

**ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ
УПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД**

В. С. Будаев

(Москва)

При исследовании распространения колебаний в упругих анизотропных средах одной из важнейших задач является выявление особенностей нестационарных волновых полей, несвойственных изотропным средам. С этой точки зрения большое значение приобретают задачи для сосредоточенных импульсных источников возмущений, поскольку в ряде случаев решения данных задач могут быть записаны в конечном виде через элементарные функции, что позволяет провести широкие исследования решений.

Одной из задач, решение которой может быть получено в конечном виде, является задача Лэмба для полуплоскости. Результаты, приведенные ниже, являются продолжением исследований [1, 2], направленных на изучение особенностей нестационарных волновых полей в анизотропных средах.

Получено замкнутое решение задачи Лэмба для упругой анизотропной полуплоскости для случая, когда уравнения движения в условиях плоской деформации характеризуются четырьмя упругими постоянными.

Приводятся примеры расчета для точек на границе полуплоскости. Обсуждаются физические следствия. Подробно исследуются корни характеристического уравнения.

1. Постановка задачи и решение. Будем рассматривать упругие анизотропные среды, уравнения движения которых в условиях плоской деформации записываются в виде

$$(1.1) \quad c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + c_3 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + c_4 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Здесь c_1, c_2, c_3, c_4 — коэффициенты, которые выражаются через упругие постоянные среды

$$c_1 = a_{11}, \quad c_2 = a_{13} + a_{44}, \quad c_3 = a_{44}, \quad c_4 = a_{33}$$

u, w — компоненты смещений по осям x и z , ρ — плотность.

Рассмотрим краевую задачу для полуплоскости $z \geq 0$, когда граничные условия при $z = 0$ имеют вид

$$(1.2) \quad \sigma_z = -P \delta(x) \delta(t), \quad \tau_{zx} = 0$$

а начальные условия нулевые.

Компоненты напряжений σ_z и τ_{zx} записываются в виде

$$(1.3) \quad \sigma_z = (c_2 - c_3) \frac{\partial u}{\partial x} + c_4 \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \tau_{zx} = c_3 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

Функции $\delta(x), \delta(t)$ — дельта-функции Дирака.

Рассматриваемая задача является задачей Лэмба для упругой анизотропной полуплоскости.

В [1] данная задача рассматривалась для случая, когда коэффициенты уравнений удовлетворяли условиям

$$(1.4) \quad \gamma > \alpha(1 + \beta), \quad \gamma^2 \geq 4\alpha\beta, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1 \\ [2\beta(1 + \alpha) - \gamma(1 + \beta)] \geq -|\beta - 1| \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta} \\ \alpha = c_3 / c_1, \quad \beta = c_3 / c_4, \quad \gamma = 1 + \alpha\beta - c_2^2 / c_1 c_4$$

На другие случаи полученное в [1] решение задачи непосредственно не распространяется. Для получения решения задачи, справедливого во всех случаях, используем более общий метод.

Применяя преобразование Лапласа по времени, решение задачи записываем в виде

$$(1.5) \quad \begin{aligned} u &= -\frac{P}{4\pi^2 c_3} \sum_{n=1}^2 \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dg \int_{-i\infty}^{i\infty} U_n(\theta) e^{gt} e^{-g\xi_n} d\theta \\ w &= -\frac{P}{4\pi^2 c_3} \sum_{n=1}^2 \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dg \int_{-i\infty}^{i\infty} W_n(\theta) e^{gt} e^{-g\xi_n} d\theta \\ \xi_n &= \theta x + \mu_n(\theta) z, \quad \mu_n(\theta) = i\theta q_n(\varepsilon), \quad \varepsilon = 1/\theta \\ q_n(\varepsilon) &= (-M_1 \pm \sqrt{M_1^2 - M_2})^{1/2}, \quad n = 1, 2 \\ M_1 &= \frac{c_2^2 + c_3(\rho\varepsilon^2 - c_3) + c_4(\rho\varepsilon^2 - c_1)}{2c_3c_4} \\ M_2 &= \frac{(\rho\varepsilon^2 - c_1)(\rho\varepsilon^2 - c_3)}{c_3c_4} \\ U_1 &= \frac{\theta\alpha_2(\theta)}{F(\theta)}, \quad U_2 = -\frac{\alpha_1(\theta)\Omega_2(\theta)}{F(\theta)} \\ W_1 &= -\frac{\alpha_2(\theta)\Omega_1(\theta)}{F(\theta)}, \quad W_2 = -\frac{\theta\alpha_1(\theta)}{F(\theta)} \\ \alpha_1(\theta) &= \theta[\mu_1(\theta) + \Omega_1(\theta)], \quad \alpha_2(\theta) = \mu_2(\theta)\Omega_2(\theta) - \theta^2 \\ \gamma_1(\theta) &= b^2 p^{-2}[d^2\theta^2 + \mu_1(\theta)\Omega_1(\theta)] - 2\theta^2 \\ \gamma_2(\theta) &= \theta\{b^2 p^{-2}[d^2\Omega_2(\theta) - \mu_2(\theta)] - 2\Omega_2(\theta)\} \\ F(\theta) &= \alpha_1(\theta)\gamma_2(\theta) - \gamma_1(\theta)\alpha_2(\theta) \\ \Omega_1(\theta) &= -\theta\chi_1(\theta), \quad \Omega_2(\theta) = \theta/\chi_2(\theta) \\ \chi_n(\theta) &= \frac{c_3\mu_n^2(\theta) + c_1(\theta^2 - a^2)}{\theta c_2\mu_n(\theta)} = \frac{\theta c_2\mu_n(\theta)}{c_4\mu_n^2(\theta) + c_3(\theta^2 - b^2)} \\ d^2 &= \frac{p^2}{b^2} \left(\frac{b^2 + c^2}{c^2} \right), \quad p^2 = \frac{\rho}{c_4}, \quad c^2 = \frac{\rho}{c_2}, \quad a^2 = \frac{\rho}{c_1} \end{aligned}$$

Здесь $\mu_n(\theta)$ — корни характеристического уравнения, θ и g — переменные интегрирования в (1.5).

Функции u, w можно записать в виде

$$(1.6) \quad \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} E(g) e^{gt} dg, \quad w = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi(g) e^{gt} dg \\ E(g) &= \int_{-i\infty}^{i\infty} \left[\frac{-iP}{2\pi c_3} \sum_{n=1}^2 U_n(\theta) \right] e^{-g\xi_n} d\theta \\ \Phi(g) &= \int_{-i\infty}^{i\infty} \left[\frac{-iP}{2\pi c_3} \sum_{n=1}^2 W_n(\theta) \right] e^{-g\xi_n} d\theta \end{aligned}$$

Переходя от интегрирования по мнимой оси θ к интегрированию вдоль контуров L_n , симметричных относительно вещественной оси, вдоль которых $\xi_n = t$, т. е.

$$\operatorname{Re}[\theta x + \mu_n(\theta)z] = t, \quad \operatorname{Im}[\theta x + \mu_n(\theta)z] = 0$$

получим

$$(1.7) \quad E(g) = \sum_{n=1}^2 \int_0^{\infty} \left[\frac{-iP}{\pi c_3} U_n(\theta_n) \frac{\partial \theta_n}{\partial t} \right] e^{-gt} dt$$

$$\Phi(g) = \sum_{n=1}^2 \int_0^{\infty} \left[\frac{-iP}{\pi c_3} W_n(\theta_n) \frac{\partial \theta_n}{\partial t} \right] e^{-gt} dt$$

Применяя к (1.7) формулы обращения преобразования Лапласа (1.6), получим, отделяя реальную часть

$$(1.8) \quad u = u_1 + u_2, \quad w = w_1 + w_2$$

$$u_1 = \frac{P}{\pi c_3} \operatorname{Im} \left[\frac{\theta_1 \alpha_2(\theta_1) \partial \theta_1}{F(\theta_1) \partial t} \right]$$

$$u_2 = -\frac{P}{\pi c_3} \operatorname{Im} \left[\frac{\alpha_1(\theta_2) \Omega_2(\theta_2) \partial \theta_2}{F(\theta_2) \partial t} \right]$$

$$w_1 = -\frac{P}{\pi c_3} \operatorname{Im} \left[\frac{\alpha_2(\theta_1) \Omega_1(\theta_1) \partial \theta_1}{F(\theta_1) \partial t} \right]$$

$$w_2 = -\frac{P}{\pi c_3} \operatorname{Im} \left[\frac{\theta_2 \alpha_1(\theta_2) \partial \theta_2}{F(\theta_2) \partial t} \right]$$

Значения θ_n есть решения уравнений

$$(1.9) \quad t - \theta_n x - \mu_n'(\theta_n) z = 0, \quad n = 1, 2$$

2. Исследование корней характеристического уравнения. При выполнении условий (1.4) корни характеристического уравнения системы (1.1), т. е. функции $\mu_n(\theta)$, принимают при действительных θ только вещественные или чисто мнимые значения. Будем относить функции $\mu_n(\theta)$, обладающие данными свойствами, к первому типу.

Условиям (1.4) удовлетворяют очень многие анизотропные среды и все изотропные, так что этот тип сред является очень распространенным. Для сред первого типа особенно характерны минералы, например каменная соль, сильвин, полевой шпат, лед, берилл, песчаник и др.

Анизотропные среды, для которых условия (1.4) не выполняются, также очень распространены в природе. В отличие от сред первого типа для данных сред наиболее характерны металлы, причем значительную часть составляют металлы с кубической решеткой и в меньшей степени металлы с гексагональной плотноупакованной структурой, к которым относится большинство металлов, находящихся во второй, третьей, четвертой, седьмой и восьмой группах периодической системы. Типичными представителями последних являются бериллий, титан, кобальт, цинк, рубидий, кадмий, молибден, цирконий, теллур и др.

Среды, для которых условия (1.4) не выполняются, делятся на две группы. К одной группе отнесем среды, у которых ось x не проходит через лакуны. Будем называть их средами второго типа. К средам третьего типа отнесем среды, у которых ось x проходит через лакуны.

В случае сред второго и третьего типов функции $\mu_n(\theta)$ принимают при вещественных θ комплексные значения. Покажем, что комплексные значения функции $\mu_n(\theta)$ могут принимать только для $|\theta| > b$, $b = \sqrt[3]{\rho/c_3}$, а следовательно, функции $q_n(\epsilon)$ — только при $|\epsilon| > c_b$, $c_b = 1/b$.

Точки c_1 и c_3 разбивают полуось $0 \leq \rho \epsilon^2 < \infty$ на три интервала

$$c_1 \leq \rho \epsilon^2 < \infty, \quad c_3 \leq \rho \epsilon^2 < c_1, \quad 0 \leq \rho \epsilon^2 < c_3$$

Рассмотрим значения $q_n(\epsilon)$ в каждом из интервалов в отдельности.

В интервале $c_1 \leq \rho \varepsilon^2$ имеем согласно (1.5)

$$M_1 > 0, M_2 > 0$$

Обозначая $k_1 = \rho \varepsilon^2 - c_1$, $k_2 = \rho \varepsilon^2 - c_3$, приводим выражение для $T = M_1^2 - M_2$ к виду

$$T = c_2^4 + 2c_2^2(c_4k_1 + c_3k_2) + (c_4k_1 - c_3k_2)^2$$

откуда, учитывая, что $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, получаем, что в данном интервале величины $q_n(\varepsilon)$ чисто мнимые, а следовательно

$$\mu_n(\theta) = i\theta q_n(\varepsilon) \text{ при } |\theta| < a, \quad a = \sqrt{\rho/c_1}$$

вещественные.

В интервале $c_3 \leq \rho \varepsilon^2 < c_1$ имеем $M_2 < 0$, так что q_1 — вещественная и q_2 — чисто мнимая величины независимо от знака M_1 . Комплексные значения функции $q_n(\varepsilon)$ могут принимать только в интервале $0 \leq \rho \varepsilon^2 < c_3$, а $\mu_n(\theta)$ — в интервале $|\theta| > b$, $b > a$.

Можно показать, что если $\mu_n(\theta)$ принимают комплексные значения в некоторой точке $\theta = \theta_1$, то они являются комплексными и на всем интервале $\theta_1 \leq \theta < \infty$. Крайнее слева значение θ_1 обозначим через θ_* . Переход через точку $\theta = \theta_*$ связан с изменением знака подкоренного выражения T радикала $\sqrt{M_1^2 - M_2}$, что для непрерывной функции сопряжено с обращением ее в нуль в точке $\theta = \theta_*$, откуда согласно (1.5)

$$(2.1) \quad \mu_1(\theta_*) = \mu_2(\theta_*)$$

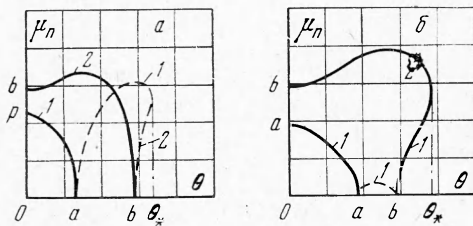
Из (2.1) следует, что точки $|\theta| = \theta_*$ являются точками ветвления внутреннего радикала $\sqrt{M_1^2 - M_2}$ в выражениях для $\mu_n(\theta)$. Две точки ветвления радикала $\sqrt{M_1^2 - M_2}$ вещественные и, поскольку все точки ветвления расположены симметрично относительно осей, две другие точки ветвления лежат на мнимой или действительной осях. Типичные зависимости $\mu_n(\theta)$ для сред, относящихся ко второму типу, приведены на фиг. 1, а для интервала $0 \leq \theta < \theta_*$. В случае сред третьего типа функции $\mu_n(\theta)$ также принимают комплексные значения на интервале $\theta_* \leq \theta < \infty$. Представителем данных сред является медь.

На фиг. 1, б приведена типичная конфигурация кривых $\mu_n(\theta)$ на действительной оси θ для сред рассматриваемого вида. В данном случае функции $\mu_n(\theta)$ подходят к точке $\theta = \theta_*$, будучи вещественными. В случае сред третьего типа точки $|\theta| = \theta_*$ также являются точками ветвления радикала $\sqrt{M_1^2 - M_2}$.

Различия в ходе кривых $\mu_n(\theta)$ обуславливают различие в ходе кривых смещений. Когда $\mu_n(\theta)$ и $\theta_n(\mu)$ относятся к третьему типу, оси координат x и z проходят через лакуны. Вблизи границ лакун решение ведет себя так же, как вблизи фронтов волн.

Кроме функций $\mu_n(\theta)$ большое влияние на конфигурацию кривых смещений, в частности для точек поверхности, оказывают относительные значения величин α и β по сравнению с единицей.

3. Примеры расчетов. На фиг. 2 приводятся безразмерные величины u_* (кривая 1) и w_* (кривая 2) для цинка (второй тип сред, $\alpha < 1$, $\beta < 1$) и на фиг. 3 для модельной среды МП (второй тип, $\alpha > 1$, $\beta < 1$). Величины



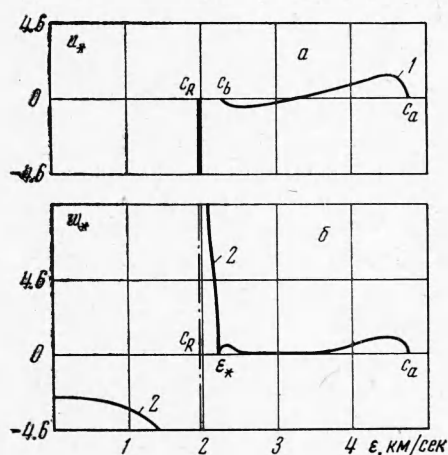
Фиг. 1

u_* и w_* связаны с горизонтальной и вертикальной компонентами смещений в точках границы

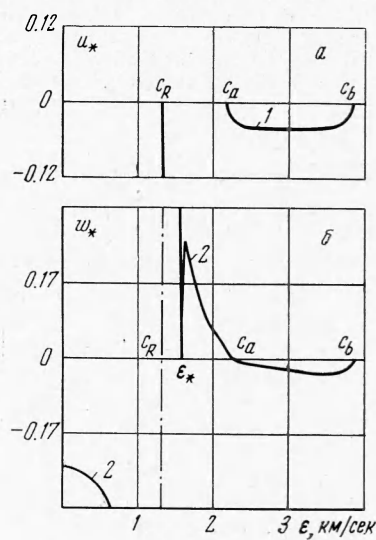
$$(3.1) \quad u(x, 0, t) = \frac{P}{\pi c_3 t} u_* \left(\frac{x}{t} \right), \quad w(x, 0, t) = \frac{P}{\pi c_3 t} w_* \left(\frac{x}{t} \right)$$

По оси абсцисс на фиг. 2, 3 отложены значения $\varepsilon = x/t$ в км/сек. Рассмотрим некоторые особенности кривых смещений. Характерным признаком, присущим кривым w_* на фиг. 2, 3, является наличие точки ε_* за фронтом второй волны, где $w_* = 0$. Это связано с тем, что все три среды относятся ко второму типу сред.

На интервале $c_b < \varepsilon < c_a$ кривые u_* и w_* для цинка качественно не отличаются от аналогичных кривых для сред первого типа. Это связано



Фиг. 2



Фиг. 3

с тем, что в обоих случаях $\alpha < 1$, $\beta < 1$. В случае материала МП величина w_* обращается в нуль в точке $\varepsilon = c_a$ и в точке $\varepsilon = c_b$, что невозможно в случае сред первого типа. Для МП ($\alpha > 1$) кривые на интервале между фронтами волн ($c_a < \varepsilon < c_b$) имеют вид, принципиально отличный от соответствующих кривых первого типа. Особенностью материала МП является то, что скорость волны Рэлея составляет 0.58 наименьшей скорости волн, т. е. в случае сред рассматриваемого типа возможны очень низкие скорости волн Рэлея. Указанные особенности кривых смещений на поверхности невозможны в случае изотропных сред. (На фиг. 1 кривая 1 относится к $\mu_1(\theta)$, кривая 2 — к $\mu_2(\theta)$. Штриховой линией обозначены мнимые значения функций $\mu_n(\theta)$.)

Автор благодарит С. А. Христиановича и Е. И. Шемякина за внимание к работе.

Поступила 3 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Будаев В. С. Об одной краевой задаче динамики упругих анизотропных сред. Сб. Динамика сплошной среды, вып. 15. Изд-во СО АН СССР, 1973.
2. Будаев В. С. Распространение колебаний от источника типа сосредоточенного импульса в анизотропной среде. Прикл. механ., 1973, т. 9, вып. 2.