

УДК 539.374

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ РАСТЯГИВАЕМОГО ЦИЛИНДРА С МЯГКИМ СВАРНЫМ (ПАЯНЫМ) ШВОМ, СОДЕРЖАЩИМ ТРЕЩИНУ

С. Е. Александров

Институт проблем механики РАН, 119526 Москва
E-mail: sergeyaleksandrov@yahoo.com

При оценке работоспособности различных конструкций, в частности конструкций с мягким сварным (паяным) швом, предельная нагрузка является одной из основных характеристик. В ряде случаев различие пределов текучести основного материала и материала шва настолько велико, что пластическая деформация локализуется в тонком шве. С учетом некоторых особенностей такого распределения деформаций получена верхняя оценка предельной нагрузки растягиваемого осесимметричного образца с трещиной в сварном (паяном) шве.

Ключевые слова: сварные или паяные конструкции, трещина, предельная нагрузка, верхняя оценка.

Предельная нагрузка является одной из характеристик, определяющих работоспособность конструкций с трещинами [1]. Предельные нагрузки для конструкций с трещинами приведены в работе [2], для сварных конструкций — в работе [3]. В частности, в [3] отмечено, что в ряде современных конструкций материал сварного шва значительно мягче основного материала. Аналогичная ситуация имеет место в большинстве паяных конструкций. В таких случаях пластическая деформация развивается в сварном (паяном) шве, а основной материал при вычислении предельной нагрузки можно считать жестким. Оценки предельной нагрузки для этого класса конструкций получены также в [4–7] для случая плоской деформации, в [8–10] для случая трехмерной деформации и в [11] для осесимметричного образца (растягиваемый цилиндрический образец с круговой трещиной в плоскости симметрии). Далее рассматривается случай сварного шва, однако все результаты справедливы и в случае паяного шва. В настоящей работе предлагается модифицированное решение для конструкции, рассмотренной в [11], кроме того, получено решение, обобщенное на случай, когда трещина находится на некотором расстоянии от плоскости симметрии сварного шва. Как и в работах [7–11], при построении кинематически возможного поля скоростей учитывается сингулярный характер действительного поля скоростей вблизи поверхности их разрыва [12], которая возникает на участке границы между сварным швом и основным материалом.

Геометрическая схема нагруженного образца и оси цилиндрической системы координат $r\theta z$ показаны на рис. 1 (R — радиус образца; a — радиус трещины; $2H$ — толщина

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-3842.2012.1).

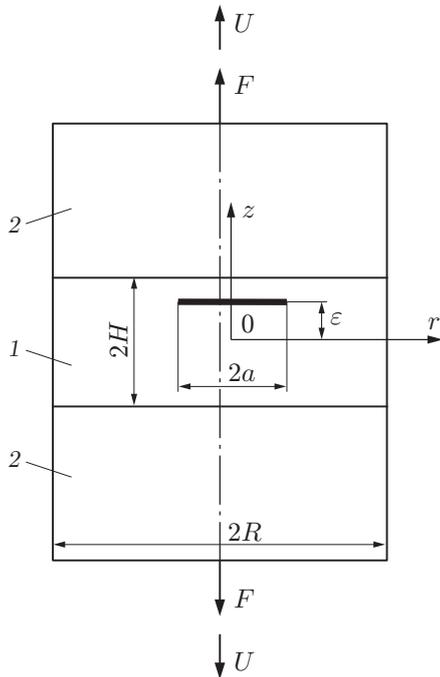


Рис. 1

Рис. 1. Геометрическая схема образца:
 1 — сварной шов; 2 — основной материал

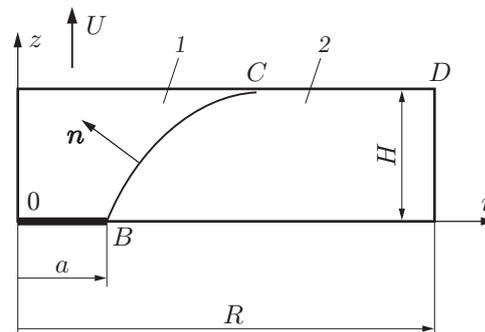


Рис. 2

Рис. 2. Схема кинематически возможного поля скоростей при $\varepsilon = 0$:
 1 — жесткая зона, движущаяся вместе с основным материалом вдоль оси z со скоростью U , 2 — пластическая зона; BC — граница между жесткой и пластической зонами, CD — граница между основным материалом и сварным швом

сварного шва; ε — расстояние от плоскости симметрии сварного шва до плоскости трещины (предполагается, что $0 \leq \varepsilon \leq H$); F — сосредоточенные силы). Жесткие блоки основного материала движутся в противоположных направлениях вдоль оси z со скоростью U . Плоскость $z = 0$ совпадает с плоскостью симметрии сварного шва. Для материала сварного шва справедливо условие текучести Мизеса с постоянным пределом текучести при одноосном растяжении σ_0 .

Сначала получим решение для частного случая $\varepsilon = 0$. Такой образец имеет плоскость симметрии $z = 0$, поэтому достаточно рассмотреть область $z \geq 0$. Схема кинематически возможного поля скоростей в области $0 \leq z \leq H$ показана на рис. 2. Граница BC между жесткой и пластической зонами и часть границы между основным материалом и сварным швом CD являются поверхностями разрыва скоростей. Краевые условия для поля скоростей в пластической зоне имеют вид

$$z = 0: \quad u_z = 0; \tag{1}$$

$$z = H: \quad u_z = U. \tag{2}$$

Здесь u_z — осевая скорость. Кроме того, на поверхности BC нормальная скорость должна быть непрерывна.

Для построения кинематически возможного поля скоростей, по аналогии с решением Прандтля — Надаи для осадки слоя пластического материала в условиях плоской деформации (см., например, [13]) положим

$$u_z/U = z/H. \tag{3}$$

Очевидно, что при этом выполняются краевые условия (1), (2). Подставляя (3) в уравнение несжимаемости

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

и интегрируя его, получаем

$$\frac{u_r}{U} = \frac{C(z)R}{r} - \frac{r}{2H}, \quad (4)$$

где $C(z)$ — произвольная функция z ; u_r — радиальная скорость. Результаты анализа полной системы уравнений теории пластичности показывают, что вблизи поверхности разрыва скорости распределение действительного поля скоростей описывается законом [12]

$$\xi_{rz} = O(1/\sqrt{H-z}), \quad z \rightarrow H. \quad (5)$$

Несмотря на то что выполнение условия (5) не является обязательным требованием теоремы о верхней оценке, желательно учесть асимптотическое представление действительного поля скоростей при построении кинематически возможного поля скоростей. Одна из наиболее простых функций $C(z)$, удовлетворяющих (5), имеет вид

$$C(z) = C_0 + C_1 \sqrt{1 - (z/H)^2}, \quad (6)$$

где C_0, C_1 — произвольные постоянные. Так как при $z = 0$ $dC/dz = 0$, то предложенное кинематически возможное поле скоростей удовлетворяет условию $\xi_{rz} = 0$ при $z = 0$, которое выполняется также в точном решении. С помощью (3), (4), (6) эквивалентная скорость деформации определяется по формуле

$$\begin{aligned} \xi_{eq} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{u_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} = \\ &= \frac{U}{H} \sqrt{1 + \frac{4(C_0 + C_1 \cos \mu)^2 h^2}{3\rho^4} + \frac{C_1^2 \operatorname{tg}^2 \mu}{3\rho^2}}, \quad (7) \end{aligned}$$

где

$$h = H/R, \quad \rho = r/R, \quad \sin \mu = z/H. \quad (8)$$

Единичная нормаль к поверхности BC представляется в виде (см. рис. 2)

$$\mathbf{n} = -\sin \gamma \mathbf{e}_r + \cos \gamma \mathbf{e}_z. \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z$ — базисные векторы цилиндрической системы координат; γ — угол между касательной к поверхности BC в меридиональной плоскости и осью r , отсчитываемый от оси против хода часовой стрелки. По определению $\operatorname{tg} \gamma = dz/dr$. Тогда с учетом (8)

$$\operatorname{tg} \gamma = h \cos \mu \frac{d\mu}{d\rho}. \quad (10)$$

Условие непрерывности нормальной скорости на поверхности BC имеет вид

$$\mathbf{u}_R \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_P \cdot \mathbf{n}. \quad (11)$$

Векторы скорости в жесткой и пластической зонах (см. рис. 1) определяются соотношениями

$$\mathbf{u}_R = U \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{u}_P = u_r \mathbf{e}_r + u_z \mathbf{e}_z \quad (12)$$

соответственно. Компоненты вектора \mathbf{u}_P вычисляются из (3), (4). Подставляя (3), (4), (6), (9), (12) в (11), с учетом (8), (10) получаем уравнение для зависимости $\rho(\mu)$ на поверхности BC

$$\left(\frac{\rho}{2} - \frac{h(C_0 + C_1 \cos \mu)}{\rho}\right) \frac{d\mu}{d\rho} = \frac{1 - \sin \mu}{\cos \mu}. \quad (13)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\rho_{BC}^2(\mu) = -\frac{h[4C_0 \sin \mu + C_1(2\mu + \sin 2\mu) + C_2]}{2(1 - \sin \mu)}, \quad (14)$$

где C_2 — постоянная интегрирования. Кривая, описываемая уравнением (14), должна проходить в меридиональной плоскости через вершину трещины (см. рис. 2). Таким образом, при $\mu = 0$ $\rho = a/R = a_0$ и из (14) следует $C_2 = -2a_0^2/h$. Тогда уравнение (14) принимает вид

$$\rho_{BC}^2(\mu) = -\frac{h[4C_0 \sin \mu + C_1(2\mu + \sin 2\mu)] - 2a_0^2}{2(1 - \sin \mu)}. \quad (15)$$

В общем случае из этого уравнения следует, что $\rho_{BC} \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow \pi/2$ (или $z \rightarrow H$). Полагая

$$4C_0 = 2a_0^2/h - C_1\pi \quad (16)$$

и исключая C_0 в (15) с помощью (16), получаем

$$\rho_{BC}^2(\mu) = a_0^2 - \frac{hC_1}{2} \frac{2\mu + \sin 2\mu - \pi \sin \mu}{1 - \sin \mu}. \quad (17)$$

В пределе при $\mu \rightarrow \pi/2$ из этого уравнения найдем безразмерную радиальную координату точки C (см. рис. 2):

$$\rho_C = \sqrt{a_0^2 - \pi h C_1 / 2}. \quad (18)$$

Так как в точке D $\rho = 1$ (см. рис. 2), то предложенное кинематически возможное поле скоростей имеет место, только если $\rho_C \leq 1$ или (с учетом (18))

$$a_0^2 - \pi h C_1 / 2 \leq 1. \quad (19)$$

С учетом (12) величина скачка скорости на поверхности BC определяется соотношением

$$|[u]|_{BC} = [(U - u_z)^2 + u_r^2]^{1/2}. \quad (20)$$

Здесь проекции вектора скорости u_r , u_z должны быть вычислены на поверхности BC . Подставляя (3), (4), (6), (8), (16) в (20), находим

$$|[u]|_{BC} = U \left[(1 - \sin \mu)^2 + \frac{1}{\rho_{BC}^2(\mu)} \left(C_1 \cos \mu + \frac{a_0^2}{2h} - \frac{\pi C_1}{4} - \frac{\rho_{BC}^2(\mu)}{2h} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (21)$$

Бесконечно малый элемент кривой, образованной при пересечении поверхности BC и меридиональной плоскости, определяется соотношением

$$dl_{BC} = [(dr/dz)^2 + 1]^{1/2} dz,$$

где производная dr/dz вычисляется из (13) с использованием (8) при $\rho = \rho_{BC}(\mu)$. В результате получаем

$$dl_{BC} = \frac{Rh \cos \mu}{1 - \sin \mu} \left[(1 - \sin \mu)^2 + \frac{1}{\rho_{BC}^2(\mu)} \left(C_1 \cos \mu + \frac{a_0^2}{2h} - \frac{\pi C_1}{4} - \frac{\rho_{BC}^2(\mu)}{2h} \right)^2 \right]^{1/2} d\mu. \quad (22)$$

Используя (21), (22), запишем выражение для мощности на поверхности разрыва скорости BC :

$$E_{BC} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \iint | [u]]_{BC} r d\theta dl_{BC} = \frac{2\pi\sigma_0 UR^2 h}{\sqrt{3}} \Omega_{BC}, \quad (23)$$

$$\Omega_{BC} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \mu}{1 - \sin \mu} \left[(1 - \sin \mu)^2 + \frac{1}{\rho_{BC}^2(\mu)} \left(C_1 \cos \mu + \frac{a_0^2}{2h} - \frac{\pi C_1}{4} - \frac{\rho_{BC}^2(\mu)}{2h} \right)^2 \right] \rho_{BC}(\mu) d\mu.$$

Величина скачка скорости на поверхности CD (см. рис. 2) равна $|u_r|$ в (4) при $z = H$ (или $\mu = \pi/2$). Поэтому с учетом (6), (8), (16) мощность на этой поверхности вычисляется по формуле

$$E_{CD} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_{R\rho_C}^R | [u_r]]_{CD} r d\theta dr = \frac{\pi\sigma_0 UR^2}{\sqrt{3}} \int_{\rho_C}^1 \left| \frac{1}{2} \left(\frac{2a_0^2}{h} - C_1\pi \right) - \frac{\rho^2}{h} \right| d\rho. \quad (24)$$

Полагая, что

$$2\rho^2/h - 2a_0^2/h + C_1\pi \geq 0, \quad (25)$$

интегрирование в (24) можно выполнить аналитически. В результате имеем

$$E_{CD} = \frac{\pi\sigma_0 UR^2}{\sqrt{3}} \Omega_{CD}, \quad \Omega_{CD} = \frac{1 - \rho_C^3}{3h} - \frac{1}{2} \left(\frac{2a_0^2}{h} - C_1\pi \right) (1 - \rho_C). \quad (26)$$

Так как ρ изменяется в интервале $1 \geq \rho \geq \rho_C$, то достаточно проверить неравенство (25) при $\rho = \rho_C$. Из (18) следует, что (25) выполняется всегда.

С учетом (7), (8), (16) мощность в пластической области (см. рис. 2) определяется по формулам

$$E_V = \sigma_0 \iiint_V \xi_{eq} r dr dz d\theta = 2\pi\sigma_0 UR^2 \Omega_V, \quad (27)$$

$$\Omega_V = \int_0^{\pi/2} \int_{\rho_{BC}(\mu)}^1 \sqrt{\rho^2 + \frac{(2a_0^2/h - C_1\pi + 4C_1 \cos \mu)^2 h^2}{12\rho^2} + \frac{C_1^2 \operatorname{tg}^2 \mu}{3}} \cos \mu d\rho d\mu.$$

Из теоремы о верхней оценке (см., например, [13]) следует $F_u U = E_V + E_{BC} + E_{CD}$. Подставляя в это уравнение соотношения (23), (26), (27), получаем

$$\frac{F_u}{\pi R^2 \sigma_0} = f_u = 2\Omega_V + \frac{\Omega_{CD}}{\sqrt{3}} + \frac{2h}{\sqrt{3}} \Omega_{BC}, \quad (28)$$

где F_u — верхняя оценка предельной нагрузки; f_u — безразмерная верхняя оценка предельной нагрузки. Величины Ω_V и Ω_{BC} (как функции C_1) могут быть получены в результате численного интегрирования (23), (27). Из (26) следует, что величина Ω_{CD} также зависит от C_1 . Чтобы найти наиболее точную верхнюю оценку на основе предложенного кинематически возможного поля скоростей, необходимо, минимизируя правую часть уравнения (28) по C_1 , определить величины f_u и C_1 . Подставляя величину C_1 в (19), получаем критическое значение a_{cr} , позволяющее определить границу области применимости полученного решения в соответствии с неравенством $a_0 \leq a_{cr}$. Очевидно, что величина a_{cr} зависит от h . Эта зависимость представлена на рис. 3. Зависимость f_u от a_0 в интервале $0 \leq a_0 \leq a_{cr}$ при различных значениях h показана на рис. 4 (сплошные линии).

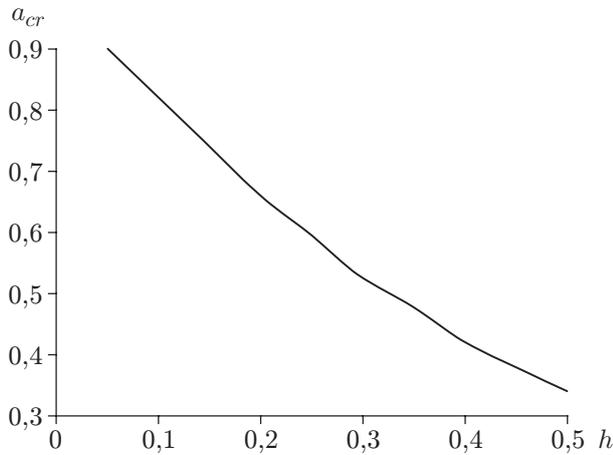


Рис. 3

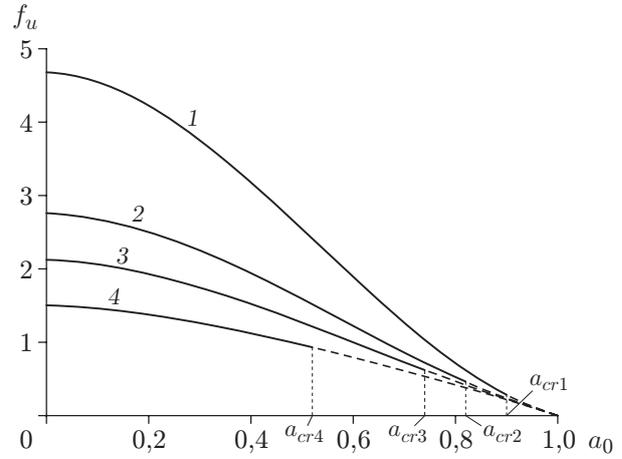


Рис. 4

Рис. 3. Зависимость критического радиуса трещины от h

Рис. 4. Зависимость безразмерной предельной нагрузки образца от радиуса трещины при $\varepsilon = 0$ и различных значениях h :

сплошные линии — $0 \leq a_0 \leq a_{cr}$, штриховые — $a_{cr} \leq a_0 \leq 1$; 1 — $h = 0,05$, 2 — $h = 0,1$, 3 — $h = 0,15$, 4 — $h = 0,3$

В интервале $a_{cr} \leq a_0 \leq 1$ поверхность разрыва скорости BC пересекает поверхность $r = R$ в области, занятой сварным швом, т. е. при $r = R$ точка C расположена ниже точки D (см. рис. 2). Пусть μ_C — значение μ в точке C . Так как в этой точке $\rho = 1$, то из (17) следует

$$C_1 = -\frac{2(1 - a_0^2)(1 - \sin \mu_C)}{h(2\mu_C + \sin 2\mu_C - \pi \sin \mu_C)}. \quad (29)$$

В рассматриваемом случае величина f_u может быть определена из уравнения (28), в котором необходимо положить $\Omega_{CD} = 0$, а значения Ω_V , Ω_{BC} вычислять по соотношениям

$$\Omega_V = \int_0^{\mu_C} \int_{\rho_{BC}(\mu)}^1 \sqrt{\rho^2 + \frac{(2a_0^2/h - C_1\pi + 4C_1 \cos \mu)^2 h^2}{12\rho^2} + \frac{C_1^2 \operatorname{tg}^2 \mu}{3}} \cos \mu \, d\rho \, d\mu,$$

$$\Omega_{BC} = \int_0^{\mu_C} \frac{\cos \mu}{1 - \sin \mu} \left[(1 - \sin \mu)^2 + \frac{1}{\rho_{BC}^2(\mu)} \left(C_1 \cos \mu + \frac{a_0^2}{2h} - \frac{\pi C_1}{4} - \frac{\rho_{BC}^2(\mu)}{2h} \right)^2 \right] \rho_{BC}(\mu) \, d\mu,$$

в которых постоянная C_1 должна быть исключена с помощью (29). Таким образом, правая часть (28) зависит от μ_C и должна быть численно минимизирована по этому параметру. Полученная зависимость f_u от a_0 в интервале $a_{cr} \leq a_0 \leq 1$ при различных значениях h показана на рис. 4 (штриховые линии).

Чтобы получить решение для исходного образца (см. рис. 1), рассмотрим кинематически возможное поле скоростей, схема которого показана на рис. 5. Жесткие зоны 1 и 3 движутся со скоростью U в противоположных направлениях. Следовательно, мощность на поверхности разрыва скорости TB равна

$$E_{TB} = (4\pi/\sqrt{3})U\sigma_0 a \varepsilon. \quad (30)$$

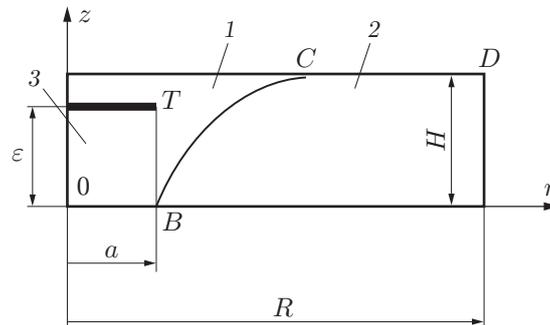


Рис. 5. Схема кинематически возможного поля скоростей при $\varepsilon \neq 0$:
 1, 3 — жесткие зоны, движущиеся со скоростью U в противоположных направлениях,
 2 — пластическая зона; TB , BC , CD — поверхности разрыва скорости

Для пластической зоны 2 используется поле скоростей, полученное в случае $\varepsilon = 0$. Поэтому мощность в зоне 2, включающей поверхности разрыва скорости BC и CD , равна $E_0 = E_V + E_{BC} + E_{CD}$ (величины в правой части определяются из (23), (26), (27)). Таким образом, из теоремы о верхней оценке получаем $2F_u U = 2E_0 + E_{TD}$ или (с учетом (28) и (30))

$$\frac{F_u}{\pi R^2 \sigma_0} = f_u^{(1)} = f_u + \frac{2a_0 \varepsilon}{\sqrt{3} R}. \quad (31)$$

Коэффициент 2 введен в (31) для учета второй половины пластической зоны (области $z \leq 0$) и второй силы, приложенной к основному материалу ниже сварного шва (см. рис. 1). При известной величине f_u безразмерное усилие, приложенное к рассматриваемому образцу, определяется по формуле (31). Отметим, что с увеличением a_0 второе слагаемое в (31) возрастает, а величина f_u уменьшается. В случае малых трещин последнее слагаемое в (31) вносит существенно больший вклад в величину $f_u^{(1)}$ по сравнению с мощностью в пластической зоне в интервале $0 \leq r \leq a$ в случае образца без трещины. Поэтому выражение для предельной нагрузки можно записать в форме $f_u^{(2)} = \min \{f_u^{(0)}, f_u^{(1)}\}$, где $f_u^{(1)}$ определяется из (31), а $f_u^{(0)}$ — из (28) при $a_0 = 0$.

Решение (31) получено в предположении $0 \leq a_0 \leq a_{cr}$. Аналогично может быть рассмотрен интервал $a_{cr} \leq a_0 \leq 1$ с использованием соответствующего решения (28) при $\Omega_{CD} = 0$. Однако в случае очень больших трещин последнее слагаемое в (31) вносит существенно больший вклад в величину предельной нагрузки. Действительно, прием, использованный при построении решения (31), является эффективным (позволяет получить достаточно точную верхнюю оценку предельной нагрузки), только если толщина сварного шва мала по сравнению с протяженностью пластической зоны в радиальном направлении и вклад второго слагаемого в суммарную величину предельной нагрузки невелик. Это предположение справедливо, если вершина трещины (в меридиональной плоскости) расположена достаточно далеко от поверхности $r = R$. Решение для случая больших трещин может быть получено, если при построении кинематически возможного поля скоростей точку B сместить в точку T (см. рис. 5). В данной работе это решение не приводится, так как для конструкций с большими трещинами предельная нагрузка мала и не имеет прикладного значения.

Отличие полученного решения от решения [11] состоит в том (помимо того, что в настоящей работе рассмотрен образец более общего типа), что форма жесткопластической границы BC (см. рис. 2) определяется в процессе решения. Это не имеет существенного значения в случае образца без трещины или с трещиной небольшого размера, так как

в окрестности оси симметрии мощность внутренних сил мала. Однако при увеличении радиуса трещины решение, полученное в настоящей работе, дает меньшее значение предельной нагрузки, чем решение [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Zerbst U., Ainsworth R. A., Schwalbe K.-H.** Basic principles of analytical flaw assessment methods // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 2000. V. 77, N 14/15. P. 855–867.
2. **Miller A. G.** Review of limit loads of structures containing defects // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 1988. V. 32, N 1–4. P. 197–327.
3. **Kim Y.-J., Schwalbe K.-H.** Compendium of yield load solutions for strength mis-matched DE(T), SE(B) and C(T) specimens // Engng Fract. Mech. 2001. V. 68, N 9. P. 1137–1151.
4. **Hao S., Cornec A., Schwalbe K.-H.** Plastic stress-strain fields of a plane strain cracked tensile panel with a mismatched welded joint // Intern. J. Solids Structures. 1997. V. 34, N 3. P. 297–326.
5. **Александров С. Е., Кончакова Н. А.** Верхняя оценка усилия при растяжении сварных и паяных пластин с наклонным швом, содержащим трещину // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2007. № 1. С. 63–69.
6. **Alexandrov S., Kocak M.** Limit load analysis of strength undermatched welded T-joint under bending // Fatigue Fract. Engng Mater. Structures. 2007. V. 30, N 4. P. 351–355.
7. **Александров С. Е.** Предельная нагрузка при изгибе сварных образцов с мягким сварным швом // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 2. С. 216–222.
8. **Alexandrov S.** A note on the limit load of welded joints of a rectangular cross-section // Fatigue Fract. Engng Mater. Structures. 1999. V. 22, N 5. P. 449–452.
9. **Alexandrov S., Richmond O.** On estimating the tensile strength of an adhesive plastic layer of arbitrary simply connected contour // Intern. J. Solids Structures. 2000. V. 37, N 4. P. 669–686.
10. **Alexandrov S., Kocak M.** Effect of three-dimensional deformation on the limit load of highly weld strength undermatched specimens under tension // Proc. Inst. Mech. Pt C. J. Mech. Engng Sci. 2008. V. 222, N 2. P. 107–115.
11. **Alexandrov S. E., Goldstein R. V., Tchikanova N. N.** Upper bound limit load solutions for a round welded bar with an internal axisymmetric crack // Fatigue Fract. Engng Mater. Structures. 1999. V. 22, N 9. P. 775–780.
12. **Александров С. Е.** Поле скоростей вблизи поверхности их разрыва при произвольном течении идеального жесткопластического материала // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 5. С. 116–122.
13. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.

*Поступила в редакцию 12/V 2010 г.,
в окончательном варианте — 10/I 2012 г.*