** Определение формы анода с учетом свойств электролита в задачах электрохимической размерной обработки металлов // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 3. С. 179–184.
7. **Клоков В. В.** Электрохимическое формообразование. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984.
8. **Клоков В. В., Костерин А. В., Нужин М. Т.** О применении обратных краевых задач в теории электрохимической размерной обработки // Тр. семинара по краевым задачам (Казань). 1972. № 9. С. 132–140.
9. **Биркгоф Г.** Струи, следы и каверны / Г. Биркгоф, Э. Сарантонелло. М.: Мир, 1964.
10. **Гуревич М. И.** Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979.

*Поступила в редакцию 3/IV 2008 г.*