ПМТФ, № 3, 1974

УДК 539.374

ОБ ОБРАЗОВАНИИ ЖЕСТКИХ ЗОН В ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Е. М. Емельянов, А. Д. Чернышов

(Воронеж)

В работе получены условия на границе жесткой зоны в вязкопластической среде в конечной форме. В [1] приведено аналогичное условие в интегральной форме. Далее рассмотрена задача о стационарном течении в плоском канале среды Бингама — Шведова [2]. На нижнюю неподвижную плоскость канала наложены малые ортогональные гармонические возмущения, верхняя невозмущенная плоскость движется с постоянной скоростью под произвольным углом к возмущениям. На границах предполагается прилипание среды. Задача решена методом малого параметра. С помощью двух приближений найдено критическое условие, при котором в углублениях впервые образуются жесткие зоны. При течении вдоль возмущений в решении задачи возникают особенности. Эти случаи рассмотрены отдельно. Ранее задача о нахождении критерия начала образования жесткой зоны в вязкопластической среде была рассмотрена в [3].

1. Условие на поверхности жестких зон. *Теорема.* Чтобы поверхность $\mathbf{v} = 0$ была границей жесткой области течения вязкопластического материала ($\mathbf{v}$ — вектор скорости частиц среды), необходимо и достаточно, чтобы на этой поверхности выполнялось условие

$$\partial |\mathbf{v}| / \partial n = 0 \tag{1.1}$$

где n — нормальная координата, отсчитываемая от поверхности жесткой области Σ.

Условие необходимости теоремы можно доказать, используя равенства

$$\mathbf{v}|_\Sigma = 0, \quad \varepsilon_{ij}|_\Sigma = {}^1/_2 (v_{i,j} + v_{j,i})_\Sigma = 0 \tag{1.2}$$

Достаточность. Пусть на Σ выполняются следующие условия теоремы: $\mathbf{v}|_\Sigma = 0$, $\partial|\mathbf{v}|/\partial n|_\Sigma = 0$. Требуется доказать, что $\varepsilon_{ij}|_\Sigma = 0$. Разложим функции $\mathbf{v}$ и $\partial\mathbf{v}/\partial n$ в окрестности поверхности Σ в ряд

$$\mathbf{v} = \partial\mathbf{v}/\partial n|_\Sigma n + \ldots, \quad \partial\mathbf{v}/\partial n = \partial\mathbf{v}/\partial n|_\Sigma + \ldots \tag{1.3}$$

$$\mathbf{v}\cdot\partial\mathbf{v}/\partial n = (\partial\mathbf{v}/\partial n|_\Sigma)^2 n + \ldots \tag{1.4}$$

Для модуля скорости эти выражения запишутся в виде

$$|\mathbf{v}| = \partial|\mathbf{v}|/\partial n|_\Sigma n + \ldots, \quad \partial|\mathbf{v}|/\partial n = \partial|\mathbf{v}|/\partial n|_\Sigma + \ldots \tag{1.5}$$

$$|\mathbf{v}|\,\partial|\mathbf{v}|/\partial n = (\partial|\mathbf{v}|/\partial n|_\Sigma)^2 n + \ldots \tag{1.6}$$

Так как левые части выражений (1.4) и (1.6) равны между собой, то равны и их правые части, т. е.

$$(\partial|\mathbf{v}|/\partial n|_\Sigma)^2 n + \ldots = (\partial\mathbf{v}/\partial n|_\Sigma)^2 n + \ldots \tag{1.7}$$

Отсюда следует, что $\partial\mathbf{v}/\partial n|_\Sigma = 0$ совместно с $\mathbf{v} = 0$, а значит $\varepsilon_{ij}|_\Sigma = 0$, что и требовалось доказать.

2. Установившееся течение вязкопластической среды в плоском канале. Нижняя плоскость канала ($y = 0$) неподвижна и на нее наложено малое ортогональное возмущение

$$y = h(\delta_1 \cos m_1 x + \delta_2 \cos m_2 z) \tag{2.1}$$

где h — ширина канала, $\delta_1, \delta_2 \ll 1$. Верхняя плоскость ($y = h$) движется параллельно плоскости xz под углом α к оси z с постоянной скоростью v_*.

Соотношение между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и тензора скоростей деформации ε_{ij} при условии пластичности Мизеса зададим в виде [4]

$$\sigma_{ij} = (\sqrt{2}\,k / \sqrt{\varepsilon_{ql}\varepsilon_{ql}} + 2\eta)\,\varepsilon_{ij} + P\delta_{ij}, \quad \sigma_{qq} = 3P \tag{2.2}$$

где k — предел текучести, η — коэффициент вязкости.

Компоненты тензора скоростей деформации связаны со скоростью течения соотношением

$$\varepsilon_{ij} = {}^1/_2\,(v_{i,j} + v_{j,i}) \tag{2.3}$$

Перейдем к безразмерным величинам, которыми будем пользоваться в дальнейшем

$$x = x'h,\ y = y'h,\ z = z'h,\ m_{1(2)} = m_{1(2)}'h^{-1},\ v_i = v_i'v_*,\ \sigma_{ij} = \\ = \sigma_{ij}'k,\ \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}'hv_*^{-1}$$

Запишем уравнение равновесия и условие несжимаемости среды

$$\sigma_{,j}^{ij} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{2.4}$$

Граничные условия задачи имеют вид

$$\begin{gathered} v_x = v_y = v_z = 0 \ \text{при}\ y = \delta_1 \cos m_1 x + \delta_2 \cos m_2 z \\ v_x = \sin\alpha,\ v_y = 0,\ v_z = \cos\alpha \ \text{при}\ y = 1 \end{gathered} \tag{2.5}$$

Скорость частиц среды и среднее давление будем искать в виде

$$f(x, y, z; \delta_1, \delta_2) = f_{(y)}^{(0)} + \delta_1 f'(x, y) + \delta_2 f''(y, z) + \ldots \tag{2.6}$$

С учетом граничных условий (2.5) нулевым приближением является решение задачи Куэтта в плоском канале

$$v_x^{(0)} = y \sin\alpha, \quad v_y^{(0)} = 0, \quad v_z^{(0)} = y\cos\alpha, \quad P^{(0)} = 0 \tag{2.7}$$

Подстановка разложения (2.6) последовательно в (2.3), (2.2) и (2.4) с учетом (2.7) приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered} L(2v'_{x,xx} + v'_{x,yy} + v'_{y,xy}) - \sin^2\alpha\,(v'_{x,yy} + v'_{y,xy}) - \\ - \sin\alpha\cos\alpha\, v'_{z,yy} + P'_{,x} = 0 \\ L(v'_{y,xx} + 2v'_{y,yy} + v'_{x,xy}) - \sin^2\alpha\,(v'_{y,xx} + v'_{x,xy}) - \sin\alpha\cos\alpha\, v'_{z,xy} + P'_{,y} = 0 \\ L(v'_{z,xx} + v'_{z,yy}) - \cos^2\alpha\, v'_{z,yy} - \sin\alpha\cos\alpha\,(v'_{x,yy} + v'_{y,xy}) = 0 \\ v'_{x,x} + v'_{y,y} = 0 \end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered} L(v''_{x,yy} + v''_{x,zz}) - \sin^2\alpha\, v''_{x,yy} - \sin\alpha\cos\alpha\,(v''_{y,yz} + v''_{z,yy}) = 0 \\ L(2v''_{y,yy} + v''_{y,zz} + v''_{z,yz}) - \cos^2\alpha\,(v''_{y,zz} + v''_{z,yz}) - \sin\alpha\cos\alpha\, v''_{x,yz} + P''_{,y} = 0 \\ L(v''_{z,yy} + 2v''_{z,zz} + v''_{y,yz}) - \cos^2\alpha\,(v''_{z,yy} + v''_{y,yz}) - \sin\alpha\cos\alpha\, v''_{x,yy} + P''_{,z} = 0 \\ v''_{y,y} + v''_{z,z} = 0 \end{gathered} \tag{2.9}$$

$$L = 1 + a^{-2}, \quad a^2 = kh / \eta v_*$$

Граничные условия для системы (2.8), (2.9) получим, разлагая в ряд по степеням δ_1, δ_2 условия (2.5)

$$v_x' = -\sin\alpha\cos m_1 x,\ v_y' = 0,\ v_z' = -\cos\alpha\cos m_1 x \text{ при } y = 0 \tag{2.10}$$
$$v_x' = v_y' = v_z' = 0 \text{ при } y = 1$$

$$v_x'' = -\sin\alpha\cos m_2 z,\ v_y'' = 0,\ v_z'' = -\cos\alpha\cos m_2 z \text{ при } y = 0 \tag{2.11}$$
$$v_x'' = v_y'' = v_z'' = 0 \text{ при } y = 1$$

Для решения системы уравнений (2.8) с граничными условиями (1.10) неизвестные функции будем искать в виде

$$v_x' = A_1(y)\cos m_1 x,\ v_y' = B_1(y)\sin m_1 x \tag{2.12}$$
$$v_z' = C_1(y)\cos m_1 x,\ P' = D_1(y)\sin m_1 x$$

Подставим (2.12) в (2.8), (2.10). После преобразований получим

$$A_1 = m_1^{-1} pB_1,\quad [m_1^{-1}(L - \sin^2\alpha)p^3 - m_1(L + \sin^2\alpha)p]B_1 - \tag{2.13}$$
$$-\sin\alpha\cos\alpha\, p^2 C_1 + m_1 D_1 = 0,\ [(L + \sin^2\alpha)p^2 - m_1^2(L -$$
$$-\sin^2\alpha)]B_1 + m_1\sin\alpha\cos\alpha\, pC_1 + pD_1 = 0,\ \sin\alpha\cos\alpha\times$$
$$\times(m_1^{-1}p^3 + m_1 p)B_1 + [m_1^2 L - (L - \cos^2\alpha)p]C_1 = 0$$

где введено символическое обозначение $p = d / dy$.

Граничные условия

$$A_1 = B_1 = C_1 = 0 \text{ при } y = 1 \tag{2.14}$$
$$A_1 = -\sin\alpha,\ B_1 = 0,\ C_1 = -\cos\alpha \text{ при } y = 0$$

Характеристическое уравнение системы (2.13) имеет вид

$$(t - 1)\{t^2 - [2 + a^2(1 + 3\sin^2\alpha)]t + 1 + a^2(1 - \tag{2.15}$$
$$-\sin^2\alpha)\} = 0,\quad t = \lambda^2 m_1^{-2}$$

Корни его равны

$$t_1 = 1,\quad t_{2,3} = {}^1/_2\{2 + a^2(1 + 3\sin^2\alpha) \pm a[16\sin^2\alpha + \tag{2.16}$$
$$+ a^2(1 + 3\sin^2\alpha)^2]^{1/2}\}$$

Учитывая, что кратных корней нет и $\lambda_1 = -\lambda_4$, $\lambda_2 = -\lambda_5$, $\lambda_3 = -\lambda_6$, решение системы (2.13) ищем в виде

$$B_1(y) = \sum_1^3 [c_i \exp(\lambda_i y) + c_{i+3}\exp(-\lambda_i y)] \tag{2.17}$$
$$C_1(y) = \sum_1^3 [c_{2i}\exp(\lambda_i y) + c_{2i+3}\exp(-\lambda_i y)]$$
$$D_1(y) = \sum_1^3 [c_{3i}\exp(\lambda_i y) + c_{3i+3}\exp(-\lambda_i y)]$$

Подставив (2.17) в (2.13), находим

$$c_{2q} = a_q c_q,\quad c_{3q} = b_q c_q \tag{2.18}$$
$$a_q = -\lambda_q(\lambda_q^2 + m_1^2)\sin\alpha\cos\alpha\, m_1^{-1}[\lambda_q^2(L - \cos^2\alpha) - m_1^2 L]^{-1}$$
$$b_q = \frac{\lambda_q L(\lambda_q^2 - m_1^2)}{m_1^2\cos^2\alpha}\,\frac{\lambda_q^2(1 - L) + m_1^2(L + \sin^2\alpha)}{\lambda_q(L - \cos^2\alpha) - m_1^2 L}$$

Тогда решение запишется в форме

$$A_1(y) = m_1^{-1}\sum_1^3 [c_i\lambda_i\exp(\lambda_i y) - c_{i+3}\lambda_i\exp(-\lambda_i y)] \tag{2.19}$$

$$B_1(y)=\sum_1^3[c_i\exp(\lambda_i y)+c_{i+3}\exp(-\lambda_i y)]$$

$$C_1(y)=\sum_1^3[c_ia_i\exp(\lambda_i y)-c_{i+3}a_i\exp(-\lambda_i y)]$$

$$D_1(y)=\sum_1^3[c_ib_i\exp(\lambda_i y)-c_{i+3}b_i\exp(-\lambda_i y)]$$

Постоянные интегрирования c_i найдем из граничных условий (2.14)

$$\sum_1^6 c_i=0,\quad m_1^{-1}\sum_1^3(c_i\lambda_i-c_{i+3}\lambda_i)=-\sin\alpha \tag{2.20}$$

$$\sum_1^3(c_ia_i-c_{i+3}a_i)=-\cos\alpha$$

$$\sum_1^3[c_i\exp(\lambda_i)+c_{i+3}\exp(-\lambda_i)]=0,\qquad \sum_1^3[c_i\lambda_i\exp(\lambda_i)-c_{i+3}\lambda_i\exp(-\lambda_i)]=0$$

$$\sum_1^3[c_ia_i\exp(\lambda_i)-c_{i+3}a_i\exp(-\lambda_i)]=0$$

Решение системы (2.19) относительно c_1 имеет вид

$$A_1=m_1^{-1}\sum_1^3\lambda_qG_q,\quad B_1=\sum_1^3F_q,\quad C_1=\sum_1^3a_qG_q,\quad D_1=\sum_1^3b_qG_q \tag{2.21}$$

$$F_q=b_q^1\operatorname{sh}(\lambda_qy)+b_q^2\operatorname{ch}(\lambda_qy)+b_q^3\operatorname{sh}[\lambda_q(y-1)]+$$
$$+b_q^4\operatorname{ch}[\lambda_q(y-1)],\qquad G_q=\lambda_q^{-1}pF_q$$

$$b_q^1=2\Delta_1^{-1}(M_{12}^{qq+3}\sin\alpha-M_{13}^{qq+3}\cos\alpha) \tag{2.22}$$

$$b_q^2=2\Delta_1^{-1}(a_q\sin\alpha-\lambda_qm_1^{-1}\cos\alpha)M_{23}^{qq+3}$$

$$b_q^3=2\Delta_1^{-1}(M_{24}^{qq+3}\sin\alpha-M_{34}^{qq+3}\cos\alpha)$$

$$b_k^4=2\Delta_1^{-1}[(\lambda_qM_{25}^{qq+3}-a_qM_{26}^{qq+3})\sin\alpha-(\lambda_qM_{35}^{qq+3}-a_qM_{36}^{qq+3})\cos\alpha]$$

где (по q не суммировать) Δ_1 — определитель системы (2.20), M_{mn}^{qq+3} — миноры определителя Δ_1, верхние индексы указывают на вычеркнутые столбцы, нижние — на вычеркнутые строки.

Сравнив системы (2.8) и (2.9) и граничные условия (2.10) и (2.11), видим, что решение краевой задачи (2.9), (2.11) можно выписать, используя решение задачи (2.8), (2.10) путем формальной замены в (2.12) — (2.22) m_1, λ_q, $\operatorname{tg}\alpha$, x, z на m_2, μ_q, $\operatorname{ctg}\alpha$, z, x соответственно, а в других обозначениях добавлением штриха

$$v_x''=C_2(y)\cos m_2z,\quad v_y''=B_2(y)\sin m_2z,\quad v_z''=A_2(y)\cos m_2z, \tag{2.23}$$
$$P''=D_2(y)\sin m_2z$$

Функции $A_2(y)$, $B_2(y)$, $C_2(y)$, $D_2(y)$ выпишем из (2.21)

$$A_2=m_1^{-1}\sum_1^3\mu_qG_q',\quad B_2=\sum_1^3F_q',\quad C_2=\sum_1^3a_qG_q',\quad D_2=\sum_1^3b_q'G_q' \tag{2.24}$$

$$F_q'=b_q^{1\prime}\operatorname{sh}(\mu_qy)+b_q^{2\prime}\operatorname{ch}(\mu_qy)+b_q^{3\prime}\operatorname{sh}[\mu_q(y-1)]+$$
$$+b_q^{4\prime}\operatorname{ch}[\mu_q(y-1)],\ G_q'=\mu_q^{-1}pF_q'$$

При некотором соотношении параметров, характеризующих течение вязкопластической среды, в углублениях на возмущенной плоскости возможно образование жестких зон, подобно примеру, приведенному в [3]. Можно предположить, что зарождение жестких областей начнется в вершинах углублений нижней поверхности ($y = -\delta_{1*} - \delta_{2*}$, $\cos m_1 x = \cos m_2 z = -1$).

Формулируя условие (1.1) для этих точек, с точностью до малых первого порядка получим критическое соотношение между параметрами v_*, h, k, η, α, m_{1-2}, δ_{1*}, δ_{2*}

$$1 - [A_{1,y}(0)\sin\alpha + C_{1,y}(0)\cos\alpha]\,\delta_{1*} - [C_{2,y}(0)\sin\alpha + A_{2,y}(0)\cos\alpha]\,\delta_{2*} = 0 \tag{2.25}$$

Если возмущение поверхности при одинаковых режимах течения будет больше критического $\delta_1 + \delta_2 \geqslant \delta_{1*} + \delta_{2*}$, то в углублениях образуются жесткие зоны, если $\delta_1 + \delta_2 < \delta_{1*} + \delta_{2*}$, то жесткие зоны в канале отсутствуют.

Для $\alpha = \pi n / 2$ ($n = 1, 2, \ldots$) полученное решение условиям задачи не удовлетворяет, так как в этих случаях характеристическое уравнение (2.15) содержит кратные или комплексные корни и решение задачи удается значительно упростить.

Продольные возмущения

$$y = \delta_1 \cos m_1 x, \quad \delta_2 = 0, \quad \cos\alpha = 1$$

Здесь отличной от нуля будет лишь скорость v_z.

Нулевое приближение

$$v_z^{(0)} = y \tag{2.26}$$

Для первого приближения v_z' остается одно уравнение из системы (2.8)

$$(1 + a^2)\, v'_{z,\,xx} + v'_{z,\,yy} = 0 \tag{2.27}$$

Граничные условия для (2.27) находятся из (2.10) и имеют вид

$$v_z'(x, 1) = 0, \quad v_z'(x, 0) = -\cos m_1 x \tag{2.28}$$

Функцию скорости ищем в виде

$$v_z' = C_1(y)\cos m_1 x \tag{2.29}$$

Подставив (2.29) в (2.27), (2.28), придем к уравнению

$$p^2 C_1 - m^2{}_1 (1 + a^2)\, C_1 = 0 \tag{2.30}$$

с граничными условиями

$$C_1(1) = 0, \quad C_1(0) = -1 \tag{2.31}$$

Решая задачу (2.30), (2.31) и учитывая (2.26), получим

$$v_z' = y + \delta_1 [\operatorname{sh}(\lambda)]^{-1} \operatorname{sh}[\lambda(y - 1)] \cos m_1 x + o(\delta_1^2), \quad \lambda = m_1 (1 + a^2)^{1/2} \tag{2.32}$$

Критерий образования застойных зон в вершинах углублений ($y = -\delta_{1*}$, $\cos m_1 x = -1$) из условия (1.1) получается в виде

$$\delta_1 \geqslant \delta_{1*}, \quad \delta_{1*} = [\operatorname{th}(\lambda)] / \lambda \tag{2.33}$$

Поперечные возмущения

$$y = \delta_2 \cos m_2 z, \quad \delta_1 = 0, \quad \cos\alpha = 1$$

В этом случае $v_x = 0$, $(v_z, v_y) \neq 0$.

Нулевое приближение задачи

(2.34) $$v_y^{(0)} = 0,\quad v_z^{(0)} = y$$

Для первого приближения из (2.9) получаем систему

(2.35) $$2(1+a^2)v''_{y,yy} + v''_{y,zz} + v''_{z,yz} + P''_{,y} = 0$$
$$2(1+a^2)v''_{z,zz} + v''_{z,yy} + v''_{y,yz} + P''_{,z} = 0,\quad v''_{y,y} + v''_{z,z} = 0$$

Граничные условия из (1.11)

(2.36) $$v_y'' = v_z'' = 0 \text{ при } y = 1,\quad v_y'' = 0,\quad v_z'' = -\cos m_2 z \text{ при } y = 0$$

Ищем решение в виде

(2.37) $$P'' = D_2(y)\sin m_2 z,\quad v_y'' = B_2(y)\sin m_2 z,\quad v_z' = A_2(y)\cos m_2 z$$

После подстановки в (2.35) и (2.36) и преобразований задача (2.35), (2.36) приводится к следующей системе:

(2.38) $$A_2 = m_2^{-1} pB_2,\quad [(1+2a^2)p^2 - m_2^2]B_2 + pD_2 = 0$$
$$[m_2^{-2}p^3 - (1+2a^2)p]B_2 + D_2 = 0$$

(2.39) $$A_2(1) = B_2(1) = B_2(0) = 0,\quad A_2(0) = -1$$

Решение задачи (2.38), (2.39) дает

(2.40) $$A_2 = m_2^{-1}\sum_1^2 \mu_q G_q',\quad B_2 = \sum_1^2 F_q',\quad D_2 = \sum_1^2 b_q' G_q'$$
$$F_q' = b_q^{1'}\,\mathrm{sh}(\mu_q y) + b_q^{2'}\,\mathrm{sh}[\mu_q(y-1)] + b_q^{3'}\,\mathrm{ch}[\mu_q(y-1)]$$
$$G_q' = \mu_q^{-1}pF_q',\quad b_q' = \mu_q[\mu_q^2 m_2^{-2} - (1+2a^2)]$$
$$\mu_q^2 = m_2^2 t_q,\quad t_{1,2} = 1 + 2a^2 \pm 2a(1+a^2)^{1/2}$$

через $b_q^{n'}$ обозначены выражения

$$b_q^{1'} = -2\Delta_2^{-1}M_{12}^{qq+2},\quad b_q^{2'} = 2\Delta_2^{-1}M_{23}^{qq+2},\quad b_q^{3'} = 2\Delta_2^{-1}\mu_q M_{24}^{qq+2}$$

(по q не суммировать)

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & -\mu_1 & -\mu_2 \\ M_1 & M_2 & M_1^{-1} & M_2^{-1} \\ \mu_1 M_1 & \mu_2 M_2 & -\mu_1 M_1^{-1} & -\mu_2 M_2^{-1} \end{vmatrix},\quad M_i = \exp(\mu_i)$$

где M_{mn}^{qq+2} — миноры определителя Δ_2.

В этом случае скорость

(2.41) $$|\mathbf{V}| = y + \delta_2 A_2(y)\cos m_2 z + o(\delta_2^2)$$

Критерий образования застойных зон в точках поверхности ($y = -\delta_{2*}$, $\cos m_2 z = -1$) следующий:

(2.42) $$\delta_2 \geqslant \delta_{2*},\quad \delta_{2*} = \left\{\sum_1^2 [\mu_q^2(b_q^{3'}\,\mathrm{ch}\,\mu_q - b_q^{2'}\,\mathrm{sh}\,\mu_q)]\right\}^{-1}$$

Поступила 28 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* О застойных зонах течения вязкопластической среды в трубах. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
2. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
3. *Чернышов А. Д.* О застойных зонах в вязкопластических средах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3.
4. *Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М., «Наука», 1971.