

УДК 536.3+536.42

ВЛИЯНИЕ РАССЕЯНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ПЛАВЛЕНИЕ И ЗАТВЕРДЕВАНИЕ ПЛОСКОГО СЛОЯ ПОЛУПРОЗРАЧНОЙ СРЕДЫ

Н. А. Рубцов, Н. А. Саввинова

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск

Исследуется влияние изотропного и анизотропного рассеяния излучения на плавление (затвердевание) плоского слоя полупрозрачной среды, находящегося между непрозрачными поверхностями. Математическая модель фазового перехода представляет собой классическую постановку задачи Стефана. Из результатов численного расчета следует, что рассеяние излучения оказывает существенное влияние на скорость распространения фронта фазового перехода и формирование температурного профиля в процессе плавления (затвердевания) полупрозрачной среды.

Исследование сложного радиационно-кондуктивного теплообмена (РКТ) при плавлении и затвердевании полупрозрачных материалов охватывает широкий диапазон температур — от низких (например, плавление льда солнечным излучением) до высоких (например, рост кристаллов из расплава, производство полупрозрачных материалов). Так как полупрозрачные среды обладают высокой прозрачностью для теплового излучения в определенных областях спектра, экспериментальное исследование температурных полей в объеме полупрозрачного материала представляется затруднительным. Поэтому изучение влияния теплового излучения на формирование температурных полей и тепловых потоков при плавлении и кристаллизации полупрозрачного материала имеет важное практическое значение. В этой связи актуальным является численное исследование радиационно-кондуктивного теплообмена при фазовом превращении полупрозрачной среды. В настоящее время по данной проблеме имеется небольшое количество работ (см., например, [1]). В [2] рассмотрено влияние изотропного рассеяния излучения на процесс плавления полупрозрачной среды, в работе [3] изучено влияние анизотропного рассеяния в двухфазной области на скорость плавления (затвердевания) полубесконечной полупрозрачной среды с использованием обобщенной модели фазового превращения.

В данной работе численно исследуется формирование температурного поля и радиационных потоков в процессе плавления и затвердевания плоского слоя полупрозрачной среды толщиной L , находящегося между непрозрачными диффузно излучающими и отражающими поверхностями (рис. 1). При выполнении условия локального термодинамического равновесия и отсутствии конвекции задача Стефана в классической постановке при постоянных теплофизических свойствах записывается в безразмерном виде

$$\begin{aligned} c_1 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= \Lambda_1 N \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi}, & 0 < \xi < s(\eta), \\ c_1 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= \Lambda_2 N \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi}, & s(\eta) < \xi < 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\theta = T/T_r$; $c_i = C_i \rho_i / (C_r \rho_r)$; $\Lambda_i = \lambda_i / \lambda_r$; $\xi = x/L$; $s = S/L$; $\Phi_i = E_i / (\sigma T_r^4)$; $\eta = 4\sigma T_r^3 t / (\rho_r C_r L)$; $N = \lambda_r / (4\sigma T_r^3 L)$ — радиационно-кондуктивный параметр; C , ρ , λ — теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности вещества; E_i — плотность потока результирующего излучения; t — время; σ — постоянная Стефана — Больцмана;

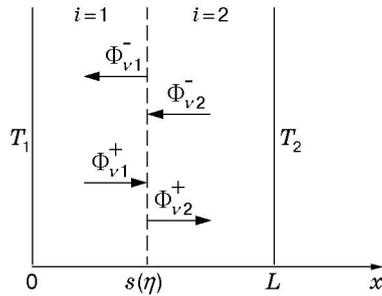


Рис. 1. Двухслойная система с подвижной границей раздела фаз

r — индекс определяющего параметра; индекс $i = 1, 2$ соответствует фазам, находящимся слева и справа от границы раздела $s(\eta)$.

Классическое условие Стефана на границе раздела фаз принимает вид

$$\pm Y \frac{ds}{d\eta} = \Lambda_1 N \left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{s^-} - \Lambda_2 N \left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{s^+} - \frac{1}{4} (\Phi_1|_{s^-} - \Phi_2|_{s^+}), \tag{2}$$

где $Y = \gamma \rho_\Phi / (\rho_r C_r T_r)$; γ — теплота фазового перехода; ρ_Φ — плотность при температуре фазового перехода.

Температура на границе раздела фаз постоянна и равна температуре фазового перехода: $\theta(s(\eta)) = \theta^* = T_\Phi / T_r$.

Начальные условия записываются следующим образом: $\theta(\xi, 0) = f(\xi)$, $s(0) = 0$.

Решение задачи заключается в определении температуры $\theta(\xi, \eta)$, результирующих радиационных потоков $\Phi(\xi, \eta)$, положения фронта $s(\eta)$ в области $G = \{0 \leq \xi \leq 1; 0 \leq \eta \leq \eta_1\}$.

Уравнения энергии (1), (2) решаются конечно-разностным методом. Неявная разностная схема строится с помощью интегроинтерполяционного метода. Полученная нелинейная система разностных уравнений решается методами прогонки и итераций. При этом радиационные потоки в уравнении энергии представляют собой внутренние источники и определяются из решения уравнения переноса излучения с известным распределением температуры.

В задаче РКТ в полупрозрачной среде с фазовым переходом первого рода наиболее сложным является решение интегродифференциального уравнения переноса излучения в системе, состоящей из двух и более слоев, когда граница раздела фаз подвижна. В работах [4–6] плотность результирующих радиационных потоков определялась через интенсивности излучения вперед и назад, которые выражались через формальные решения уравнений переноса излучения. Интегралы, составляющие формальное решение, находились численно. Такое решение громоздко, так как при изменении граничных условий, учете рассеяния и селективности излучения необходимо каждый раз получать формальные решения.

Существует большое количество приближенных методов решения уравнения переноса излучения. Применительно к радиационному и сложному теплообмену широкие возможности для учета анизотропии рассеяния, отражения излучения от границ и селективности излучения предоставляет модифицированный метод средних потоков. В рамках этого метода интегродифференциальное уравнение переноса сводится к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений. К достоинствам метода относится также то, что он легко обобщается на случай селективной среды и применим для многослойных систем. В [7] предложен метод решения стационарной задачи РКТ в многослойной полупрозрачной системе. Для определения радиационных потоков разработан алгоритм на основе метода средних потоков, который дает хорошую точность и сходимость. В данной работе указанный ал-

горитм использован при решении нестационарной задачи плавления и затвердевания полупрозрачного материала для определения радиационных потоков.

Дифференциальный аналог уравнения переноса излучения для полусферических потоков в каждом слое системы записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau_{ji}}(\Phi_{ji}^+ - \Phi_{ji}^-) + (1 - \omega_{ji})(m_{ji}^+ \Phi_{ji}^+ - m_{ji}^- \Phi_{ji}^-) &= (1 - \omega_{ji})n_{ji}^2 \Phi_{0ji}, \\ \frac{d}{d\tau_{ji}}(m_{ji}^+ \delta_{ji}^+ \Phi_{ji}^+ - m_{ji}^- \delta_{ji}^- \Phi_{ji}^-) + (1 - \omega_{ji} \bar{\zeta}_{ji})(\Phi_{ji}^+ - \Phi_{ji}^-) &= 0, \\ i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, J. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь индекс j обозначает номер спектральной полосы в спектре с постоянными значениями оптических параметров; индекс i относится к соответствующему слою.

Граничные условия на непрозрачных диффузно излучающих и отражающих поверхностях имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{j1} = 0: \quad \Phi_{j1}^+ &= \varepsilon_{j1} n_{j1}^2 \Phi_{0j1}/4 + r_{j1} \Phi, \\ \tau_{j2} = \tau_{0j2}: \quad \Phi_{j2}^- &= \varepsilon_{j2} n_{j2}^2 \Phi_{0j2}/4 + r_{j2} \Phi_{j2}^+. \end{aligned} \quad (4)$$

На границе раздела сред уравнения, связывающие полусферические потоки излучения, могут быть получены из балансных соотношений, учитывающих отражение от границы и полное внутреннее отражение из-за различия показателей преломления. Полагаем $n_1 = n_2$. Тогда на внутренней границе выполняется условие

$$\tau_{j1} = \tau_{0j1}: \quad \Phi_{j1}^- = \Phi_{j2}^-, \quad \Phi_{j2}^+ = \Phi_{j1}^+. \quad (5)$$

В уравнениях (3)–(5) $\Phi_{ji}^\pm(\tau_{ji}) = \pm \frac{1}{4\sigma T_r^4} \int_{\Delta\nu_j}^{1(0)} 2\pi \int_{0(-1)} I_\nu(\tau_{\nu i}, \mu) \mu d\mu d\nu$ — безразмерные плот-

ности полусферических потоков в полосе $\Delta\nu_j$; $\Phi_{0ji} = (T_i^4/T_r^4)\varphi_b(\Delta\nu_j)$ — безразмерная плотность потока равновесного излучения в полосе $\Delta\nu_j$; $\varphi_b(\Delta\nu_j)$ — функция Дебая [7]; $m_{ji}^\pm, \delta_{ji}^\pm$ — коэффициенты переноса, которые являются функционалами решения и находятся в процессе итераций; n_{ji} — спектральный показатель преломления; I_ν — спектральная интенсивность излучения; μ — косинус угла между направлением распространения излучения и осью x ; $\tau_{\nu i} = k_{\nu i} x$ — спектральная оптическая толщина; $k_{\nu i} = \alpha_{\nu i} + \beta_{\nu i}$ — спектральный коэффициент ослабления; $\alpha_{\nu i}, \beta_{\nu i}$ — спектральные коэффициенты поглощения и рассеяния; ε_{ji}, r_{ji} — степени черноты и коэффициенты отражения от непрозрачных

поверхностей; ω_{ji} — альbedo однократного рассеяния; $\bar{\zeta}_{\nu i} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p_{\nu i}(\mu) \mu d\mu$ — средний спектральный косинус угла рассеяния; $p_{\nu i}$ — спектральная индикатриса рассеяния, представляющая собой разложение по полиномам Лежандра:

$$p(\mu_0) = 1 + \sum_{l=1}^L a_l P_l(\mu_0), \quad (6)$$

где μ_0 — косинус угла между падающим и рассеянным лучами.

В основе метода средних потоков лежит использование усеченной трехчленной индикатрисы рассеяния, так как при $l > 2$ увеличивается число дифференциальных уравнений и неизвестных функций, что усложняет решение задачи. Предложение ограничиться тремя

членами в разложении (6) обосновано также тем, что достаточно точное описание реальной ситуации может быть достигнуто во многих случаях даже при меньшем числе членов разложения.

Плотность интегрального результирующего потока излучения находится из соотношения $\Phi_i = \sum_{j=1}^J (\Phi_{ji}^+ - \Phi_{ji}^-)$.

Для решения радиационной задачи из-за ее нелинейности и различия оптических толщин слоев используется метод итераций. В каждом слое решается соответствующая краевая задача, включающая систему (3) с граничными условиями (4), (5). Распределение температуры считается известным. Найденные значения Φ_i подставляются в уравнения энергии (1), (2). При численной реализации алгоритма метода средних потоков безразмерные координаты каждого слоя изменяются от 0 до 1, при решении уравнений энергии безразмерная толщина всей системы также изменяется от 0 до 1. При этом граница раздела фаз $s(\eta)$ находится между 0 и 1. Несоответствие толщин слоев разрешается следующим образом. Сначала распределение температуры интерполируется на область $[0, 1]$ в каждом слое, по известным температурам находят радиационные потоки, которые затем интерполируются на заданные узлы расчетной сетки уравнений энергии. Затем процесс повторяется.

Численные расчеты проведены для гипотетического материала, свойства которого примерно соответствуют флюориту ($T_{\text{ф}} = 1700$ К, $\lambda_2 = \lambda_r = 9$ Вт/(м·К), $L = 0,1$ м). Безразмерные параметры задачи для процесса плавления следующие: $c_1 = 0,75$, $c_2 = 1$, $\Lambda_1 = 2$, $\Lambda_2 = 1$, $Y = 0,1$, $\theta^* = 0,5$. Граничные условия для уравнений энергии первого рода: $\theta_1 = 0,7$, $\theta_2 = 0,3$. Для процесса затвердевания имеем $c_1 = c_2 = 1$, $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 1$, $Y = 0,1$, $\theta_1 = 0,3$, $\partial\theta/\partial\xi = 0$ при $\xi = 1$. Для удобства сравнения полученных результатов параметры задачи выбраны такими же, как в работах [4–6]. Расчеты проведены в приближении серого тела при $n_1 = n_2 = 1,5$. Коэффициенты ослабления предполагаются постоянными во всей области частот и определяются из соотношений $\tau_1 = k_1 L$, $\tau_2 = k_2 L$.

В работах [2, 4–6] показано, что при $N < 0,05$ (когда в переносе тепла преобладающую роль играет излучение) наблюдается нарушение монотонного характера распределения температуры перед плоским фронтом, проявляющееся в перегреве твердой фазы при плавлении или переохлаждении жидкой фазы при затвердевании. Показано, что это приводит к неустойчивости процесса фазового превращения, и в данном случае следует использовать другую модель.

В настоящей работе в рамках классической модели исследовано влияние изотропного и анизотропного рассеяния излучения на скорость движения фронта фазового перехода и на отклонения распределения температуры от монотонного профиля. Коэффициенты поглощения $\alpha_1 L = 1$, $\alpha_2 L = 2$, радиационно-кондуктивный параметр $N = 0,01$.

Результаты расчета распределения температуры и радиационных потоков в процессе плавления и затвердевания с использованием метода средних потоков хорошо согласуются с результатами [4–6].

Анализ влияния рассеяния проводился в предположении черных стенок ($r_1 = r_2 = 0$) при различных сочетаниях альbedo однократного рассеяния ω_1 , ω_2 , соответствующих разным фазам. Расчеты проводились при следующих значениях коэффициентов разложения полинома Лежандра: $a_1 = 1,2$, $a_2 = 0,5$ (рассеяние вперед) и $a_1 = -1,2$, $a_2 = 0,5$ (рассеяние назад) [8].

Приведенные на рис. 2 результаты расчета показывают, что с увеличением альbedo однократного рассеяния твердой фазы ω_2 в процессе плавления скорость фазового фронта уменьшается. Рассеяние вперед в твердой фазе уменьшает, а рассеяние назад увеличи-

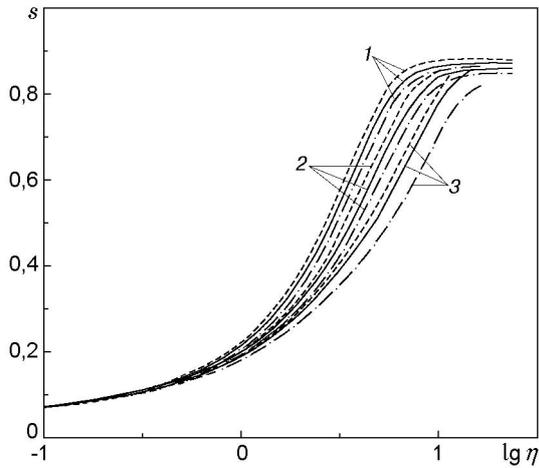


Рис. 2

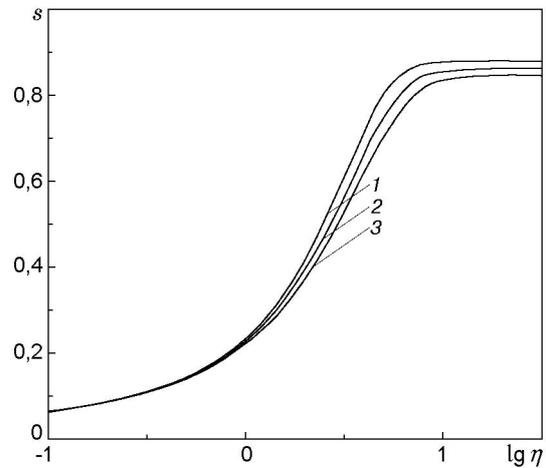


Рис. 3

Рис. 2. Движение фронта фазового перехода в процессе плавления в рассеивающей твердой фазе:

сплошные линии — изотропное рассеяние, штрихпунктирные — рассеяние вперед ($a_1 = 1,2, a_2 = 0,5$), штриховые — рассеяние назад ($a_1 = -1,2, a_2 = 0,5$); 1 — $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0,7$; 2 — $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0,9$; 3 — $\omega_1 = 0, \omega_2 = 1,0$

Рис. 3. Движение фронта фазового перехода в процессе плавления в рассеивающей жидкой фазе:

1 — $\omega_1 = 0,9, \omega_2 = 0, a_1 = 1,2, a_2 = 0,5$; 2 — $\omega_1 = 0,9, \omega_2 = 0$; 3 — $\omega_1 = 0,9, \omega_2 = 0, a_1 = -1,2, a_2 = 0,5$

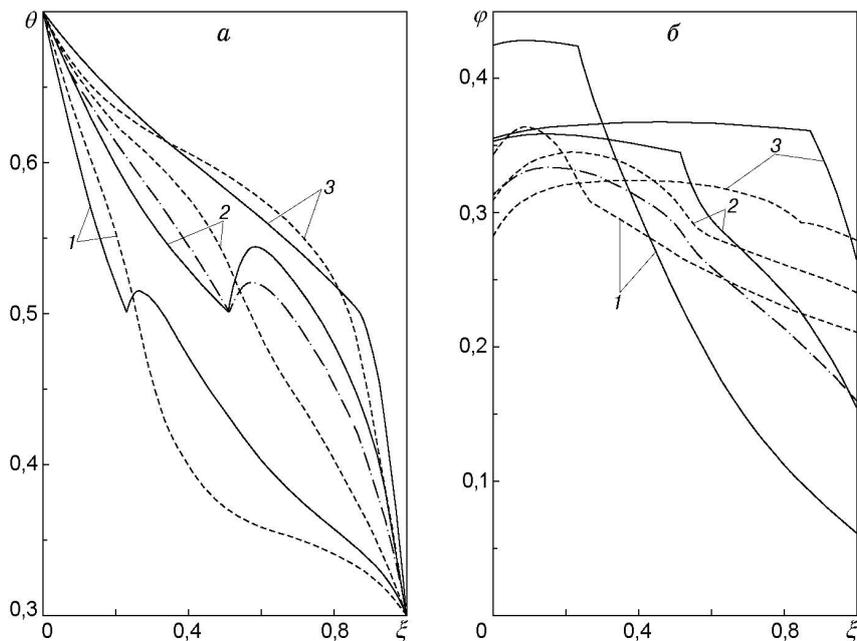


Рис. 4. Распределение температуры (а) и радиационные потоки (б) при плавлении в различные моменты времени η :

сплошные линии — $\omega_1 = 0,9, \omega_2 = 0, a_1 = 1,2, a_2 = 0,5$ (1 — $\eta = 1$; 2 — $\eta = 2,6$; 3 — $\eta = 10$); штриховые — $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0,9, a_1 = 1,2, a_2 = 0,5$ (1 — $\eta = 1,63$; 2 — $\eta = 4,76$; 3 — $\eta = 20$); штрихпунктирные — $\omega_1 = 0,5, \omega_2 = 0,5, \eta = 2,95$

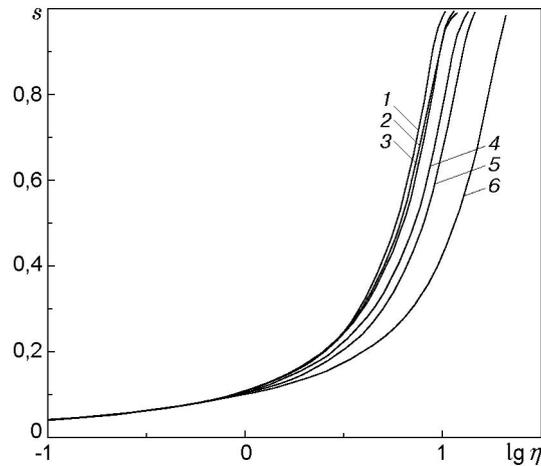


Рис. 5. Влияние изотропного рассеяния на скорость процесса затвердевания:
 1 — $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0$; 2 — $\omega_1 = 0,7, \omega_2 = 0$; 3 — $\omega_1 = 0,9, \omega_2 = 0$; 4 — $\omega_1 = 0,5, \omega_2 = 0,5$;
 5 — $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0,7$; 6 — $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0,9$

вает скорость плавления по сравнению с изотропным излучением. Это можно объяснить тем, что энергия, поглощаемая прифронтной областью, уменьшается за счет рассеяния излучения вперед. И наоборот, рассеяние вперед в жидкой фазе ускоряет процесс плавления, а рассеяние назад замедляет его по сравнению с изотропным излучением (рис. 3). Рассеяние излучения в жидкой фазе в процессе плавления увеличивает температурный “всплеск” с увеличением ω_1 (рис. 4), в то время как рассеяние излучения в твердой фазе уменьшает его. При больших значениях ω_2 ($\omega_1 = 0$) распределение температуры становится монотонным, градиент радиационного потока в твердой фазе уменьшается (рис. 4), скорость плавления по сравнению со скоростью плавления в случае рассеивающей жидкой фазы уменьшается (кривая 2 на рис. 2, 3). С увеличением рассеяния поглощение излучения твердой фазой в прифронтной области уменьшается, что приводит к уменьшению температурного “всплеска”. Результаты по изотропному излучению качественно согласуются с результатами, полученными в [2].

Исследование роли рассеяния в процессе затвердевания показало, что существенное значение имеет рассеяние в жидкой фазе. Скорость процесса затвердевания с увеличением рассеяния в жидкой фазе существенно уменьшается по сравнению с рассеивающей твердой фазой (рис. 5). При $\omega_2 = 1$ распределение температуры становится монотонным в любой момент времени (штриховые линии на рис. 6, а) и градиент радиационного потока в жидкой фазе справа от границы раздела уменьшается до нуля (штриховые линии на рис. 6, б), при меньших значениях ω_2 немонотонность распределения температуры сохраняется, но в различной степени (штрихпунктирная и сплошная линии на рис. 6, а). При любом значении ω_1 (когда твердая фаза является рассеивающей) распределения температуры сохраняют немонотонность. При этом рассеяние вперед ускоряет процесс затвердевания, а рассеяние назад замедляет процесс по сравнению с изотропным излучением. Влияние анизотропного рассеяния в жидкой фазе незначительно (рис. 7).

Проведенный в работе [3] анализ влияния анизотропного рассеяния показал, что рассеяние назад замедляет процессы плавления и затвердевания, а рассеяние вперед ускоряет их. Однако в [3] процесс фазового превращения полубесконечной полупрозрачной среды рассматривался с использованием обобщенной модели, которая учитывает образование двухфазной рассеивающей зоны при температуре фазового перехода. Следовательно, рассеивает только вторая полубесконечная область.

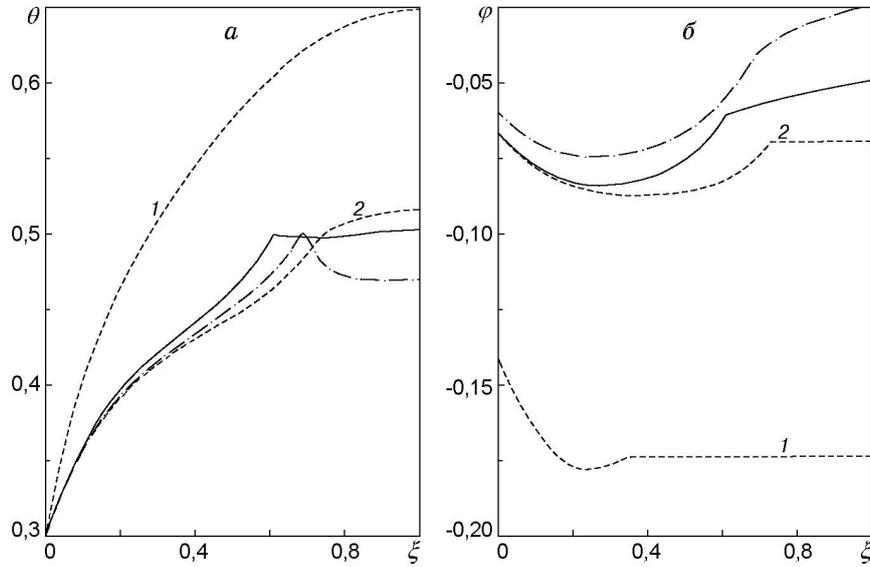


Рис. 6. Влияние рассеяния на распределение температуры (а) и радиационные потоки (б) в процессе затвердевания:

штриховые линии — $\omega_1 = 0, \omega_2 = 1$ (1 — $\eta = 15,54$; 2 — $\eta = 40,63$); сплошные — $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0,9, \eta = 14,7$; штрихпунктирные — $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0,7, \eta = 10,15$

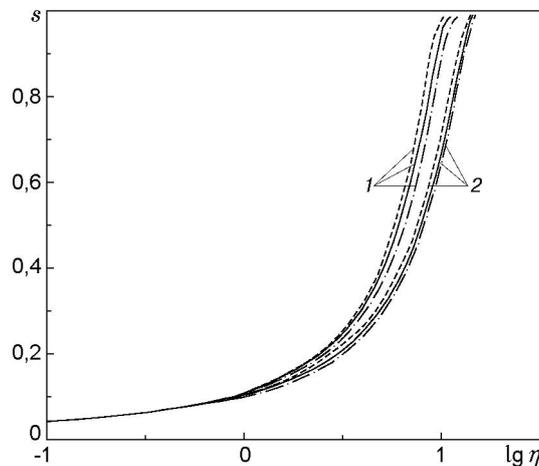


Рис. 7. Влияние анизотропного рассеяния на скорость процесса затвердевания:

сплошные линии — изотропное рассеяние, штриховые — рассеяние вперед ($a_1 = 1,2, a_2 = 0,5$); штрихпунктирные — рассеяние назад ($a_1 = -1,2, a_2 = 0,5$); 1 — $\omega_1 = 0,7, \omega_2 = 0$; 2 — $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0,7$

Анализ полученных результатов свидетельствует о необходимости более корректного учета свойств излучения, связанных с оптической неоднородностью на границах и в объеме систем, претерпевающих фазовые превращения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Siegel R. Transient thermal effects of radiant energy in translucent materials // J. Heat Transfer. 1998. V. 120, N 1. P. 4–23.

2. Голова Е. П., Рубцов Н. А. О задаче Стефана для полупрозрачного материала с учетом рассеяния. Новосибирск, 1987. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теплофизики; № 153-87).
3. Oruma F. O., Ozisik M. N., Boles M. A. Effects of anisotropic scattering on melting and solidification of a semi-infinite, semi-transparent medium // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1985. V. 28, N 2. P. 441–449.
4. Саввинова Н. А. Фазовые переходы в плоском слое с учетом излучения // Молекулярная физика неравновесных систем. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1984. С. 100–106.
5. Бурка А. Л., Рубцов Н. А., Саввинова Н. А. Нестационарный радиационно-кондуктивный теплообмен в полупрозрачной среде с фазовым переходом // ПМТФ. 1987. № 1. С. 96–99.
6. Саввинова Н. А. Влияние отражения излучения на формирование температурного поля при фазовом переходе полупрозрачного материала // Актуальные вопросы теплофизики: энергетика и экология. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1991. С. 131–136.
7. Рубцов Н. А., Тимофеев А. М. Радиационно-кондуктивный теплообмен в многослойной полупрозрачной системе // Теплофизика и аэромеханика. 2000. Т. 7, № 3. С. 411–422.
8. Liu C. C., Dougherty R. L. Anisotropically scattering media having a reflective upper boundary // J. Thermophys. Heat Transfer. 1999. V. 13, N 2. P. 177–184.

Поступила в редакцию 18/V 2001 г.
