УДК 539.3

ДЕФОРМАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

А. Г. Колпаков, С. И. Ракин*

Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
630102 Новосибирск
* ОАО Новосибирский завод химических концентратов, 630110 Новосибирск
E-mail: agk@neic.nsk.su

Показано, что в композите может происходить смена типа определяющих соотношений, а именно: слоистый композит, образованный из слоев физически линейных материалов, при нелинейных деформациях должен описываться нелинейным законом Гука. Также показано, что локальные напряжения, могут быть не пропорциональны упругим постоянным слоев при нелинейных деформациях.

Ключевые слова: слоистые композиты, макроскопические свойства, нелинейные деформации.

Постановка задачи. Композиты могут иметь макроскопические свойства, отличные от свойств своих компонентов [1]. Однако примеров качественного изменения свойств композитов известно не много [2–4]. Рассмотрим образец слоистого материала единичной толщины (рис. 1,*а*) и соответствующий образец однородного материала (рис. 1,*б*). Требование бесконечной протяженности образцов по осям x_1, x_2 снимает проблему краевого эффекта. Пусть эти образцы имеют одинаковые деформации “в целом”. Будем рассчитывать их реакции на эти деформации путем определения усилий на границе образцов. Наша цель — ввести определяющие уравнения для однородного образца так, чтобы реакции обоих образцов на равные деформации были одинаковы. Рассмотрим образцы, бесконечные в плоскости Ox_1x_2 (чтобы избежать проблем, связанных с краевыми эффектами) и простирающиеся от 0 до 1 по оси Ox_3.

Получение усредненных определяющих уравнений. Для однородного образца рассмотрим перемещения

$$u_1 = v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + v_{13}x_3,$$
$$u_2 = v_{12}x_1 + v_{22}x_2 + v_{23}x_3, \qquad u_3 = v_{13}x_1 + v_{23}x_2 + v_{33}x_3, \tag{1}$$

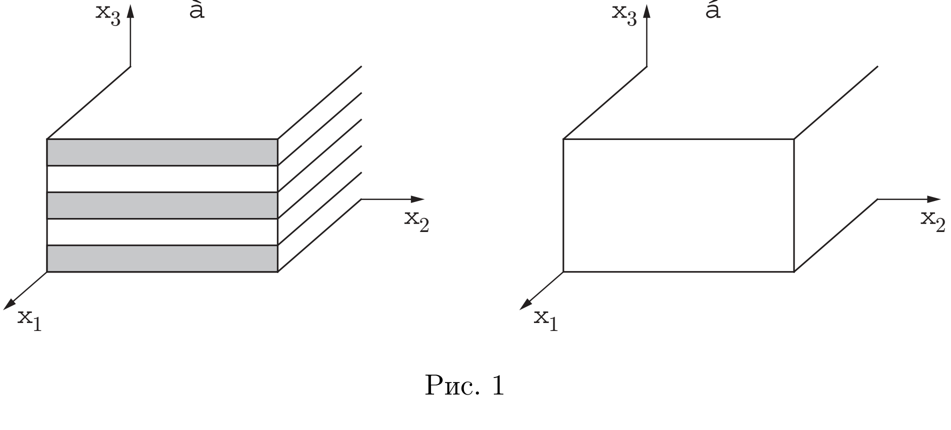

Рис. 1

которые удовлетворяют уравнениям равновесия для однородного тела и при разных v_{ij} соответствуют всем типам базисных деформаций (растяжению вдоль осей и сдвигу). Рассмотрим деформацию слоистого образца при задании на его границе $x_3 = 0$ и $x_3 = 1$ тех же перемещений (1), что и в однородном образце. Будем искать решение задачи теории упругости в виде суммы однородных перемещений (1) (деформаций однородного образца) и локальных перемещений $v_i(x_3)$, не меняющих деформацию "в целом":

$$U_1 = v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + v_{13}x_3 + v_1(x_3),$$
$$U_2 = v_{12}x_1 + v_{22}x_2 + v_{23}x_3 + v_2(x_3), \qquad U_3 = v_{13}x_1 + v_{23}x_2 + v_{33}x_3 + v_3(x_3). \tag{2}$$

Для равенства перемещений (1) и (2) на границах образцов функции v_1, v_2 и v_3 должны обращаться в нуль при $x_3 = 0$ и $x_3 = 1$:

$$v_i(0) = v_i(1) = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Потребуем выполнения уравнений равновесия теории упругости (используются нелинейные уравнения теории упругости, записанные в недеформированной системе координат)

$$(\sigma_{nk}(\delta_{\alpha k} + U_{\alpha,k}))_{,n} = 0, \qquad n, \alpha, k = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Проверим, что функции вида (2) могут удовлетворять уравнениям равновесия (4). Рассмотрим нелинейные деформации

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})/2. \tag{5}$$

Деформации композита, рассчитанные по формулам (2), (5), имеют вид

$$\varepsilon_{11} = v_{11} + (v_{11}^2 + v_{12}^2 + v_{13}^2)/2, \qquad \varepsilon_{12} = v_{12} + (v_{11}v_{12} + v_{12}v_{22} + v_{13}v_{23})/2,$$
$$\varepsilon_{13} = v_1'/2 + v_{13} + (v_{11}v_{13} + v_{12}v_{23} + v_{13}v_{33} + v_1'v_{11} + v_2'v_{12} + v_3'v_{13})/2,$$
$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}, \qquad \varepsilon_{22} = v_{22} + (v_{12}^2 + v_{22}^2 + v_{23}^2)/2, \qquad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}, \qquad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}, \tag{6}$$
$$\varepsilon_{23} = v_2'/2 + v_{23} + (v_{12}v_{13} + v_{22}v_{23} + v_{23}v_{33} + v_1'v_{12} + v_2'v_{22} + v_3'v_{23})/2,$$
$$\varepsilon_{33} = v_3' + v_{33} + (v_{13}^2 + v_{23}^2 + v_{33}^2 + v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2)/2 + v_1'v_{13} + v_2'v_{23} + v_3'v_{33},$$

где штрих означает производную по x_3.

Деформации однородного тела, рассчитанные по формулам (1), (5), обозначим через ε_{ij}^*:

$$\varepsilon_{11}^* = \varepsilon_{11}, \qquad \varepsilon_{12}^* = \varepsilon_{12}, \qquad \varepsilon_{13}^* = v_{13} + (v_{11}v_{13} + v_{12}v_{23} + v_{13}v_{33})/2,$$
$$\varepsilon_{21}^* = \varepsilon_{21}, \qquad \varepsilon_{22}^* = \varepsilon_{22}, \qquad \varepsilon_{23}^* = v_{23} + (v_{12}v_{13} + v_{22}v_{23} + v_{23}v_{33})/2, \tag{7}$$
$$\varepsilon_{31}^* = \varepsilon_{31}, \qquad \varepsilon_{32}^* = \varepsilon_{32}, \qquad \varepsilon_{33}^* = v_{33} + (v_{13}^2 + v_{23}^2 + v_{33}^2)/2.$$

Величины ε_{ij}^*, определенные формулами (7), — нелинейные деформации "в целом". Они должны быть одинаковы для слоистого и однородного тел.

Для решения задачи полезным оказывается следующий прием. Рассмотрим произведения $\varepsilon_{ki}^* v_i'$

$$\varepsilon_{ki}^* v_i' = v_{ki}v_i' + v_{kj}v_{ji}v_i' \quad \text{(суммирование по } j). \tag{8}$$

Так как v_j' одного порядка с ε_{ij}^* и v_{ij}, то в выражениях (8) можно отбросить члены выше второго порядка как малые, и тогда верны равенства

$$\varepsilon_{ki}^* v_i' = v_{ki}v_i'. \tag{9}$$

Пользуясь равенствами (9), можно записать (6) в виде

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{11}=\varepsilon^*_{11}, \qquad \varepsilon_{12}=\varepsilon^*_{12}, \qquad \varepsilon_{13}=\varepsilon^*_{13}+v'_1/2+(\varepsilon^*_{11}v'_1+\varepsilon^*_{12}v'_2+\varepsilon^*_{13}v'_3)/2,\\
\varepsilon_{22}=\varepsilon^*_{22}, \qquad \varepsilon_{21}=\varepsilon^*_{12}, \qquad \varepsilon_{23}=\varepsilon^*_{23}+v'_2/2+(\varepsilon^*_{12}v'_1+\varepsilon^*_{22}v'_2+\varepsilon^*_{23}v'_3)/2,\\
\varepsilon_{33}=\varepsilon^*_{33}+v'_3+\varepsilon^*_{13}v'_1+\varepsilon^*_{23}v'_2+\varepsilon^*_{33}v'_3+(v'^2_1+v'^2_2+v'^2_3)/2.
\end{gathered} \tag{10}$$

То есть удается выразить нелинейные локальные деформации ε_{ik} в слоистом композите через нелинейные деформации ε^*_{ik} “в целом” и производные от локальных перемещений v'_i.

Рассмотрим слои из физически линейных материалов. Для них закон Гука, записанный в недеформированной системе координат, имеет вид

$$\begin{gathered}
\sigma_{11}=(\lambda+2\mu)\varepsilon_{11}+\lambda(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})=(\lambda+2\mu)\varepsilon^*_{11}+\lambda\varepsilon^*_{22}+\\
+\lambda(\varepsilon^*_{33}+v'_3+\varepsilon^*_{13}v'_1+\varepsilon^*_{23}v'_2+\varepsilon^*_{33}v'_3)+\lambda(v'^2_1+v'^2_2+v'^2_3)/2,\\
\sigma_{22}=(\lambda+2\mu)\varepsilon_{22}+\lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{33})=(\lambda+2\mu)\varepsilon^*_{22}+\lambda\varepsilon^*_{11}+\\
+\lambda(\varepsilon^*_{33}+v'_3+\varepsilon^*_{13}v'_1+\varepsilon^*_{23}v'_2+\varepsilon^*_{33}v'_3)+\lambda(v'^2_1+v'^2_2+v'^2_3)/2,\\
\sigma_{12}=2\mu\varepsilon_{12}, \qquad \sigma_{13}=2\mu\varepsilon_{13}, \qquad \sigma_{21}=\sigma_{12}, \qquad \sigma_{23}=2\mu\varepsilon_{23},\\
\sigma_{31}=\sigma_{13}, \qquad \sigma_{33}=\lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})+(\lambda+2\mu)\varepsilon_{33},
\end{gathered} \tag{11}$$

где через σ_{ij} обозначены напряжения в недеформированной системе координат.

Перейдем к рассмотрению уравнений равновесия. Так как все функции зависят только от одной переменной x_3, то уравнения равновесия (4) принимают вид

$$(\sigma_{nk}(\delta_{\alpha k}+U'_\alpha))'=0. \tag{12}$$

Из (12) следуют равенства

$$\begin{gathered}
\sigma_{13}(1+\varepsilon^*_{11})+\sigma_{23}\varepsilon^*_{12}+\sigma_{33}(\varepsilon^*_{13}+v'_1)=C_{13}=\mathrm{const},\\
\sigma_{13}\varepsilon^*_{12}+\sigma_{23}(1+\varepsilon^*_{22})+\sigma_{33}(\varepsilon^*_{23}+v'_2)=C_{23}=\mathrm{const},\\
\sigma_{13}\varepsilon^*_{13}+\sigma_{23}\varepsilon^*_{23}+\sigma_{33}(1+\varepsilon^*_{33}+v'_3)=C_{33}=\mathrm{const}\,.
\end{gathered} \tag{13}$$

Величины C_{i3} имеют смысл напряжений с индексами $i3$, $3i$ в деформированной системе координат — “истинных напряжений”.

Подставив деформации (10) в систему закона Гука (11), получим

$$\begin{gathered}
\sigma_{13}=2\mu\varepsilon^*_{13}+\mu v'_1+\mu(\varepsilon^*_{11}v'_1+\varepsilon^*_{12}v'_2+\varepsilon^*_{13}v'_3),\\
\sigma_{23}=2\mu\varepsilon^*_{23}+\mu v'_2+\mu(\varepsilon^*_{12}v'_1+\varepsilon^*_{22}v'_2+\varepsilon^*_{23}v'_3),\\
\sigma_{33}=\lambda(\varepsilon^*_{11}+\varepsilon^*_{22})+(\lambda+2\mu)[\varepsilon^*_{33}+v'_3+\varepsilon^*_{13}v'_1+\varepsilon^*_{23}v'_2+\varepsilon^*_{33}v'_3+(v'^2_1+v'^2_2+v'^2_3)/2].
\end{gathered} \tag{14}$$

Введем обозначения

$$\begin{gathered}
A=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}, \qquad B=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}, \qquad q_1=\frac{C_{13}}{\mu}, \qquad q_2=\frac{C_{23}}{\mu},\\
p_1=\frac{C_{13}}{\lambda+2\mu}, \qquad p_2=\frac{C_{23}}{\lambda+2\mu}, \qquad p_3=\frac{C_{33}}{\lambda+2\mu}.
\end{gathered} \tag{15}$$

Отметим, что введенные в (15) величины являются функциями переменной x_3.

Подставив (14) в (13), с учетом обозначений (15) получим следующие соотношения:

$$\begin{gathered}2A\varepsilon^*_{13} + Av'_1 + \varepsilon^*_{11}v'_1 + 2A\varepsilon^*_{12}v'_2 + (A+1)\varepsilon^*_{13}v'_3 + \varepsilon^*_{13}\varepsilon^*_{33} + \varepsilon^*_{33}v'_1 + v'_1v'_3 + \\ + \varepsilon^*_{11}\varepsilon^*_{13} + B\varepsilon^*_{13}\varepsilon^*_{22} + B\varepsilon^*_{22}v'_1 + 2A\varepsilon^*_{12}\varepsilon^*_{23} = p_1, \\ 2A\varepsilon^*_{23} + Av'_2 + \varepsilon^*_{22}v'_2 + 2A\varepsilon^*_{12}v'_1 + (A+1)\varepsilon^*_{23}v'_3 + \varepsilon^*_{23}\varepsilon^*_{33} + \varepsilon^*_{33}v'_2 + v'_2v'_3 + \\ + \varepsilon^*_{22}\varepsilon^*_{23} + B\varepsilon^*_{23}\varepsilon^*_{11} + B\varepsilon^*_{11}v'_2 + 2A\varepsilon^*_{12}\varepsilon^*_{13} = p_2, \\ B\varepsilon^*_{11} + B\varepsilon^*_{22} + \varepsilon^*_{33} + v'_3 + (A+1)\varepsilon^*_{13}v'_1 + (A+1)\varepsilon^*_{23}v'_2 + 3\varepsilon^*_{33}v'_3 + (v'^2_1 + v'^2_2 + v'^2_3)/2 + \\ + 2A\varepsilon^{*2}_{23} + 2A\varepsilon^{*2}_{13} + B\varepsilon^*_{11}\varepsilon^*_{33} + B\varepsilon^*_{22}\varepsilon^*_{33} + B\varepsilon^*_{11}v'_3 + B\varepsilon^*_{22}v'_3 + \varepsilon^{*2}_{33} + v'^2_3 = p_3.\end{gathered} \tag{16}$$

Система (16) связывает производные локальных перемещений v'_i с деформациями "в целом" ε^*_{ij}. Решим (16) относительно величин v'_i (относительно которых (16) представляет систему трех нелинейных алгебраических уравнений). Выразим из первых двух уравнений v'_1, v'_2 как функции v'_3:

$$\begin{gathered}v'_1 = p_1/A - 2\varepsilon^*_{13} + \varepsilon^*_{13}(\varepsilon^*_{11} + \varepsilon^*_{33})/A - 2\varepsilon^*_{12}\varepsilon^*_{23} + B\varepsilon^*_{13}\varepsilon^*_{22}/A - \\ - 2\varepsilon^*_{12}v'_2 + (1/A - 1)\varepsilon^*_{13}v'_3 - p_1(\varepsilon^*_{11} + \varepsilon^*_{33} + B\varepsilon^*_{22} + v'_3)/A^2, \\ v'_2 = p_2/A - 2\varepsilon^*_{23} + \varepsilon^*_{23}(\varepsilon^*_{22} + \varepsilon^*_{33})/A - 2\varepsilon^*_{12}\varepsilon^*_{13} + B\varepsilon^*_{11}\varepsilon^*_{23}/A - \\ - 2\varepsilon^*_{12}v'_1 + (1/A - 1)\varepsilon^*_{23}v'_3 - p_2(B\varepsilon^*_{11} + \varepsilon^*_{33} + \varepsilon^*_{22} + v'_3)/A^2.\end{gathered} \tag{17}$$

Так как v'_1, v'_2 входят в третье уравнение (16) в комбинациях с ε^*_{ij}, то можно отбросить в (17) величины второго порядка малости, поскольку они в совокупности с ε^*_{ij} дают величины третьего порядка. В результате получим

$$v'_1 = p_1/A - 2\varepsilon^*_{13}, \qquad v'_2 = p_2/A - 2\varepsilon^*_{23}. \tag{18}$$

Подставив эти значения v'_1, v'_2 в третье уравнение (16), получаем следующее уравнение для v'_3:

$$\begin{gathered}3v'^2_3/2 + v'_3(1 + 3\varepsilon^*_{33} + B\varepsilon^*_{11} + B\varepsilon^*_{22}) + \varepsilon^*_{33} + B(\varepsilon^*_{11} + \varepsilon^*_{22}) + B\varepsilon^*_{11}\varepsilon^*_{33} + B\varepsilon^*_{22}\varepsilon^*_{33} + \varepsilon^{*2}_{33} - \\ - \varepsilon^*_{13}q_1 - \varepsilon^*_{23}q_2 + p_1\varepsilon^*_{13} + p_2\varepsilon^*_{23} + (q_1^2 + q_2^2)/2 - p_3 - \varepsilon^*_{13}q_1 - \varepsilon^*_{23}q_2 = 0.\end{gathered} \tag{19}$$

Уравнение (19) — это квадратное уравнение относительно v'_3. Его решение имеет вид

$$\begin{gathered}v'_3 = -(1/3 + \varepsilon^*_{33} + B\varepsilon^*_{11}/3 + B\varepsilon^*_{22}/3) + [1 + 3\varepsilon^{*2}_{33} - 4B(\varepsilon^*_{11} + \varepsilon^*_{22}) + B^2(\varepsilon^{*2}_{11} + 2\varepsilon^*_{11}\varepsilon^*_{22} + \varepsilon^{*2}_{22}) - \\ - 6p_1\varepsilon^*_{13} - 6p_2\varepsilon^*_{23} - 3(q_1^2 + q_2^2) + 6p_3 + 6\varepsilon^*_{13}q_1 + 6\varepsilon^*_{23}q_2]^{1/2}/3.\end{gathered} \tag{20}$$

Второй корень отброшен, так как он не соответствует малым деформациям.

Выражение (20) неудобно для последующих вычислений (из-за присутствия знака радикала в нем). Пренебрегая малыми второго порядка, разложим радикал в ряд Тейлора в окрестности точки $\varepsilon^*_{ij} = 0$, $p_i = 0$, $q_i = 0$. В результате получим, что радикал в (20) с точностью до малых второго порядка равен

$$\begin{gathered}1 + 3p_3 - 2\,\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\,(\varepsilon^*_{11} + \varepsilon^*_{22}) - \frac{3}{2}\,q_1^2 - \frac{3}{2}\,q_2^2 - \frac{9}{2}\,p_3^2 + \frac{3}{2}\,\varepsilon^{*2}_{33} - \frac{3}{2}\,\frac{\lambda^2}{(\lambda + 2\mu)^2}\,(\varepsilon^{*2}_{11} + \varepsilon^{*2}_{22}) - \\ - 3\varepsilon^*_{13}p_1 - 3\varepsilon^*_{23}p_2 + 6\,\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\,(\varepsilon^*_{11}p_3 + \varepsilon^*_{22}p_3) - 3\,\frac{\lambda^2}{(\lambda + 2\mu)^2}\,\varepsilon^*_{11}\varepsilon^*_{22} + 3\varepsilon^*_{13}q_1 + 3\varepsilon^*_{23}q_2.\end{gathered}$$

После этого (20) принимает вид

$$v_3' = -\Big(\frac{1}{3} + \varepsilon_{33}^* + \frac{B}{3}\,\varepsilon_{11}^* + \frac{B}{3}\,\varepsilon_{22}^*\Big) + \frac{1}{3}\Big[1 + 3p_3 - 2\,\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\,(\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*) - \\ - \frac{3}{2}\,q_1^2 - \frac{3}{2}\,q_2^2 - \frac{9}{2}\,p_3^2 + \frac{3}{2}\varepsilon_{33}^{*2} - \frac{3}{2}\,\frac{\lambda^2}{(\lambda+2\mu)^2}\,(\varepsilon_{11}^{*2} + \varepsilon_{22}^{*2}) - 3\varepsilon_{13}^* p_1 - 3\varepsilon_{23}^* p_2 + \\ + 6\,\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\,(\varepsilon_{11}^* p_3 + \varepsilon_{22}^* p_3) - 3\,\frac{\lambda^2}{(\lambda+2\mu)^2}\,\varepsilon_{11}^*\varepsilon_{22}^* + 3\varepsilon_{13}^* q_1 + 3\varepsilon_{23}^* q_2\Big]. \quad (21)$$

Формулы (18), (21) дают выражение для производных локальных перемещений v_i' через деформации “в целом” ε_{ij}^* в явном виде. В силу краевых условий (3) $v_3(0) = v_3(1) = 0$. Поэтому $\int\limits_0^1 v_3'(x_3)\,dx_3 = 0$. Введем среднее по толщине пакета формулой $\langle f\rangle = \int\limits_0^1 f(x_3)\,dx_3$. Тогда можно записать $\langle v_3'\rangle = 0$.

Подставим в последнее равенство v_3' согласно (21) и заменим p_i, q_i их выражениями через C_{13}, C_{23}, C_{33} согласно (15). Осреднив результат, получим

$$C_{33}\Big\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\Big\rangle = \varepsilon_{33}^* + \Big\langle\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\Big\rangle(\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*) + \frac{1}{2}\,C_{13}^2\Big\langle\frac{1}{\mu^2}\Big\rangle + \frac{1}{2}\,C_{23}^2\Big\langle\frac{1}{\mu^2}\Big\rangle + \\ + \frac{3}{2}\,C_{33}^2\Big\langle\frac{1}{(\lambda+2\mu)^2}\Big\rangle - \frac{1}{2}\,\varepsilon_{33}^{*2} + \frac{1}{2}\Big\langle\frac{\lambda^2}{(\lambda+2\mu)^2}\Big\rangle(\varepsilon_{11}^{*2} + \varepsilon_{22}^{*2}) - C_{13}\varepsilon_{13}^*\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle - C_{23}\varepsilon_{23}^*\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle + \\ + C_{13}\varepsilon_{13}^*\Big\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\Big\rangle + C_{23}\varepsilon_{23}^*\Big\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\Big\rangle - 2C_{33}\Big\langle\frac{\lambda}{(\lambda+2\mu)^2}\Big\rangle(\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*) + \Big\langle\frac{\lambda^2}{(\lambda+2\mu)^2}\Big\rangle\varepsilon_{11}^*\varepsilon_{22}^*. \quad (22)$$

Из равенства $\langle v_1'\rangle = 0$ аналогичным образом получаем

$$C_{13}\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle = 2\varepsilon_{13}^* + 2\varepsilon_{11}^* C_{13}\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle - 2\varepsilon_{11}^*\varepsilon_{13}^* - \Big\langle\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\Big\rangle\varepsilon_{13}^*(\varepsilon_{22}^* + \varepsilon_{11}^*) + 2\varepsilon_{12}^* C_{23}\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle + \\ + \varepsilon_{13}^* C_{33}\Big\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\Big\rangle - 2\varepsilon_{12}^*\varepsilon_{23}^* - \varepsilon_{13}^*\varepsilon_{33}^* - \varepsilon_{13}^* C_{33}\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle + C_{13}C_{33}\Big\langle\frac{1}{\mu^2}\Big\rangle. \quad (23)$$

Из равенства $\langle v_2'\rangle = 0$ получаем

$$C_{23}\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle = 2\varepsilon_{23}^* + 2\varepsilon_{12}^* C_{13}\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle - 2\varepsilon_{12}^*\varepsilon_{13}^* - \Big\langle\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\Big\rangle\varepsilon_{23}^*(\varepsilon_{22}^* + \varepsilon_{11}^*) + \\ + \varepsilon_{23}^* C_{33}\Big\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\Big\rangle + 2\varepsilon_{22}^* C_{23}\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle - 2\varepsilon_{22}^*\varepsilon_{23}^* - \varepsilon_{23}^*\varepsilon_{33}^* - \varepsilon_{23}^* C_{33}\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle + C_{23}C_{33}\Big\langle\frac{1}{\mu^2}\Big\rangle.$$

Представим локальные напряжения C_{ni} в деформированной системе координат в виде [5] $C_{ni}^{loc} = \sigma_{nk}(\delta_{ik} + U_{i,k})$. В частности, имеют место равенства

$$C_{11}^{loc} = \sigma_{11} + \sigma_{11}U_{1,1} + \sigma_{12}U_{1,2} + \sigma_{13}U_{1,3}, \\ C_{12}^{loc} = \sigma_{12} + \sigma_{11}U_{2,1} + \sigma_{12}U_{2,2} + \sigma_{13}U_{2,3}, \quad C_{22}^{loc} = \sigma_{22} + \sigma_{21}U_{2,1} + \sigma_{22}U_{2,2} + \sigma_{23}U_{2,3}. \quad (24)$$

Проведем усреднение локальных значений C_{ij}^{loc} (24). С учетом (2) получим

$$C_{11} = \langle C_{11}^{loc}\rangle = \bar\sigma_{11}(1 + \varepsilon_{11}^*) + \bar\sigma_{12}\varepsilon_{12}^* + \bar\sigma_{13}\varepsilon_{13}^*, \\ C_{12} = \langle C_{12}^{loc}\rangle = \bar\sigma_{12}(1+\varepsilon_{22}^*) + \bar\sigma_{11}\varepsilon_{12}^* + \bar\sigma_{13}\varepsilon_{23}^*, \quad C_{22} = \langle C_{22}^{loc}\rangle = \bar\sigma_{22}(1+\varepsilon_{22}^*) + \bar\sigma_{21}\varepsilon_{12}^* + \bar\sigma_{23}\varepsilon_{23}^*. \quad (25)$$

Подставим σ_{ij} согласно (11) и U_i согласно (2) в (24). Тогда для локальных напряжений C_{ij}^{loc}, $i, j = 1, 2$ получим следующие выражения:

$$C_{11}^{loc} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11}^* + \lambda\varepsilon_{22}^* + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11}^{*2} + \lambda\varepsilon_{11}^*\varepsilon_{22}^* + \lambda\Big[\frac{C_{33}}{\lambda + 2\mu} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*) -$$
$$- \frac{C_{33}^2}{(\lambda + 2\mu)^2} + C_{33}\frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)^2}(\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*) - C_{13}\frac{\varepsilon_{13}^*}{\lambda + 2\mu} - C_{23}\frac{\varepsilon_{23}^*}{\lambda + 2\mu}\Big] +$$
$$+ C_{33}\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\varepsilon_{11}^* - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*)\varepsilon_{11}^* + 2\mu\varepsilon_{12}^{*2} + \frac{C_{13}^2}{\mu} - C_{13}\varepsilon_{13}^*,$$
$$C_{22}^{loc} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22}^* + \lambda\varepsilon_{11}^* + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22}^{*2} + \lambda\varepsilon_{11}^*\varepsilon_{22}^* + \lambda\Big[\frac{C_{33}}{\lambda + 2\mu} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*) - \qquad (26)$$
$$- \frac{C_{33}^2}{(\lambda + 2\mu)^2} + C_{33}\frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)^2}(\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*) - C_{13}\frac{\varepsilon_{13}^*}{\lambda + 2\mu} - C_{23}\frac{\varepsilon_{23}^*}{\lambda + 2\mu}\Big] +$$
$$+ C_{33}\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\varepsilon_{22}^* - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*)\varepsilon_{22}^* + 2\mu\varepsilon_{12}^{*2} + \frac{C_{23}^2}{\mu} - C_{23}\varepsilon_{23}^*,$$
$$C_{12}^{loc} = 2\mu\varepsilon_{12}^* + (\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*)\varepsilon_{12}^* + \varepsilon_{12}^*\lambda\Big[\frac{C_{33}}{\lambda + 2\mu} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*)\Big] + \frac{C_{13}C_{23}}{\mu} - C_{13}\varepsilon_{23}^*.$$

Проведем в (26) осреднение и учтем, что $\langle C_{ij}^{loc}\rangle = C_{ij}$ согласно (25). В результате получим следующие уравнения для $\bar\sigma_{11}$, $\bar\sigma_{22}$, $\bar\sigma_{12}$:

$$\bar\sigma_{11}(1 + \varepsilon_{11}^*) + \bar\sigma_{12}\varepsilon_{12}^* + \bar\sigma_{13}\varepsilon_{13}^* = \langle\lambda + 2\mu\rangle\varepsilon_{11}^* + \langle\lambda\rangle\varepsilon_{22}^* + \langle\lambda + 2\mu\rangle\varepsilon_{11}^{*2} + \langle\lambda\rangle\varepsilon_{11}^*\varepsilon_{22}^* +$$
$$+ \Big\langle\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle\bar\sigma_{33}(1 + \varepsilon_{33}^*) - \Big\langle\frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle(\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*) - \bar\sigma_{33}^2\Big\langle\frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)^2}\Big\rangle + \Big\langle\frac{\lambda^2}{(\lambda + 2\mu)^2}\Big\rangle\bar\sigma_{33}(\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*) +$$
$$+ \Big\langle\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle\bar\sigma_{33}\varepsilon_{11}^* - (\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*)\varepsilon_{11}^*\Big\langle\frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle + 2\langle\mu\rangle\varepsilon_{12}^{*2} + \bar\sigma_{13}^2\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle - \bar\sigma_{13}\varepsilon_{13}^*,$$
$$\bar\sigma_{22}(1 + \varepsilon_{22}^*) + \bar\sigma_{12}\varepsilon_{12}^* + \bar\sigma_{23}\varepsilon_{23}^* = \langle\lambda + 2\mu\rangle\varepsilon_{22}^* + \langle\lambda\rangle\varepsilon_{11}^* + \langle\lambda + 2\mu\rangle\varepsilon_{22}^{*2} + \langle\lambda\rangle\varepsilon_{11}^*\varepsilon_{22}^* + \qquad (27)$$
$$+ \Big\langle\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle\bar\sigma_{33}(1 + \varepsilon_{33}^*) - \Big\langle\frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle(\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*) - \bar\sigma_{33}^2\Big\langle\frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)^2}\Big\rangle + \Big\langle\frac{\lambda^2}{(\lambda + 2\mu)^2}\Big\rangle\bar\sigma_{33}(\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*) +$$
$$+ \Big\langle\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle\bar\sigma_{33}\varepsilon_{22}^* - (\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*)\varepsilon_{22}^*\Big\langle\frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle + 2\langle\mu\rangle\varepsilon_{12}^{*2} + \sigma_{23}^2\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle - \bar\sigma_{23}\varepsilon_{23}^*,$$
$$\bar\sigma_{12}(1 + \varepsilon_{22}^*) + \bar\sigma_{11}\varepsilon_{12}^* + \bar\sigma_{13}\varepsilon_{23}^* = 2\langle\mu\rangle\varepsilon_{12}^* + \langle\lambda + 2\mu\rangle(\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*)\varepsilon_{12}^* +$$
$$+ \Big\langle\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle\varepsilon_{12}^*\bar\sigma_{33} - (\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*)\varepsilon_{12}^*\Big\langle\frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle + \bar\sigma_{13}\bar\sigma_{23}\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle - \bar\sigma_{13}\varepsilon_{23}^*.$$

Подставив значения C_{13}, C_{23}, C_{33} из (12) в (22) и (23), получим следующие связи между напряжениями $\bar\sigma_{ij}$ в недеформированной системе координат и деформациями ε_{ij}^* "в целом":

$$0 = -\bar\sigma_{33}\Big\langle\frac{1}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle + \varepsilon_{33}^* + \Big\langle\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle(\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*) +$$
$$+ \frac{1}{2}\bar\sigma_{13}\Big(\bar\sigma_{13}\Big\langle\frac{1}{\mu^2}\Big\rangle - 2\varepsilon_{13}^*\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle\Big) + \frac{1}{2}\bar\sigma_{23}\Big(\bar\sigma_{23}\Big\langle\frac{1}{\mu^2}\Big\rangle - 2\varepsilon_{23}^*\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle\Big) +$$

$$+\frac{1}{2}\Big[\bar\sigma_{33}^2\Big\langle\frac{1}{(\lambda+2\mu)^2}\Big\rangle-2\bar\sigma_{33}(\varepsilon_{11}^*+\varepsilon_{22}^*)\Big\langle\frac{\lambda}{(\lambda+2\mu)^2}\Big\rangle+\Big\langle\frac{\lambda^2}{(\lambda+2\mu)^2}\Big\rangle(\varepsilon_{11}^*+\varepsilon_{22}^*)^2-\varepsilon_{33}^{*2}\Big]+$$

$$+\bar\sigma_{33}\Big[\bar\sigma_{33}\Big\langle\frac{1}{(\lambda+2\mu)^2}\Big\rangle-\varepsilon_{11}^*\Big\langle\frac{\lambda}{(\lambda+2\mu)^2}\Big\rangle-\varepsilon_{22}^*\Big\langle\frac{\lambda}{(\lambda+2\mu)^2}\Big\rangle-\varepsilon_{33}^*\Big\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\Big\rangle\Big],$$

$$0=\bar\sigma_{13}\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle-2\varepsilon_{13}^*+\varepsilon_{11}^*\Big(2\varepsilon_{13}^*-\bar\sigma_{13}\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle\Big)-\bar\sigma_{33}\Big(\bar\sigma_{13}\Big\langle\frac{1}{\mu^2}\Big\rangle-2\varepsilon_{13}^*\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle\Big)- \qquad (28)$$

$$-\varepsilon_{13}^*\Big[\bar\sigma_{33}\Big\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\Big\rangle-\varepsilon_{33}^*-\varepsilon_{11}^*\Big\langle\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\Big\rangle-\varepsilon_{22}^*\Big\langle\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\Big\rangle\Big]-\varepsilon_{12}^*\Big(\bar\sigma_{23}\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle-2\varepsilon_{23}^*\Big),$$

$$0=\bar\sigma_{23}\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle-2\varepsilon_{23}^*+\varepsilon_{22}^*\Big(2\varepsilon_{23}^*-\bar\sigma_{23}\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle\Big)-\bar\sigma_{33}\Big(\bar\sigma_{23}\Big\langle\frac{1}{\mu^2}\Big\rangle-2\varepsilon_{23}^*\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle\Big)-$$

$$-\varepsilon_{23}^*\Big[\bar\sigma_{33}\Big\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\Big\rangle-\varepsilon_{33}^*-\varepsilon_{11}^*\Big\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\Big\rangle-\varepsilon_{22}^*\Big\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\Big\rangle\Big]-\varepsilon_{12}^*\Big(\bar\sigma_{13}\Big\langle\frac{1}{\mu}\Big\rangle-2\varepsilon_{13}^*\Big).$$

Уравнения (27), (28) — это определяющие уравнения для слоистого образца “в целом”, записанные в недеформированной системе координат в неявной форме. Они связывают напряжения $\bar\sigma_{ij}$ в недеформированной системе координат и деформации ε_{ij}^* “в целом”.

Однородный материал. При $\lambda = \mathrm{const}$ и $\mu = \mathrm{const}$ в каждом слое материал является однородным и связь между напряжением и деформацией должна быть линейной. Усредненный закон (27), (28) в этом случае действительно становится линейным.

Линейный случай. При малых деформациях, отбрасывая в (27), (28) члены второго порядка, получаем линейный усредненный закон Гука. Он совпадает с приведенным в [4] усредненным законом Гука для линейно-упругого слоистого композита.

Исследование усредненных определяющих уравнений. Уравнения (27), (28) связывают усредненные напряжения $\bar\sigma_{ij}$ и деформации ε_{ij}^* “в целом”. При этом деформации ε_{ij}^* рассчитываются по нелинейной теории (соотношения (27), (28) — закон Гука для слоистого пакета “в целом”). Локальный (для каждого материала) закон Гука (11) физически линейный. Закон (27), (28) в общем случае нелинейный, поскольку можно подобрать λ и μ так, что (27), (28) не будут полными квадратами.

В качестве примера рассмотрим случай одноосной деформации: $\varepsilon_{33}^* \neq 0$, остальные $\varepsilon_{ij}^* = 0$. В этом случае все сдвиговые напряжения $\bar\sigma_{ij}$, кроме $\bar\sigma_{33}$, равны нулю и от соотношений (27), (28) останется одно уравнение

$$-\bar\sigma_{33}\Big\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\Big\rangle+\varepsilon_{33}^*-\frac{1}{2}\Big(\varepsilon_{33}^{*2}-\bar\sigma_{33}^2\Big\langle\frac{1}{(\lambda+2\mu)^2}\Big\rangle\Big)+$$

$$+\bar\sigma_{33}\Big(\bar\sigma_{33}\Big\langle\frac{1}{(\lambda+2\mu)^2}\Big\rangle-\varepsilon_{33}^*\Big\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\Big\rangle\Big)=0.$$

Это квадратное уравнение относительно $\bar\sigma_{33}$. Решив его, получим напряжение $\bar\sigma_{33}$ как функцию деформации ε_{33}^*. Графики зависимости $\bar\sigma_{33}$ от ε_{33}^* приведены на рис. 2, 3 для разных композитов из двух составляющих (линия *1*). На рис. 2 данные приведены для следующих характеристик слоев: $E_1 = 10$, $E_2 = 110$ (10^9 Па), $\nu_1 = 0{,}25$, $\nu_2 = 0{,}3$, относительные толщины слоев $h_1 = 0{,}3$, $h_2 = 0{,}7$. На рис. 3 данные приведены для $E_1 = 10$, $E_2 = 110$ (10^9 Па), $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}15$, относительные толщины слоев $h_1 = 0{,}1$, $h_2 = 0{,}9$. Прямой линией *2* изображен график зависимости $\bar\sigma_{33}$ от ε_{33}^* для линейно-упругого композита с теми же характеристиками слоев (зависимость рассчитана по формулам из [4]).

Проведенные расчеты показывают, что при $\varepsilon^* < 0{,}05$ имеет место практически совпадение зависимости $\bar\sigma_{33}(\varepsilon_{33}^*)$ с линейным законом Гука, при $\varepsilon^* > 0{,}05$ начинается отклонение от линейного закона, которое может достигать 10 % в интервале $0{,}05 \div 0{,}1$.

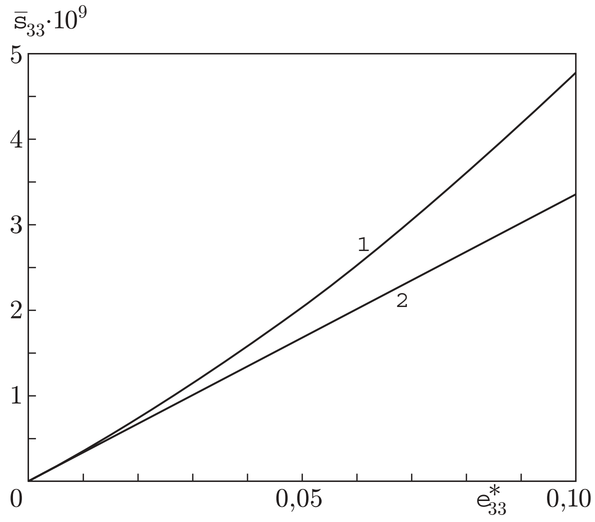

Рис. 2

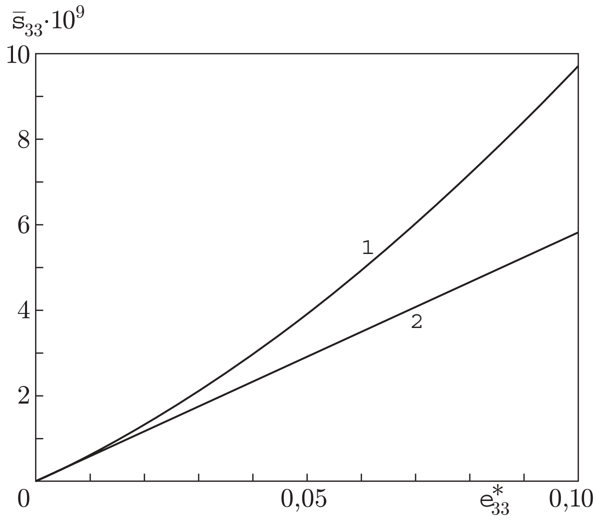

Рис. 3

Отклонение от нелинейного закона увеличивается при увеличении отношения модулей Юнга слоев, при уменьшении толщины мягкого слоя. Это связано с большими деформациями мягкого слоя.

Обнаруженный эффект влияния на усредненные характеристики композита как материальных характеристик слоев, так и деформаций наиболее очевиден в рассмотренном выше случае линейно-упругих слоев. Эффект сохранится и для нелинейно-упругих слоев. Действительно, нелинейные соотношения напряжения — деформации могут быть аппроксимированы линейными соотношениями в окрестности заданных деформаций, и в этом случае эффект имеет место. Если в качестве заданных деформаций берутся ненулевые деформации, то следует усреднять задачу теории с начальными напряжениями [6].

Исследование локальных напряжений. Формулы (26) дают выражение локальных напряжений через деформации "в целом". Рассмотрим случай двухосной деформации в плоскости слоев. Пусть напряжения, приложенные к композиту, имеют вид $C_{11} \neq 0$, $C_{22} \neq 0$, остальные $C_{ij} = 0$. Усреднив (26), в случае двухосной деформации определим зависимость средних напряжений C_{11}, C_{22} от деформаций ε_{11}^*, ε_{22}^* из следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \langle\lambda + 2\mu\rangle\varepsilon_{11}^* + \langle\lambda\rangle\varepsilon_{22}^* + \langle\lambda + 2\mu\rangle\varepsilon_{11}^{*2} - \\ &\quad - \Big\langle\frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle(\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*) + \langle\lambda\rangle\varepsilon_{11}^*\varepsilon_{22}^* - \Big\langle\frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle(\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*)\varepsilon_{11}^*, \\ C_{22} &= \langle\lambda + 2\mu\rangle\varepsilon_{22}^* + \langle\lambda\rangle\varepsilon_{11}^* + \langle\lambda + 2\mu\rangle\varepsilon_{22}^{*2} - \\ &\quad - \Big\langle\frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle(\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*) + \langle\lambda\rangle\varepsilon_{11}^*\varepsilon_{22}^* - \Big\langle\frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle(\varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*)\varepsilon_{22}^*. \end{aligned} \tag{29}$$

Для подсчета локальных напряжений C_{ij}^{loc} по формулам (26) надо знать ε_{11}^*, ε_{22}^*, для нахождения которых решим (29) относительно этих величин. Решение отыскиваем с помощью разложения в ряд по величине δ, которая имеет порядок деформации. При этом сохраняем члены ряда не выше второго порядка по δ. Решение имеет следующий вид:

$$\delta = \frac{C_{11}}{\langle\lambda + 2\mu - \lambda^2/(\lambda + 2\mu)\rangle},$$

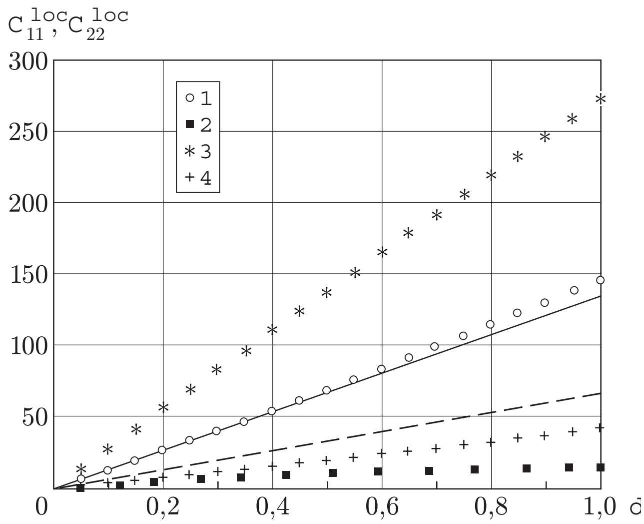

Рис. 4

$$\varepsilon_{11}^* = \delta\,\frac{1-\gamma t}{1-t^2} + \delta^2\,\frac{\gamma^2 t - \gamma t^2 + \gamma t - 1}{(1-t^2)^2}, \qquad \varepsilon_{22}^* = \delta\,\frac{\gamma - t}{1-t^2} + \delta^2\,\frac{-\gamma^2 - \gamma t^2 + t + \gamma t}{(1-t^2)^2}, \tag{30}$$

где $\gamma = C_{22}/C_{11}$; $t = \langle \lambda - \lambda^2/(\lambda+2\mu)\rangle / \langle \lambda + 2\mu - \lambda^2/(\lambda+2\mu)\rangle$.

Для композита, образованного из слоев двух материалов, определим локальные напряжения в каждом из слоев как функции средних напряжений C_{11}, C_{22}. Подставив (30) в (26), получим следующие выражения для C_{11}^{loc}, C_{22}^{loc}:

$$\begin{gathered} C_{11}^{loc\,i} = \frac{\delta^2\gamma(1-\gamma)(1+t)}{(1-t^2)^2}\Big\{-\Big[\lambda_i + 2\mu_i - \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i+2\mu_i}\Big]t + \lambda_i - \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i+2\mu_i}\Big\} + \\ + \frac{\delta}{1-t^2}\Big\{\Big[\lambda_i + 2\mu_i - \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i+2\mu_i}\Big](1-\gamma t) + \Big[\lambda_i - \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i+2\mu_i}\Big](\gamma - t)\Big\}, \\ C_{22}^{loc\,i} = \frac{\delta^2(1-\gamma)(1+t)}{(1-t^2)^2}\Big\{\Big[\lambda_i + 2\mu_i - \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i+2\mu_i}\Big]t - \lambda_i - \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i+2\mu_i}\Big\} + \\ + \frac{\delta}{1-t^2}\Big\{\Big[\lambda_i + 2\mu_i - \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i+2\mu_i}\Big](\gamma - t) + \Big[\lambda_i - \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i+2\mu_i}\Big](1-\gamma t)\Big\}, \end{gathered} \tag{31}$$

$i = 1, 2$ — номера слоев.

Для $C_{22} \ne 0$ и $C_{22} \ne C_{11}$ локальные напряжения являются квадратичной функцией среднего напряжения C_{11}.

Графики зависимости C_{11}^{loc}, C_{22}^{loc} от δ в каждом из слоев приведены на рис. 4 для $E_1 = 140$, $E_2 = 14$, $\nu_1 = 0{,}1$, $\nu_2 = 0{,}4$, $h = 0{,}4$ (на рисунке точки *1* соответствуют C_{11}^{loc} в 1-м материале, *2* — C_{11}^{loc} во 2-м материале, *3* — C_{22}^{loc} в 1-м материале, *4* — C_{22}^{loc} во 2-м материале; сплошная и штриховая прямые — графики $C_{11} = \langle C_{11}^{loc}\rangle$ и $C_{22} = \langle C_{22}^{loc}\rangle$ соответственно).

Отметим, что при $\gamma = 0$ C_{11}^{loc} не квадратично, а C_{22}^{loc} квадратично.

В линейно-упругом композите напряжения в слоях пропорциональны жесткости слоев и средним напряжениям [1, 4], т. е. для линейно-упругого композита в формулах (31) присутствуют только линейные по δ члены. Появление квадратичного члена в нелинейном случае означает, что распределение напряжений между слоями композита принимает качественно иной характер, если деформации становятся большими.

Авторы выражают благодарность В. М. Корневу, который рекомендовал проанализировать локальные напряжения в слоях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
2. **Lions J.-L.** Remarks on non local phenomena in composite materials and in perforated materials // Proc. of the IUTAM Symp. Northwestern University. Amsterdam: Noth-Holland, 1979.
3. **Санчес-Паленсия Э.** Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
4. **Аннин Б. Д., Каламкаров А. Л., Колпаков А. Г., Партон В. З.** Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1993.
5. **Амензаде Ю. А.** Теория упругости. М.: Высш. шк., 1971.
6. **Kolpakov A. G.** Stressed composite structures. Berlin etc.: Springer-Verlag, 2004.

Поступила в редакцию 8/IX 2003 г.