

4. Fjortoft R. Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex // *Geophys. Publ.*— 1950.— V. 17, N 6.
5. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости.— М.: ИЛ, 1963.
6. Жермен П. Курс механики сплошных сред.— М.: Высш. шк., 1983.
7. Арнольд В. И. Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости // *ДАН СССР.*— 1965.— Т. 162, № 5.
8. Арнольд В. И. Об одной априорной оценке теории гидродинамической устойчивости // *Изв. вузов. Математика.*— 1966.— № 5.
9. Владимиров В. А. К нелинейной устойчивости течений несжимаемой жидкости // *ПМТФ.*— 1986.— № 3.
10. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия.— М.: Мир, 1973.
11. Владимиров В. А. О сходстве эффектов плотностной стратификации и вращения // *ПМТФ.*— 1985.— № 3.
12. Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.— Новосибирск: Наука, 1985.
13. Yih C. S. *Stratified Flows.*— N. Y.: Acad. Press, 1980.
14. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability.*— Oxford: Oxford Univ. Press, 1961.
15. Диккий Л. А. К нелинейной теории гидродинамической устойчивости // *ПММ.*— 1965.— Т. 29, вып. 5.
16. Drazin P. G., Howard L. N. Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid // *Adv. Appl. Mech.*— 1966.— V. 9.

Поступила 27/II 1986 г.

УДК 532.59

ПЛАВНЫЕ БОРЫ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ СО СДВИГОМ СКОРОСТИ МЕЖДУ СЛОЯМИ

Н. В. Гаврилов

(Новосибирск)

В [1] в рамках второго приближения теории мелкой воды рассмотрена двумерная задача о гравитационных волнах на границе раздела двух невязких несмешивающихся жидкостей разной плотности, заключенных между горизонтальными плоскостями: дном и крышкой. В ней предсказано существование стационарных периодических волн, уединенных внутренних волн в виде «бугра» или «ямы» и одиночных стационарных волн нового типа, которые характеризуются плавным монотонным переходом границы раздела с одного постоянного уровня на другой и названы плавными борами [2]. По своим параметрам эти волны отличаются от других стационарных переходов такого рода: гидравлического прыжка [3, 4], прыжка-волны [5] и моноклиальной волны [6], полученных в рамках первого приближения теории мелкой воды. Ранее плавные боры теоретически не предсказывались и не наблюдались в опытах, поэтому их экспериментальное изучение представляет особый интерес.

Волны в виде плавного бора в покоящейся в невозмущенном состоянии жидкости впервые реализованы и изучены в [2]. В данной работе основное внимание уделено анализу поведения таких волн на сдвиговом течении и при отражении от вертикальной стенки.

Опыты проводились на двух экспериментальных установках, схемы которых приведены на рис. 1, а, б. В схеме а нижняя жидкость (вода с плотностью $\rho_1 = 1 \text{ г/см}^3$ и вязкостью $\nu_1 = 0,0108 \text{ см}^2/\text{с}$) в невозмущенном состоянии двигалась с постоянными скоростью и глубиной. Верхняя жидкость (керосин с $\rho = 0,8 \text{ г/см}^3$ и $\nu = 0,0162 \text{ см}^2/\text{с}$) оставалась практически неподвижной. В ней наблюдалось лишь слабое циркуляционное движение, обусловленное трением на границе раздела слоев. Общая глубина жидкости $H = 6 \text{ см}$, длина рабочей части установки 250, ширина 18 см.

Генерация волн осуществлялась барьером I, расположенным на выходе из рабочей части установки и в исходном положении, выступающим над дном канала на высоту b_1 (рис. 1, а). После установления в канале стационарного режима течения нижней жидкости со скоростью u_1 и глубиной h_1 барьер быстро перемещался до высоты b_2 вверх (при генерации волн повышения уровня) или вниз (при генерации волн понижения уровня). При этом вверх по потоку распространяется возмущение, которое только при строго определенном значении глубины h_2 , однозначно связанной с b_2 , может трансформироваться в плавный бор.

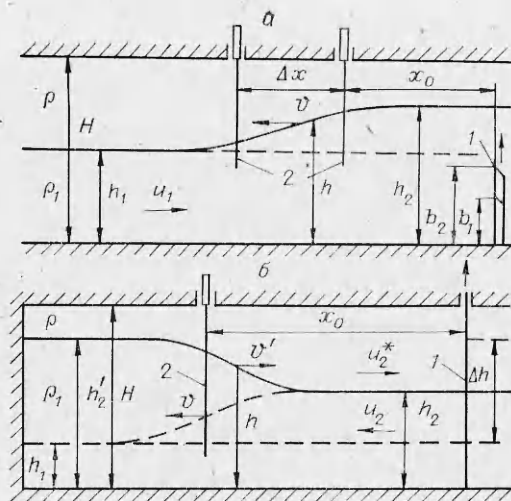


Рис. 1

В опытах эти данные получались двумя датчиками электропроводности 2 (рис. 1), расположенными на расстоянии x_0 и $x_0 \pm \Delta x$ от генератора волн. Принцип преобразования колебаний границы раздела в электрический сигнал здесь основан на том, что слегка подсоленная вода является хорошим проводником, а керосин — диэлектриком. Преобразование было линейным и удовлетворяло необходимым требованиям к чувствительности и пространственно-временной разрешающей способности. Более детальная информация о датчиках приведена в [7].

Скорость распространения волны v определялась по времени перемещения на расстояние Δx характерной точки $h_0 = (h_1 + h_2)/2$ профиля волны. Повторные измерения в одних и тех же условиях показали, что погрешность измерения v не превышала 3%. Профилем волны здесь называется функция $h(x, t)$ (t — время). Для стационарной волны $h(x, t) = h(x + vt)$, что позволяет пересчитать зависимость $h(t)$, полученную с помощью неподвижного датчика и дающую информацию об ее изменении в фиксированной точке x , в зависимость $h(x)$, которая имела бы место в системе координат, движущейся вместе с волной. Приведенные ниже экспериментальные данные представлены именно в таком виде.

На второй установке (см. рис. 1, б) изучалось поведение плавного бора при его отражении от вертикальной твердой стенки. Она представляла собой заглушенный по торцам канал длиной 192, шириной 20 и высотой 6 см, разделенный непроницаемой перегородкой 1 на две равные части. В невозмущенном состоянии обе жидкости покоились. Для генерации волн на перегородке создавался перепад уровней $\Delta h = 2(h_2 - h_1)$. Перегородка быстро удалялась, и по обе стороны от нее распространялись плавные боры (повышения уровня — влево и понижения уровня — вправо). При заданной глубине H и отношении плотностей $\lambda = \rho/\rho_1$ в [1] предсказана строго определенная глубина нижней жидкости после прохождения плавного бора $h_2 = H/(1 + \sqrt{\lambda})$. Варьируя Δh для нахождения волн различной амплитуды, необходимо соответствующим образом менять и h_1 .

В условиях проведения опытов из [1] для глубины нижней жидкости за бором $y_2 = h_2/H$ и скорости его движения $V = v/\sqrt{gH}$ (g — ускорение силы тяжести) получим выражения

$$(1) \quad y_2 = \frac{1 + F_1 \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}}{1 + \sqrt{\lambda}}, \quad V = \frac{F_1 - \sqrt{\mu}}{1 + \sqrt{\lambda}}$$

где $F_1 = u_1/\sqrt{gH}$; $\mu = 1 - \lambda$. Профиль волны в [1] находится прибли-

Реализуемые в опытах волны сопоставлялись с предсказаниями теории по четырем признакам. Первым из них было то, что при незначительном отклонении от указываемого моделью [1] значения h_2 генерируемая волна либо заметно несимметрична, либо немонотонна: на границе раздела появляются знакопеременные волны, типичные для прыжка-волны. Вторым признаком — независимостью скорости распространения плавного бора v от его амплитуды $h_2 - h_1$. Еще два признака давали непосредственное сравнение экспериментальных и расчетных данных о скорости движения и профиле волны.

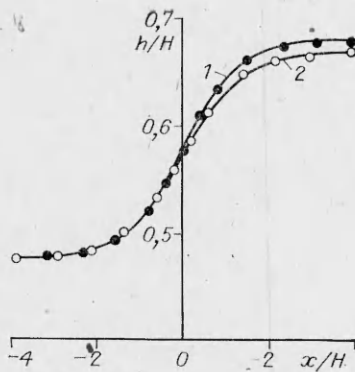


Рис. 2

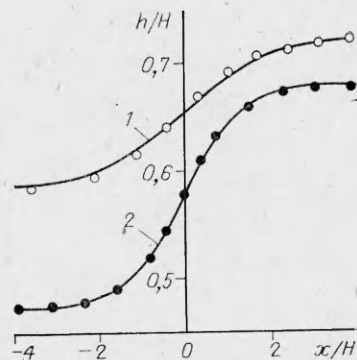


Рис. 3

женным решением исходного дифференциального уравнения и задается формулой

$$(2) \quad y = \frac{y_2 + y_1}{2} + \frac{y_2 - y_1}{2} \operatorname{th} kx_*$$

Здесь $x_* = x/H$; $y = h/H$; $y_1 = h_1/H$; k — параметр, зависящий от y_1 и y_2 . Вычисление профиля волны на ЭВМ показало, что (2) мало отличается от его точного выражения, поэтому с экспериментальными данными сравниваются расчеты, выполненные по (1) и (2).

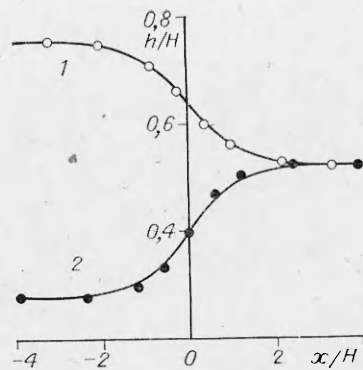
Когда обе жидкости первоначально покоятся $F_1 = 0$ (рис. 1, б), глубина нижней жидкости после прохождения волны и скорость ее движения определяются формулами

$$y_2 = 1/(1 + \sqrt{\lambda}), \quad V = -\sqrt{\mu}/(1 + \sqrt{\lambda}).$$

Этот плавный бор порождает сдвиговое течение со скоростями $F_2 = \frac{y_2 - y_1}{y_2} V$, $F_2^* = -\frac{y_2 - y_1}{1 - y_2} V$ нижней и верхней жидкости соответственно ($F_2 = u_2'/\sqrt{gH}$, $F_2^* = u_2^*/\sqrt{gH}$). Отраженная волна движется уже по такому сдвиговому течению, и, если она остается плавным бором, для глубины нижней жидкости за ней $y_2' = h_2'/H$ и скорости ее движения $V' = v'/\sqrt{gH}$ из [1] можно получить $y_2' = 2y_2 - y_1$, $V' = -V$. Профиль отраженной волны описывается выражением (2), в котором нужно заменить y_2 на y_2' и y_1 на y_2 (в том числе и в выражении для k).

Удалось добиться согласования условий проведения расчетов и опытов по всем параметрам задачи, кроме вязкости жидкости и поверхностного натяжения на границе раздела. Поверхностное натяжение практически не влияет на длинные волны и в то же время играет важную положительную роль [2, 8]. Вязкость приводит к тому, что в опытах глубина нижней жидкости за плавным бором h_2 медленно меняется. Поэтому теоретическое решение реализуется, строго говоря, в единственный момент времени и не на всех приведенных ниже иллюстрациях экспериментальное значение h_2 в точности совпадает с теоретическим. Но если при расчетах пользоваться экспериментальным значением этой глубины, то (2) хорошо описывает профиль волны. При получении всех приведенных теоретических профилей плавных боров бралось именно экспериментальное значение h_2 .

Информация о том, как происходит эволюция плавного бора в вязкой жидкости, содержится на рис. 2, где приведена одна и та же волна повышения уровня, распространяющаяся влево. Здесь и на остальных рисунках начало координат оси x помещено в точку, в которой $y = (y_1 + y_2)/2$; линии — расчет по формуле (2), точки — экспериментальные данные. При глубине и скорости набегающего потока $y_1 = 0,475$ и $F_1 = 0,154$



Р и с. 4

а глубина нижней жидкости 0,683 и 0,671 на расстоянии $x_0/H = 13,3$ (кривая 1 и зачерненные точки) и $(x_0 + \Delta x)/H = 17,5$ (кривая 2 и светлые точки) соответственно.

На рис. 3 приведены два плавных бора повышения уровня при наличии первоначального сдвига скорости между слоями. Датчик, с которого получены экспериментальные данные, расположен на расстоянии $x_0/H = 13,3$ от генератора волн. Кривая 2 и зачерненные точки получены при $y_1 = 0,475$ и $F_1 = 0,154$, теория — $y_2 = 0,685$ и $V = -0,153$, эксперимент — 0,683 и $-0,153$ соответственно, кривая 1 и светлые точки — при $y_1 = 0,583$ и $F_1 = 0,188$, теория — $y_2 = 0,729$, $V = -0,138$, эксперимент — 0,727 и $-0,137$.

На рис. 4 представлено сопоставление опытных и расчетных параметров падающей и отраженной волн. Запись получена с одного и того же датчика, расположенного на расстоянии $x_0/H = 12$ от перегородки. Скорость распространения волны в эксперименте вычислялась по времени ее прохождения расстояния от датчика до стенки и обратно. Кривая 2 и зачерненные точки относятся к падающей волне, распространяющейся влево, кривая 1 и светлые точки — к отраженной волне, двигающейся вправо. Здесь $y_1 = 0,280$, теория — $y_2 = 0,528$, $y_2' = 0,776$, $|V| = 0,236$, эксперимент — 0,522; 0,756; 0,230 соответственно.

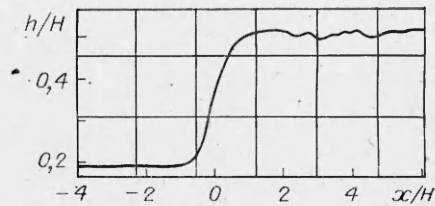
Амплитуда генерируемых в опытах плавных боров не может быть слишком большой, так как они порождают сдвиг скорости между слоями тем больший, чем больше амплитуда волны. При отсутствии поверхностного натяжения любое сдвиговое течение неустойчиво. В условиях проведения опытов поверхностное натяжение на границе раздела ($\sigma = 34$ дин/см) подавляло возникновение неустойчивости Кельвина — Гельмгольца до разности скоростей 19 см/с [8]. Из [1] для возникающего сдвига скорости между слоями в размерном виде получается

$$(3) \quad \Delta u = \frac{V\sqrt{\mu}}{(1 + \sqrt{\lambda})} \frac{(y_2 - y_1)}{y_2(1 - y_2)} \sqrt{gH}.$$

При достаточно большой амплитуде плавного бора сдвиг скорости за ним окажется больше критического и разовьется неустойчивость.

На рис. 5 приведена запись на ленте самописца плавного бора повышения уровня, распространяющегося влево, при $y_1 = 0,190$, $y_2 = 0,510$, $\lambda = 0,8$, $H = 6$ см. При этом, согласно (3), возникающий сдвиг скорости $\Delta u = 23,3$ см/с больше его предельного значения. За плавным бором отчетливо видны коротковолновые возмущения, характерные для неустойчивости Кельвина — Гельмгольца.

В заключение можно отметить, что в гидродинамике нечасто удается получить аналитические решения и одновременно реализовать физический процесс, согласующийся с этими решениями, с такой точностью, как это иллюстрируют приведенные выше экспериментальные данные.



Р и с. 5

для глубины нижней жидкости после прохождения волны и скорости ее движения из (1) получаем $y_2 = 0,685$ и $V = -0,153$. В опыте скорость распространения оказалась такой же,

Автор благодарит Л. В. Овсянникова и В. И. Букреева за инициативу постановки данных опытов и полезное обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нелинейные** проблемы теории поверхностных и внутренних волн/Л. В. Овсянников, Н. И. Макаренко, В. И. Налимов и др.— Новосибирск: Наука, 1985.
2. Агеев В. А., Букреев В. И., Гаврилов Н. В. Новый тип плоских стационарных волн в двухслойной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1986.— № 5.
3. Yih C.-S., Guba C. R. Hydraulic jump in a fluid system of two layers // Tellus.— 1955.— V. 7, N 3.
4. Mehrotra S. C., Kelly R. E. On the question of nonuniqueness of internal hydraulic jumps and drops in a two-fluid system // Tellus.— 1973.— V. 25.
5. Wood I. R., Simpson J. E. Jumps in layered miscible fluids // J. Fluid Mech.— 1984.— V. 140.
6. Стокер Дж. Дж. Волны на воде.— М.: ИЛ, 1959.
7. Букреев В. И., Гаврилов Н. В., Знобищев К. Р. Экспериментальное исследование волн в двухслойной жидкости со сдвигом скорости между слоями // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1984.— Вып. 64.
8. Thorpe S. A. Experiments on the instability of stratified shear flows: immiscible fluids // J. Fluid Mech.— 1969.— V. 39, N 1.

Поступила 11/IV 1986 г.

УДК 532.528

ОБ ОДНОМ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ СЕМЕЙСТВЕ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ ОКОЛО ПЛАСТИНЫ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЗВРАТНОЙ СТРУЙКИ

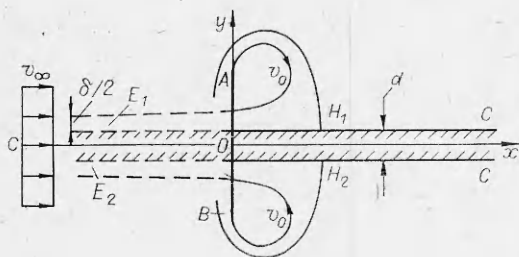
В. С. Садовский

(Жуковский)

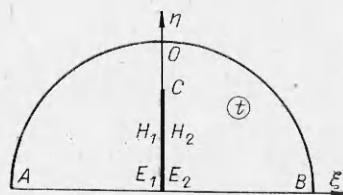
Схема плоского стационарного течения идеальной жидкости около пластины изображена на рис. 1, где приведены основные обозначения и система координат. От обычной схемы Эффроса она отличается тем, что критические точки H_1 и H_2 за пластиной разнесены по оси y на расстояние d , а линии тока, проходящие в эти точки, после разветвления являются прямыми $y = \pm d/2$. Полосу $|y| \leq d/2$ назовем жестким следом, который при $x < 0$ вместе с возвратными струйками суммарной толщины δ реализуется на второй римановой поверхности.

Пусть p_∞, v_∞ — давление и скорость потенциального течения на бесконечности; p_0 и v_0 — давление в каверне и скорость на ее граничной линии тока; $Q = 2(p_\infty - p_0)/\rho v_\infty^2 = (v_0/v_\infty)^2 - 1$ — число кавитации; l — длина пластины.

Для нахождения решения используем метод особенностей Чаплыгина, который применительно к задаче Эффроса достаточно подробно изложен в [1]. Так же как и в [1], областью параметрического переменного t выберем полукруг единичного радиуса. Соответствие точек физической плос-



Р и с. 1



Р и с. 2